AUTOREFERAT

1. **Imię i nazwisko:** Małgorzata Wyrwas

2. **Posiadane dyplomy, stopnie naukowe:**

   - stopień naukowy doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska, 2005
     tytuł rozprawy doktorskiej: *Nieregularne obserwatory nieliniowych układów sterowania*
     Promotor: prof. dr hab. inż. Zbigniew Bartosiewicz (Politechnika Białostocka)
     Recenzenci: prof. dr hab. inż. Witold Respondek (Institut National des Sciences Appliquées de Rouen), prof. dr hab. Andrzej Fryszkowski (Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska)

   - dyplom magistra matematyki, Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Uniwersytet Warszawski Filia w Białymstoku, 1996.
     tytuł pracy magisterskiej: *Stabilność lokalnej obserwowalności nieliniowych układów sterowania*
     Promotor: prof. dr hab. inż. Zbigniew Bartosiewicz (Politechnika Białostocka)

3. **Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:**

   - od marca 2007: adiunkt na Wydziale Informatyki Politechniki Białostockiej;
   - lipiec 2006 – styczeń 2008: pracownik naukowy (Senior Researcher, post-doc) w Instytucie Cybernetyki przy Politechnice w Tallinie;
   - marzec 2005 – luty 2007: adiunkt, Katedra Matematyki, Instytut Matematyki i Fizyki, Politechnika Białostocka;
   - październik 1996 – luty 2005: asystent, Katedra Matematyki, Instytut Matematyki i Fizyki, Politechnika Białostocka.

4. **Wskazanie osiągnięcia** wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2016 r. poz. 882 ze zm. w Dz. U. z 2016 r. poz. 1311.):

   Osiągnięciem naukowym stanowiącym podstawę do ubiegania się o stopień doktora habilitowanego nauk matematycznych jest cykl publikacji zatytułowany:

   Algebraiczne metody badania osiągalności oraz linearyzowalności nieliniowych układów sterowania

   w skład którego wchodzą następujące artykuły:

[**H1**] Z. Bartosiewicz, J. Belikov, Ü. Kotta, M. Wyrwas, *State feedback linearization of nonlinear control systems on homogeneous time scales*, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 31, 69-85, 2019.
https://doi.org/10.1016/j.nahs.2018.08.002

[**H2**] M. Wyrwas, *Strong accessibility and integral manifolds of the continuous-time nonlinear control systems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 469:2, 935-959, 2019.
https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.09.045

[**H3**] Z. Bartosiewicz, Ü. Kotta, T. Mullari, M. Tõnso, M. Wyrwas, *On accessibility conditions for state space nonlinear control systems on homogeneous time scales*, Systems and Control Letters, 98, 8–13, 2016.
https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2016.09.018

[**H4**] Z. Bartosiewicz, Ü. Kotta, M. Tõnso and M. Wyrwas, *Accessibility conditions of MIMO nonlinear control systems on homogeneous time scales*, Mathematical Control and Related Fields, 6:2, 217–250, 2016.
https://doi.org/10.3934/mcrf.2016002

[**H5**] Z. Bartosiewicz, Ü. Kotta, M. Tõnso, M. Wyrwas, *Static state feedback linearization of nonlinear control systems on homogeneous time scales*, Mathematics of Control, Signals, and Systems, 27:4, 523-550, 2015.
https://doi.org/10.1007/s00498-015-0150-5

Do oznaczenia prac autorskich lub współautorskich wymienionych w poniższych rozdziałach użyłam liter **H**, A, B lub C, np. [**H1**], [A1], [B1] lub [C1]. Przy czym, dodatkowo prace ze wskazanego cyklu publikacji oznaczone są pogrubioną czcionką [**H1**]-[**H5**]. Publikacje, nie wchodzące w skład osiągnięcia naukowego, z czasopism znajdujących się w bazie Journal Citation Reports (JCR) oznaczono [A1]-[A33], z innych czasopism międzynarodowych lub krajowych oraz rozdziały w monografiach oznaczono [B1]-[B16], publikacje w recenzowanych materiałach konferencyjnych oznaczono [C1]-[C26]. Spis tych publikacji znajduje się w Literaturze na stronach 38-42 na końcu autoreferatu. Prace innych autorów są numerowane, np. [1], a ich spis znajduje się na końcu autoreferatu na stronach 43-47.
Mój udział w pracach współautorskich [**H1**,**H4**,**H5**] oceniam na 55%, a w pracy [**H3**] na 60%.

4.1 Omówienie osiągniętych wyników na podstawie wyżej wymienionych prac

4.1.1 Wstęp

Początki teorii sterowania sięgają połowy XIX wieku, wówczas zaczęto analizować matematyczne działanie regulatorów mechanicznych. Szczególnie silne zespolenie teorii sterowania z matematyką nastąpiło po drugiej wojnie światowej. Teoria ta wywarła duży wpływ na rachunek wariacyjny, teorię równań różniczkowych i różnicowych, geometrię różniczkową, a obecnie istnieje jako samodzielny obszar matematyki stosowanej. Jedną z fundamentalnych własności układów sterowania jest ich osiągalność, która związana jest ze stanami osiągalnymi i problemem sterowalności układów. Sterowalność odnosi się do możliwości przejścia układu do określonego stanu za pomocą odpowiednich sygnałów wejściowych. W przypadku układów liniowych własność sterowalności jest własnością strukturalną i każdy układ liniowy można poprzez odpowiednią zamianę współrzędnych sprowadzić do postaci, w której wyróżnia się podukłady: sterowalny oraz autonomiczny (całkowicie niesterowalny), w literaturze rozkład ten nosi nazwę rozkładu Kalmana [1,2]. W przypadku układów nieliniowych taki rozkład nie jest możliwy, a własnością, która pełni rolę podobną do sterowalności układów liniowych jest osiągalność. Problem osiągalności nieliniowych układów sterowania z czasem ciągłym badany był w pracach [3] oraz [4]. W pracy [3] H.J. Sussmann i V. Jurdjevic podali warunki konieczne i wystarczające osiągalności oraz silnej osiągalności w punkcie wykorzystując dystrybucje związane z rozważanymi układami. H.J. Sussmann oraz V. Jurdjevic udowodnili, że układ posiada własność silnej osiągalności w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy gdy dystrybucja silnej osiągalności ma w tym punkcie wymiar równy wymiarowi przestrzeni stanów. W przypadku, gdy istnieje otwarty i gęsty podzbiór przestrzeni stanów $\mathbb{R}^n$, dla którego zachodzi własność silnej osiągalności w punktach z tego zbioru, to taką osiągalność będziemy nazywali generyczną, i wówczas dystrybucja silnej osiągalności ma generycznie wymiar n. Z każdą dystrybucją można związać pewną kodystrybucję, której wartościami będą podprzestrzenie liniowe w przestrzeni jednoform różniczkowych. Bazując na języku jednoform różniczkowych w pracy [4], E. Aranda-Bricaire, C. H. Moog i J.-B. Pomet opracowali kryteria na silną osiągalność w punktach z otwartego i gęstego podzbioru przestrzeni stanów, w których (ko)dystrybucje związane z rozważanym układem mają stały wymiar. Zatem w [4,6] autorzy korzystali z metod algebraicznych bazujących na języku form różniczkowych do zbadania silnej osiągalności, podczas gdy H.J. Sussmann i V. Jurdjevic w pracy [3] użyli geometrii różniczkowej i warunki osiągalności scharakteryzowali za pomocą pól wektorowych związanych z układem. W pracy [4] pokazano, że własność silnej osiągalności układu z czasem ciągłym w punktach, w których rząd (ko)dystrybucji jest stały, jest równoważna temu, że każda niezerowa jednoforma różniczkowa ma skończony stopień względny, co jest związane z brakiem tzw. elementu autonomicznego, wprowadzonego przez J.F. Pommareta [5]. Wykorzystując ten fakt autorzy monografii [6] użyli pojęcia elementu autonomicznego do zdefiniowania generycznej silnej osiągalności układu. Ponieważ silna osiągalność oznacza, że dla każdego czasu $t > 0$ zbiór osiągalny w czasie t ma niepuste wnętrze, więc w przypadku układów z czasem dyskretnym silna osiągalność jest za silną własnością gdyż już w pierwszym kroku należałoby mieć niepuste wnętrze zbioru osiągalnego. Zatem własność silnej osiągalności jest badana tylko dla układów z czasem ciągłym. W przypadku nieliniowych układów z czasem dyskretnym możemy mówić o osiągalności i problem ten był badany na przykład w pracach [7–9], gdzie osiągalność była badana punktowo za pomocą algebr Liego pól wektorowych związanych z układem oraz w [10], gdzie wykorzystano liniowe algebraiczne podejście wprowadzone przez J.W. Grizzlego [11] oraz różnicowe podejście algebraiczne wprowadzone przez M. Fliessa [12, 13]. Już w 1989 roku M. Fliess podkreślał, że teorie dla układów z czasem ciągłym i dyskretnym mimo pewnych podobieństw są różne. Pomimo istniejących różnic w obu teoriach wydaje się, że skale czasowe są jednym z narzędzi, które umożliwiają unifikację czasu ciągłego i dyskretnego. A z punktu widzenia matematycznej teorii sterowania teoria skal czasowych umożliwia unifikację dwóch podstawowych działów matematyki: równań różniczkowych i równań różnicowych. Dlatego też w pracach [**H3**] i [**H4**] wykorzystaliśmy rachunek skal czasowych do opisu układów sterowania z czasem ciągłym i dyskretnym. Następnie bazując na formalizmie algebraicznym związanym z rozważnym układem określonym na skali czasowej zbadaliśmy problem generycznej osiągalności nieliniowych układów sterowania zarówno z czasem dyskretnym jak również z czasem ciągłym. Podobnie jak w publikacji [6] w pracach [**H3**, **H4**] wykorzystaliśmy pojęcie elementu autonomicznego do zdefiniowania generycznej osiągalności układu. Wówczas pojawiło się pytanie o formalizm matematyczny umożliwiający badanie osiągalności w punktach, które nie należą do zbioru otwartego i gęstego wynikającego z generyczności. Szukając odpowiedzi na to pytanie zauważyłam, że własność silnej osiągalności jest związana z punktem i jego otoczeniem. W związku z tym postanowiłam użyć teorii kiełków do scharakteryzowania własności silnej osiągalności układu w punkcie z przestrzeni stanów. W pracy [**H2**] wprowadziłam formalizm matematyczny pozwalający zbadać silną osiągalność układów z czasem ciągłym we wszystkich punktach przestrzeni stanów, a więc także w punktach osobliwych, w których wymiar (ko)dystrybucji jest różny od jej wymiaru w punktach z otoczeń punktów osobliwych.

Formalizm algebraiczny dla układów nieliniowych w przestrzeni stanów podany między innymi w [6, 14] dla układów z czasem ciągłym i w [11] dla układów z czasem dyskretnym, został wykorzystany do badania problemu linearyzacji poprzez sprzężenia zwrotne zależne od stanu. Linearyzacja poprzez statyczne sprzężenie zwrotne to temat badany od lat osiemdziesiątych zarówno dla układów z czasem ciągłym jak również z czasem dyskretnym, patrz na przykład [15–18]. Przy badaniu linearyzacji podobnie jak przy badaniu osiągalności wykorzystano wiele różnych technik w tym między innymi geometrię różniczkową i algebrę. W przypadku układów z czasem ciągłym problem linearyzacji poprzez statyczne sprzężenie zwrotne od stanu oraz zamianę współrzędnych został po raz pierwszy zbadany w [15] i [19]. Od tego momentu powstało wiele prac, które związane były z tym problemem i w których użyto różnych matematycznych narzędzi dla różnych klas układów. Podejście geometryczne można znaleźć w [20] dla układów z czasem ciągłym oraz w [17] dla układów z czasem dyskretnym. Metody algebraiczne bazujące na języku form różniczkowych zastosowano w pracy [6] dla układów z czasem ciągłym oraz w [10] dla układów z czasem dyskretnym. W przypadku, gdy linearyzacja układu nieliniowego poprzez statyczne sprzężenie zwrotne zależne od stanu oraz dyfeomorfizm przestrzeni stanów nie jest możliwa pojawia się pytanie, czy istnieje dynamiczne sprzężenie zwrotne, takie że otrzymany nowy rozszerzony układ będzie linearyzowalny poprzez statyczne sprzężenie zwrotne oraz zamianę współrzędnych stanu. Odpowiedź na to pytanie w języku form różniczkowych można dla układów z czasem ciągłym znaleźć w [4, 6], zaś dla układów z czasem dyskretnym w [10]. Wtedy pojawia się pytanie o warunki linearyzowalności układów określonych na skalach czasowych. Wykorzystując rachunek skal czasowych w pracach [**H1**, **H5**] podane zostały warunki linearyzowalności nieliniowych analitycznych układów określonych na jednorodnych skalach czasowych. W przypadku układów z czasem ciągłym warunki te pokrywają się z warunkami prezentowanymi w [4, 6], zaś dla układów z czasem dyskretnym wyniki otrzymane w [**H1**,**H5**] są nowe. Zauważmy, że w [10] autorzy wykorzystywali algebrę różnicową [21] do analizy nieliniowych układów z czasem dyskretnym, zaś w [**H1**,**H5**] bazujemy na algebrze podobnej do algebry różniczkowej [14, 22].

Wspólnym celem prac [**H1**,**H2**,**H3**,**H4**,**H5**] jest zbadanie wybranych własności układów sterowania z czasem ciągłym i dyskretnym za pomocą metod algebraicznych. W prezentowanym cyklu publikacji badane były następujące zagadnienia:

1. generyczna osiągalność nieliniowych układów sterowania określonych na jednorodnych skalach czasowych (w pracach [**H3**, **H4**]);
2. silna osiągalność nieliniowych układów sterowania z czasem ciągłym (w pracy [**H2**]);
3. generyczna lokalna linearyzowalność poprzez statyczne oraz dynamiczne sprzężenia zwrotne dla nieliniowych układów sterowania określonych na jednorodnych skalach czasowych (w pracach [**H1**, **H5**]).

Wykorzystując fakt, że teoria układów dynamicznych na skalach czasowych pozwala na jednolity opis pojęć i wyników teorii równań różniczkowych i teorii równań różnicowych, w pracach [**H1**, **H3**, **H4**, **H5**] podaliśmy warunki charakteryzujące generyczną osiągalność i linearyzowalność nieliniowych układów sterowania określonych na jednorodnych skalach czasowych, tzn. układów z czasem ciągłym lub dyskretnym.

4.1.2 Osiągnięte wyniki

W przedłożonym cyklu publikacji badając wyżej wymienione zagadnienia otrzymano następujące wyniki:

- sformułowano i udowodniono warunki konieczne i wystarczające generycznej osiągalności nieliniowych układów sterowania określonych na jednorodnych skalach czasowych (w pracach [**H3**, **H4**]); sformułowanie tych warunków było możliwe dzięki opracowaniu „przygotowawczych” wyników, tj.
  - w przypadku pracy [**H4**] rozwinięto formalizm matematyczny (między innymi wprowadzając operatory Θ oraz θ) umożliwiający wielomianowy zapis nieliniowych układów sterowania z wieloma wejściami i wieloma wyjściami; następnie pokazano, że wielomiany związane z rozważanym układem definiują "minimalną" zależność liniową zachodzącą dla wektorów z przestrzeni jednoform różniczkowych, którą można jednocześnie traktować jako moduł nad pierścieniem wielomianów różniczkowych;
  - w przypadku pracy [**H3**] wprowadzono przestrzeń liniowych odwzorowań, która jest przestrzenią dualną do przestrzeni jednoform różniczkowych; następnie w przestrzeni tej zdefiniowano rosnący ciąg dystrybucji, które są anihilatorami odpowiednich przestrzeni jednoform różniczkowych; umożliwiło to sformułowanie warunku osiągalności zarówno w języku jednoform różniczkowych jak również pól wektorowych związanych z badanym układem;
- wyznaczono rozmaitości całkowe algebry Liego pól wektorowych związanych z rozważanym układem oraz sformułowano i udowodniono warunki konieczne i wystarczające silnej osiągalności nieliniowych układów sterowania z czasem ciągłym (w pracy [**H2**]); przy czym opracowano następujące wyniki „przygotowawcze”:
  - w pracy [**H2**] wprowadzono formalizm matematyczny bazujący na języku ideałów i modułów w pierścieniu kiełków funkcji analitycznych;

- sformułowano i udowodniono warunki konieczne i wystarczające generycznej lokalnej linearyzowalność poprzez statyczne oraz dynamiczne sprzężenia zwrotne dla nieliniowych układów sterowania określonych na jednorodnych skalach czasowych (w pracach [**H1**, **H5**]); dodatkowo opracowano następujące wyniki „przygotowawcze”:
  - w przypadku pracy [**H1**] sformułowano i udowodniono warunki konieczne i wystarczające odwracalności nieliniowych układów sterowania określonych na jednorodnych skalach czasowych ze względu na to, że odwracalność układu jest warunkiem koniecznym jego linearyzowalności poprzez dynamiczne sprzężenie zwrotne od stanu;
  - w przypadku pracy [**H5**] rozwinięto wprowadzony formalizm algebraiczny i udowodniona, że zamiana współrzędnych oraz statyczne sprzężenie zwrotne prowadzą do konstrukcji izomorficznych inwersyjnych domknięć oraz izomorficznych przestrzeni jednoform.

4.1.3 Skale czasowe

Skalą czasową nazywamy dowolny domknięty podzbiór $\mathbb{T}$ zbioru liczb rzeczywistych. Rachunek różniczkowy na skalach czasowych bazuje na pojęciu delta-pochodnej x^{Δ} oraz nabla-pochodnej x^{∇} funkcji $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, które zachowują się odpowiednio jak zwykła pochodna $x'(t)$ gdy $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ lub jak różnice $x(t+1)-x(t)$ oraz $x(t)-x(t-1)$ w przypadku $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. Zarówno czas ciągły jak również dyskretny są przykładami tzw. jednorodnych skal czasowych. Dodatkowo do jednorodnych skal czasowych należą zbiory $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} := \{hk : \ k \in \mathbb{Z}\}$, $h > 0$, w których odległość między elementami jest równa stałej dodatniej liczbie rzeczywistej h. Zatem rachunek skal czasowych zapoczątkowany w rozprawie doktorskiej Stefana Hilgera [23] pozwala na unifikację rachunku różniczkowego oraz rachunku różnicowego i konsekwentnie na unifikację równań różniczkowych zwyczajnych oraz równań różnicowych. W przypadku równań różnicowych opis dynamiki, która opiera się na operatorze różnicy $x(t+1) - x(t)$ jest często nazywany opisem “delta-domain”, patrz np. [24–30]. Takie podejście jest promowane jako skuteczne narzędzie do modelowania układu dynamicznego. W porównaniu do modeli opartych na operatorze przesunięcia, modele z delta-pochodną (“delta-domain”) są mniej wrażliwe na błędy przybliżeń i nie dają błędnych modeli, gdy sygnały pobierane są z dużą częstotliwością próbkowania, patrz [31–33]. Również nabla-pochodna jako operator różnicy $x(t) - x(t-1)$ uwzględniający opóźnienia w układzie znajduje zastosowanie, patrz np. [34–36]. Teoria układów dynamicznych na skalach czasowych, której poświęcone są monografie M. Bohnera i A. Petersona [37, 38], jest rozwijającym sie działem matematyki. Znajduje ona zastosowania w modelowaniu różnorodnych rzeczywistych układów technicznych, ekonomicznych i biologicznych, które wymagają użycia równocześnie zarówno czasu ciągłego, jak i dyskretnego, [39–41].

W teorii skal czasowych pojawiają się następujące funkcje $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ oraz $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, zdefiniowane odpowiednio jako $\sigma(t) := \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}$ z $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ ($\sigma(M) = M$ jeśli $\mathbb{T}$ ma maksimum M) oraz $\rho(t) := \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ z $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ ($\rho(m) = m$, jeśli $\mathbb{T}$ ma minimum m). Funkcje te nazywamy odpowiednio *operatorem “skoku do przodu”* (*następnikiem*) oraz *operatorem “skoku do tyłu”* (*poprzednikiem*). Wówczas funkcje $\mu, \nu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ zdefiniowane jako $\mu(t) := \sigma(t) - t$ oraz $\nu(t) := t - \rho(t)$ nazywamy odpowiedni *funkcją ziarnistości do przodu* oraz *funkcją ziarnistości do tyłu.* Jeżeli μ i ν

są funkcjami stałymi, to skalę czasową nazywamy *jednorodną*. Jeśli $\sup \mathbb{T}$ jest skończone i $\rho(\sup \mathbb{T}) < \sup \mathbb{T}$, to $\mathbb{T}^\kappa := \mathbb{T} \setminus \{\sup \mathbb{T}\}$. W przeciwnym razie, $\mathbb{T}^\kappa := \mathbb{T}$. Dodatkowo, jeśli $\inf \mathbb{T}$ jest skończone i $\inf \mathbb{T} < \sigma(\inf \mathbb{T})$, to zdefiniujemy następujący zbiór: $\mathbb{T}_\kappa := \mathbb{T} \setminus \{\inf \mathbb{T}\}$. W przeciwnym razie, $\mathbb{T}_\kappa := \mathbb{T}$. Zauważmy, że dla jednorodnych skal czasowych mamy: $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}_\kappa = \mathbb{T}$. *Delta-pochodną* funkcji $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ w punkcie $t \in \mathbb{T}^\kappa$ jest liczba rzeczywista $x^\Delta(t)$, taka że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje otoczenie U punktu t, takie że $|(x(\sigma(t)) - x(s)) - x^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leqslant \varepsilon|\sigma(t) - s|$ dla wszystkich $s \in U$. Mówimy, że funkcja x jest *delta-różniczkowalna* na $\mathbb{T}$, jeśli $x^\Delta(t)$ istnieje dla wszystkich $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Analogicznie definiujemy nabla-pochodną. *Nabla-pochodną* funkcji $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ w punkcie $t \in \mathbb{T}_\kappa$ jest liczba rzeczywista $x^\nabla(t)$, taka że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje otoczenie U punktu t, takie że $|(x(\rho(t)) - x(s)) - x^\nabla(t)(\rho(t) - s)| \leqslant \varepsilon|\rho(t) - s|$ dla wszystkich $s \in U$. Mówimy, że funkcja x jest *nabla-różniczkowalna* na $\mathbb{T}$, jeśli $x^\nabla(t)$ istnieje dla wszystkich $t \in \mathbb{T}_\kappa$.

W teorii układów dynamicznych na skalach czasowych do opisu układów używa sie delta-pochodnej. Korzystając z faktu, że dla $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ $x^\Delta = x'$ równanie różniczkowe $x'(t) = f(t, x(t))$ można zapisać jako $x^\Delta(t) = f(t, x(t))$, zaś z faktu, że $x \circ \sigma = x + \mu x^\Delta$ dla $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ równanie różnicowe $x(t + 1) = f(t, x(t))$ można zapisać jako $x^\Delta(t) = f(t, x(t)) - x(t)$. Analogicznej unifikacji można dokonać dla układów wejście-wyjście, opisanych przez równania różniczkowe i różnicowe wyższych rzędów. W tym celu wprowadzamy pojęcie delta-pochodnej wyższego rzędu, tzn. dla delta-różniczkowalnej funkcji $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ delta-pochodną *rzędu drugiego* definiujemy następująco: $y^{[2]} := (y^\Delta)^\Delta$ o ile y^Δ jest delta-różniczkowalna na $\mathbb{T}^{\kappa^2} := (\mathbb{T}^\kappa)^\kappa$ i ma delta-pochodną $y^{[2]} : \mathbb{T}^{\kappa^2} \to \mathbb{R}$. Podobnie definiujemy delta-pochodne wyższych rzędów i dla $n \geqslant 2$ mamy $y^{[n]} := (y^{[n-1]})^\Delta$ o ile $y^{[n-1]}$ jest delta-różniczkowalna na $\mathbb{T}^{\kappa^n} := ((\mathbb{T}^{\kappa^{n-1}})^\kappa$ i ma delta-pochodną $y^{[n]} : \mathbb{T}^{\kappa^n} \to \mathbb{R}$. Ponieważ $y^{[n]} = y^{(n)}$ dla $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ oraz $y \circ \sigma^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} y^{[i]}$ dla $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, gdzie $(y \circ \sigma^n)(t) := y(t + n)$, $t \in \mathbb{Z}$, więc również układy wejście-wyjście z czasem ciągłym i dyskretnym można opisać za pomocą równań delta-różniczkowych wyższych rzędów. Zatem wykorzystując pojęcie delta-pochodnej układy sterowania z czasem ciągłym oraz dyskretnym można opisać za pomocą równań delta-różniczkowych rzędu pierwszego dla układów w przestrzeni stanów, a w przypadku układów wejście-wyjście za pomocą równań delta-różniczkowych wyższych rzędów. Wówczas teoria układów dynamicznych na skalach czasowych pozwala na jednolity opis pojęć i wyników teorii równań różniczkowych i różnicowych, a skale jednorodne umożliwiają tę unifikuję. W pracach [**H1**, **H3**, **H5**] badaliśmy nieliniowe układy w przestrzeni stanów zdefiniowane przez równania delta-różniczkowe określone na jednorodnych skalach czasowych, zaś w [**H4**] nieliniowe układy wejście-wyjście opisane przez delta-różniczkowe równania wyższych rzędów na skalach jednorodnych. Zauważmy, że w przypadku układów dyskretnych formalizm prezentowany w pracach [**H1**, **H3**, **H4**, **H5**] bazuje na operatorach różnicy związanych z delta- i nabla-pochodnymi, więc prezentowane wyniki dają nowe warunki opisujące wyżej wymienione własności rozważanych układów.

4.1.4 Formalizm algebraiczny

W przypadku nieliniowych układów sterowania zdefiniowanych na jednorodnych skalach czasowych wprowadzony został aparat matematyczny (formalizm algebraiczny). Formalizm ten został opisany w artykułach [**H3**, A12, A21, B14] i unifikuje on istniejącą teorię dla układów z czasem ciągłym oraz dyskretnym. Kluczowym zadaniem tego formalizmu jest konstrukcja ciał różniczkowych związanych z danym nieliniowym układem sterowania zdefiniowanym przez równania delta-różniczkowe na jednorodnej skali czasowej.

Ciała różniczkowe dla układów w przestrzeni stanów

Wyniki prezentowane w pracach [**H1**, **H3**, **H5**] bazują na formalizmie algebraicznym wprowadzonym w [A12, A21, B14], którego kluczowym zadaniem była konstrukcja ciał różniczkowych związanych z rozważanym układem. W pracach [**H1**, **H3**, **H5**] rozważamy nieliniowe układy sterowania określone na jednorodnej skali czasowej $\mathbb{T}$ ($\mathbb{T} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, $h > 0$) postaci:

$$x^{\Delta}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{1a}$$

$$y(t) = h(x(t)), \tag{1b}$$

gdzie $(x(t), u(t)) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$, $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$ jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $m \leqslant n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ jest stanem układu, $u = (u_1, \ldots, u_m)$ jest sterowaniem (wejściem) układu, a funkcje $f : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ oraz $h : \mathcal{X} \to Y \subset \mathbb{R}^p$ są analitycznymi funkcjami swoich argumentów. Załóżmy, że sterowanie zastosowane do układu (1a) jest nieskończenie wiele razy delta-różniczkowalne, tzn. $u^{[k]}$ istnieje dla każdego $k \geqslant 0$. Niech $\widetilde{f}(x, u) := x + \mu f(x, u)$. Załóżmy, że dla badanych układów spełnione jest założenie:

Założenie 1. *Załóżmy, że istnieje odwzorowanie $\varphi : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, takie że $\Phi = (\widetilde{f}, \varphi)$ jest analitycznym dyfeomorfizmem ze zbioru $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$ na zbiór $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$.*

Założenie 1 oznacza, że z $(\bar{x}, z) = \left(\widetilde{f}(x, u), \varphi(x, u)\right) = \Phi(x, u)$ można w sposób jednoznaczny wyznaczyć (x, u) jako analityczną funkcję zależną od $(\bar{x}, z)$. Zauważmy, że dla $\mu = 0$ warunek ten jest zawsze spełniony gdy $\varphi(x, u) = u$. W przypadku $\mu > 0$ układ (1a) można zapisać w równoważnej postaci

$$x^{\sigma}(t) = \widetilde{f}(x(t), u(t)). \tag{2}$$

Wtedy dla $z = \varphi(x, u) \in \mathbb{R}^m$ mamy rank$\frac{\partial(\tilde{f}, \varphi)}{\partial(x,u)} = n + m$.

W pracach [**H1**, **H3**, **H5**] z równaniem (1a) związane jest przemienne ciało $\mathscr{K}$ funkcji meromorficznych zależnych od skończonej liczby zmiennych ze zbioru $\mathscr{C} := \{x_i, i = 1, \ldots, n,\ u_j^{[k]}, j = 1, \ldots, m, k \geqslant 0\}$. W ciele tym definiujemy operatory σ_f oraz Δ_f, patrz [B14][1]. Przy Założeniu 1 ciało $\mathscr{K}$ z operatorem Δ_f jest ciałem σ_f-różniczkowym. Dla $\mu = 0$, $\sigma_f = \sigma_f^{-1} = \mathrm{id}$ i $\mathscr{K}$ jest inwersyjne. Ogólnie ciało $\mathscr{K}$ nie jest inwersyjne, ale zawsze można je włożyć w inwersyjne σ_f-różniczkowe nadciało $\mathscr{K}^*$, zwane *inwersyjnym domknięciem* (*inversive closure*, [21]) ciała $\mathscr{K}$ i operator σ_f rozszerzyć do $\mathscr{K}^*$, tak aby $\sigma_f : \mathscr{K}^* \to \mathscr{K}^*$ był automorfizmem. Niech $\rho_f : \mathscr{K}^* \to \mathscr{K}^*$ będzie operatorem zdefiniowanym następująco $\rho_f := \sigma_f^{-1}$. Dla $\mu \neq 0$, $\mathscr{K}^*$ jest ciałem funkcji meromorficznych zależnych od zmiennych ze zbioru $\mathscr{C}^* = \mathscr{C} \cup \{z_s^{\{-\ell\}},\ s = 1, \ldots, m,\ \ell \geqslant 1\}$, gdzie[2] $z_i^{\{-\ell\}} = \sigma_f\left(z_i^{\{-\ell-1\}}\right)$

[1] W pracy [B14] operatory σ_f oraz Δ_f są oznaczone odpowiednio przez σ oraz Δ. Zmiana oznaczenia jest związana z faktem, że w definicji tych operatorów (określonych na $\mathscr{K}$) wykorzystujemy zależność (1a) pochodzącą z układu i w związku z tym dodaliśmy indeks „f".

[2] W pracach [**H1**, **H3**, **H5**] używaliśmy oznaczenia $z_i^{\langle -l \rangle}$ zamiast $z_i^{\{-l\}}$. Oznaczenie zostało zmienione w celu ujednolicenia notacji w autoreferacie.

i $z_i = \varphi_i(x,u) = \sigma_f\left(z_i^{\{-1\}}\right)$, [B14]. Operator Δ_f spełniający uogólnioną regułę Leibniza $\Delta_f(FG) = \Delta_f(F)G + \sigma_f(F)\Delta_f(G)$, $F,G \in \mathscr{K}$, można rozszerzyć do $\mathscr{K}^*$ i wówczas jest on σ_f-różniczkowaniem w ciele $\mathscr{K}^*$. Dodatkowo w ciele $\mathscr{K}^*$ można wprowadzić operator ∇_f (patrz na przykład [**H3**, A12]) który także spełnia uogólnioną regułę Leibniza $\nabla_f(FG) = \nabla_f(F)G + \rho_f(F)\nabla_f(G)$, $F,G \in \mathscr{K}^*$, więc jest on "ρ_f-różniczkowaniem", a zatem w przemiennym ciele $\mathscr{K}^*$ mamy ρ_f-różniczkowanie. Wówczas $\mathscr{K}^*$ jest również ciałem ρ_f-różniczkowym.

W pracach [**H1**,**H3**,**H5**] wprowadzona została przestrzeń jednoform różniczkowych $\mathscr{E} := \operatorname{span}_{\mathscr{K}^*}\{\mathrm{d}\zeta_i,\ \zeta_i \in \mathscr{C}^*\}$, w której zdefiniowaliśmy operatory: automorfizmy $\sigma_f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ i $\rho_f := \sigma_f^{-1} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ oraz związane z σ_f- i ρ_f-różniczkowaniem operatory $\Delta_f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ i $\nabla_f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$. Ponadto zdefiniowaliśmy operator różniczkowania $\mathrm{d} : \mathscr{K}^* \to \mathscr{E}$, który funkcjom z ciała przyporządkowuje jednoformy dokładne.

Nad otrzymanym ciałem różniczkowym $\mathscr{K}^*$ funkcji meromorficznych w pracach [**H1**, **H3**,**H5**] zdefiniowaliśmy podprzestrzenie w przestrzeni jednoform różniczkowych, które wykorzystaliśmy do podania warunków generycznej osiągalności oraz linearyzowalności (poprzez sprzężenie zwrotne zależne od stanu) rozważanych układów. Warunki te zostaną zaprezentowane w dalszej części autoreferatu w rozdziałach 4.1.5, 4.1.6 oraz 4.1.7. Przy czym w pracach [**H1**,**H2**,**H3**,**H5**] używaliśmy notacji $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{A}$ i $\mathcal{E}$ zamiast $\mathscr{C}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{A}$ i $\mathscr{E}$. Zmiana oznaczeń w autoreferacie związana jest z tym, że symbole $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{A}$ i $\mathcal{E}$ zostały użyte poniżej w formalizmie matematycznym dla układów wejście-wyjście.

Ciała różniczkowe dla układów wejście-wyjście

Ze względu na to, że układy sterowania można opisywać również za pomocą równań, w których występują tylko wejścia i wyjścia, więc w pracy [**H4**] omówiliśmy formalizm algebraiczny dla układów wejście-wyjście. Formalizm ten jest uogólnieniem formalizmu prezentowanego w pracach [A27, A32, C16, C20] na przypadek układów z wieloma wejściami i wieloma wyjściami. W pracy [**H4**] po raz pierwszy podaliśmy własności oraz zależności między wprowadzonymi pierścieniami/ciałami różniczkowymi oraz pierścieniami wielomianów czy przestrzeniami liniowymi nad otrzymanym ciałem różniczkowym.

Analogicznie jak dla układów w przestrzeni stanów załóżmy, że skala czasowa $\mathbb{T}$ jest jednorodna, tzn. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, $h > 0$. Dla funkcji $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ oraz $\iota \leqslant k$ wprowadźmy następującą notację $\psi^{[\iota..k]} := \left(\psi^{[\iota]}, \ldots, \psi^{[k]}\right)$. Niech $y_i : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,p$, oraz $u_j : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,m$, będą funkcjami nieskończenie wiele razy delta-różniczkowalnymi.

Rozpatrzmy nieliniowy układ Σ z wieloma wejściami i wieloma wyjściami (układ MIMO) opisany przez następujący zbiór delta-różniczkowych równań wejście-wyjście na jednorodnej skali czasowej:

$$y_i^{[n_i]} = \phi_i\left(y_1^{[0..n_{i1}]}, \ldots, y_p^{[0..n_{ip}]}, u_1^{[0..s_{i1}]}, \ldots, u_m^{[0..s_{im}]}\right), \tag{3}$$

gdzie $i = 1,\ldots,p$. Załóżmy, że funkcje ϕ_i, $i = 1,\ldots,p$, są rzeczywistymi funkcjami analitycznymi swoich argumentów. Dla $i = 1,\ldots,p$, $j = 1,\ldots,p$, $k = 1,\ldots,m$, załóżmy, że

$$0 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_p\,, \tag{4a}$$

$$
\begin{cases}
n_{ij} < n_j\,, \\
n_{ij} < n_i, \ \text{for } j \leqslant i, \\
n_{ij} \leqslant n_i, \ \text{for } j > i,
\end{cases} \tag{4b}
$$

$$
s_{ik} < n_i\,. \tag{4c}
$$

Niech $n := n_1 + \ldots + n_p$. Warunki (4) oznaczają, że równania (3) są w postaci będącej rozszerzeniem kanonicznego macierzowego zapisu ułamkowego wprowadzonego w [42] dla układów z czasem ciągłym. Dla układów w postaci (3) możliwe jest wprowadzenie różniczkowania skośnego w ciele związanym z układem sterowania.

Niech $s := \max_{1\leqslant \ell \leqslant p,\ 1\leqslant k\leqslant m} s_{\ell k}$, $\mathbf{z} := \left(y_1^{[0..n_1-1]}, \ldots, y_p^{[0..n_p-1]}, u_1^{[0..s]}, \ldots, u_m^{[0..s]}\right) \in \mathbb{R}^{n+m(s+1)}$ i $\mathbf{f}_e(\mathbf{z}, v) := [z_2, \ldots, z_{n_1}, \phi_1(\mathbf{z}), \ldots, z_{n-n_p+2}, \ldots, z_n, \phi_p(\mathbf{z}), z_{n+2}, \ldots, z_{n+s+1}, v_1, z_{n+s+3}, \ldots, z_{n+2(s+1)}, v_2, z_{n+2s+4}, \ldots, v_{m-1}, z_{n+(m-1)s+m+1}, \ldots, z_{n+m(s+1)}, v_m]^{\mathrm{T}}$. Ponieważ ϕ_i, $i = 1, \ldots, p$, są funkcjami analitycznymi, więc dla $(\mathbf{z}, v) \in U$, gdzie U jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^{n+m(s+1)} \times \mathbb{R}^m$, $m \leqslant n$, odwzorowanie $\mathbf{f}_e : U \to \mathbb{R}^{n+m(s+1)}$ jest analityczne. Układy badane w pracy [**H4**] spełniają następujące założenie:

Założenie 2. Niech $\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}, v) := \mathbf{z} + \mu \mathbf{f}_e(\mathbf{z}, v)$ i załóżmy, że istnieje odwzorowanie $g : U \to \mathbb{R}^m$, takie że $\Psi = (\widetilde{\mathbf{f}}, g)$ jest analitycznym dyfeomorfizmem z U na $\Psi(U)$.

Założenie 2 oznacza, że z zależności $(\bar{\mathbf{z}}, w) = \left(\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}, v), g(\mathbf{z}, v)\right) = \Psi(\mathbf{z}, v)$ można jednoznacznie wyznaczyć $(\mathbf{z}, v)$ jako analityczną funkcję zależną od $(\bar{\mathbf{z}}, w)$.

W pracy [**H4**] wprowadziliśmy pierścienie $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{R}$, które zostały użyte do konstrukcji ciała $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$ jest ciałem ułamków pierścienia $\mathcal{R}$). Elementy z ciała $\mathcal{K}$ są funkcjami meromorficznymi zależnymi od skończonej liczby zmiennych (niezależnych) ze zbioru $\mathcal{C} := \{y_i, y_i^{[1]}, \ldots, y_i^{[n_i-1]},\ i = 1, \ldots, p,\ u_k^{[l]}, k = 1, \ldots, m, l \geqslant 0\}$. Założenie 2 gwarantuje, że σ_Φ jest monomorfizmem i jest dobrze określone na ciele $\mathcal{K}$. W ciele $\mathcal{K}$ można zdefiniować operatory σ_Φ i Δ_Φ, takie że Δ_Φ spełnia uogólnioną regułę Leibniza: $\Delta_\Phi(\varphi\psi) = \Delta_\Phi(\varphi)\psi + \sigma_\Phi(\varphi)\Delta_\Phi(\psi)$, dla $\varphi, \psi \in \mathcal{K}$, więc Δ_Φ, więc jest *różniczkowaniem skośnym* lub *σ_Φ-różniczkowaniem*, [21]. Wówczas ciało $\mathcal{K}$ wyposażone w operator Δ_Φ jest ciałem σ_Φ-różniczkowym. Dla $\mu = 0$, $\sigma_\Phi = \sigma_\Phi^{-1} = \mathrm{id}$, więc ciało $\mathcal{K}$ jest inwersyjne. Ogólnie ciało $\mathcal{K}$ nie jest inwersyjne, ale zawsze można je włożyć w inwersyjne σ_Φ-różniczkowe nadciało $\mathcal{K}^*$, zwane *inwersyjnym domknięciem* ciała $\mathcal{K}$, [21]. Ponieważ σ_Φ jest iniektywnym endomorfizmem, więc można go rozszerzyć do $\mathcal{K}^*$, tak aby $\sigma_\Phi : \mathcal{K}^* \to \mathcal{K}^*$ było automorfizmem. Dla $\mu \neq 0$ nadciało $\mathcal{K}^*$ składa się z funkcji meromorficznych zależnych od skończonej liczby zmiennych ze zbioru $\mathcal{C}^* := \mathcal{C} \cup \{w_s^{\{-\ell\}},\ s = 1, \ldots, m,\ \ell \geqslant 1\}$, gdzie $w_i^{\{-k\}} = \sigma_\Phi\left(w_i^{\{-k-1\}}\right)$ dla $k \geqslant 1$, i $w_i = g_i(\mathbf{z}, v) = \sigma_\Phi\left(w_i^{\{-1\}}\right)$, patrz [A21, B14]. Zauważmy, że w pracy [B14] zakładaliśmy submersyjność odwzorowania $\widetilde{\mathbf{f}}$. Wtedy podany formalizm umożliwiał badanie układów lokalnie w otoczeniach punktów, w których spełniony jest warunek submersyjności. Mocniejsze założenie (Założenie 1 dla układów w przestrzeni stanów, czy Założenie 2 dla układów wejście-wyjście) pojawiające się między innymi w [A21] oraz w pracach [**H1**, **H3**, **H4**, **H5**] umożliwia badanie układów na zbiorach otwartych i gęstych, a zatem otrzymujemy generyczne własności układów. W przypadku ciał nieinwersyjnych wprowadzamy nową zmienną $w := (w_1, \ldots, w_m)$, taką że $\sigma_\Phi^{-1}(\mathbf{z}, v) = \psi\left(\mathbf{z}, w^{\{-1\}}\right)$, gdzie ψ jest pewną funkcją wektorową wyznaczoną przez $\widetilde{\mathbf{f}}$ i $w = g(\mathbf{z}, v)$. Mimo, że wybór zmiennej w nie jest jednoznaczny, to wszystkie możliwe wybory prowadzą do rozszerzeń ciała, które są izomorficzne. Wtedy operator Δ_Φ można rozszerzyć do nowej zmiennej następująco: $\Delta_\Phi\left(w^{\{-\ell\}}\right) := \frac{w^{\{-\ell+1\}}-w^{\{-\ell\}}}{\mu}$, $l \geqslant 1$, a następnie do ciała $\mathcal{K}^*$, tak aby był on σ_Φ-różniczkowaniem w $\mathcal{K}^*$. Zatem otrzymaliśmy: $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}$, jeżeli $\mu = 0$ oraz $\mathcal{C}^* = \mathcal{C} \cup \{w^{\{-\ell\}} | \ \ell \geqslant 1\}$, gdy $\mu \neq 0$.

W pracy [**H4**] wprowadzone zostały następujące przestrzenie jednoform różniczkowych: $\mathcal{E} := \operatorname{span}_{\mathcal{K}^*}\{\mathrm{d}\zeta_i, \zeta_i \in \mathcal{C}\}$ oraz $\mathcal{E}^* := \operatorname{span}_{\mathcal{K}^*}\{\mathrm{d}\zeta_i,\ \zeta_i \in \mathcal{C}^*\}$, które umożliwiły wielomianowy opis układów wejście-wyjście określonych na jednorodnych skalach czasowych. Analogicznie jak dla układów w przestrzeni stanów w powyższych przestrzeniach zdefiniowaliśmy operatory σ_Φ i Δ_Φ oraz operator różniczkowania d, który funkcjom z ciała przyporządkowuje jednoformy dokładne.

Wielomianowy opis układów wejście-wyjście

W pracy [**H4**] omówiliśmy zależności między skośnymi wielomianami różniczkowymi a jednoformami różniczkowymi. Szczegółowo opisaliśmy sposób otrzymania macierzy wielomianowych związanych z danym układem wejście-wyjście. Zauważmy, że σ_Φ-różniczkowe nadciało $\mathcal{K}^*$ (σ_Φ-różniczkowe ciało $\mathcal{K}$) i operatory σ_Φ oraz Δ_Φ indukują nieprzemienny pierścień lewych wielomianów różniczkowych oznaczany przez $\mathcal{K}^*[z;\sigma_\Phi,\Delta_\Phi]$ ($\mathcal{K}[z;\sigma_\Phi,\Delta_\Phi]$). *Lewy wielomian różniczkowy* jednoznacznie zapisujemy w postaci: $a(z) = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i z^{n-i}$, $\alpha_i \in \mathcal{K}^*$ ($\alpha_i \in \mathcal{K}$), gdzie z jest zmienną. Dla funkcji $\alpha \in \mathcal{K}^*$ mnożenie definiujemy następująco: $z \cdot \alpha := \alpha^{\sigma_\Phi} z + \alpha^{\Delta_\Phi}$. Regułę tę można rozszerzyć do mnożenia jednomianów $(\alpha z^n)\cdot(\beta z^m) = (\alpha z^{n-1})\cdot\left(\beta^{\sigma_\Phi} z^{m+1} + \beta^{\Delta_\Phi} z^m\right)$. Ponieważ σ_Φ jest automorfizmem $\mathcal{K}^*$, więc $\mathcal{K}^*[z;\sigma_\Phi,\Delta_\Phi]$ jest pierścieniem Orego, [43].

Dla układów wejście-wyjście badanych w pracy [**H4**] zdefiniowaliśmy nad ciałem $\mathcal{K}^*$ przestrzeń $\mathcal{H} := \operatorname{span}_{\mathcal{K}^*}\{\mathrm{d}y_i^{[j_i]}, \mathrm{d}u_k^{[l]}, i = 1,\ldots,p,\ j_i = 0,\ldots,n_i-1,\ k = 1,\ldots,m,\ l = 0,\ldots,s\}$ oraz jej podprzestrzeń $\mathcal{H}_\infty$

$$\mathcal{H}_\infty := \left\{\omega \in \mathcal{H} :\ \Delta_\Phi^\ell(\omega) \in \mathcal{H}, \ell \geqslant 0\right\}. \tag{5}$$

Zauważmy, że $\mathcal{H}_\infty$ jest największą poprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{H}$ niezmienniczą względem σ_Φ-różniczkowania Δ_Φ. Podprzestrzeń $\mathcal{H}_\infty$ przestrzeni jednoform różniczkowych $\mathcal{E}$ została wykorzystana w dowodzie twierdzenia związanego z warunkami (generycznej) osiągalności rozważanych układów wejście-wyjście.

Jeżeli jednoformy tworzące bazę $\mathcal{H}_\infty$ są liniowo niezależne w każdym punkcie $z \in \mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^{n+m(s+1)}$, wtedy powiemy, że $\mathcal{H}_\infty$ ma *stały rząd*. Załóżmy, że $\mathcal{H}_\infty$ ma *stały rząd* (stały rząd $\mathcal{H}_\infty$ można zawsze otrzymać poprzez ograniczenie się do pewnego otwartego podzbioru $\mathcal{Z}$ zbioru $\mathbb{R}^{n+m(s+1)}$). W pracy [**H4**] pokazaliśmy, że jeżeli tylko $\mathcal{H}_\infty$ ma stały rząd, to jest ona *lokalnie całkowalna* (patrz [**H4**, Proposition 4]), tzn. w pewnym otoczeniu każdego punktu istnieją dokładne jednoformy tworzące bazę przestrzeni $\mathcal{H}_\infty$ po ograniczeniu się do tego otoczenia. W dowodzie lokalnej całkowalności przestrzeni $\mathcal{H}_\infty$, która ma stały rząd wykorzystaliśmy pojęcie i własności przestrzeni dualnej $\mathcal{E}'$ do przestrzeni $\mathcal{E}^*$, tzn. przestrzeni odwzorowań liniowych z $\mathcal{E}^*$ do $\mathcal{K}^*$.

Ponadto w pracy [**H4**] pokazaliśmy, że przestrzeń $\mathcal{E}$ jest jednocześnie lewym modułem nad pierścieniem $\mathcal{K}^*[z;\sigma_\Phi,\Delta_\Phi]$. Wtedy bazując na tym, że każdą jednoformę z $\mathcal{E}$ można zapisać za pomocą wielomianów z pierścienia $\mathcal{K}^*[z;\sigma_\Phi,\Delta_\Phi]$ oraz jednoform $\mathrm{d}y_i$, $i = 1,\ldots,p$, $\mathrm{d}u_k$,

$k = 1, \ldots, m$, otrzymaliśmy następujące zależności[3] między jednomianami z $\mathcal{K}[z;\sigma_\Phi,\Delta_\Phi]$, elementami lewego modułu $\mathcal{E}$ oraz wektorami ze zbioru $\mathrm{d}\mathcal{C} := \{\mathrm{d}\zeta_i, \zeta_i \in \mathcal{C}\}$:

$$z^j \mathrm{d}y_i = \mathrm{d}y_i^{[j]},\ z^l \mathrm{d}u_k = \mathrm{d}u_k^{[l]},$$

dla $i = 1, \ldots, p$, $k = 1, \ldots, m$, $j, l \geqslant 0$. Zauważmy, że po linearyzacji równań (3) związanej z obustronnym zróżniczkowaniem operatorem d funkcji definiujących układ (3) otrzymujemy:

$$P(z)\mathrm{d}y - Q(z)\mathrm{d}u = 0, \tag{6}$$

gdzie $P = (p_{ij})$ i $Q = (q_{ik})$ są odpowiednio $p \times p$ i $p \times m$-wymiarowymi macierzami wielomianowymi, których elementy p_{ij}, q_{ik} należą do pierścienia $\mathcal{K}^*[z;\sigma_\Phi,\Delta_\Phi]$ i

$$p_{ij}(z) = \begin{cases} z^{n_i} - \sum\limits_{s=0}^{n_i-1} \dfrac{\partial \phi_i}{\partial y_i^{[s]}} z^s, & i = j \\ -\sum\limits_{s=0}^{n_{ij}} \dfrac{\partial \phi_i}{\partial y_j^{[s]}} z^s, & i \neq j \end{cases}, \quad q_{ik}(z) = \sum_{l=0}^{s_{ik}} \frac{\partial \phi_i}{\partial u_k^{[l]}} z^l,$$

oraz $\mathrm{d}y = (\mathrm{d}y_1, \ldots, \mathrm{d}y_p)^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{d}u = (\mathrm{d}u_1, \ldots, \mathrm{d}u_m)^{\mathrm{T}}$. Ponieważ funkcje ϕ_i, $i = 1, \ldots, p$, należą do ciała $\mathcal{K}$, więc $p_{ij}, q_{ik} \in \mathcal{K}[z;\sigma_\Phi,\Delta_\Phi]$. Zatem zbiór równań postaci (3) możemy opisać za pomocą elementów lewego modułu $\mathcal{E}$.

Wykorzystując fakt, że $\mathcal{E}$ można traktować zarówno jako lewy moduł nad pierścieniem $\mathcal{K}^*[z;\sigma_\Phi,\Delta_\Phi]$ oraz jako liniową przestrzeń wektorową nad ciałem $\mathcal{K}^*$, pokazaliśmy, że przestrzeń $\mathcal{H}_\infty$ jest podmodułem i podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathcal{E}$, patrz [**H4**, Proposition 6, Theorem 3.1]. Ponadto udowodniliśmy, że (6) jest „minimalną" zależnością liniową zachodzącą dla wektorów ze zbioru $\mathrm{d}\mathcal{C}$, patrz [**H4**, Lemma 3.2]. W przypadku, gdy macierze P i Q nie są względnie pierwsze i mają wspólny lewy dzielnik (będący macierzą nieodwracalną), pokazaliśmy, że generatory $\mathcal{H}_\infty$ można wskazać na podstawie opisu wielomianowego rozważanego układu, patrz [**H4**, Theorem 3.4, Corollary 1].

4.1.5 Osiągalność układów wejście-wyjście

W celu zdefiniowania generycznej osiągalności układów sterowania na jednorodnej skali czasowej podobnie jak w monografii [6] podamy definicję elementów autonomicznych (zmiennych autonomicznych) wprowadzonych przez J. F. Pommaret [44]. W pracy [**H4**] używaliśmy pojęcia osiągalności zamiast „generycznej osiągalności", ale w rzeczywistości badaliśmy osiągalność na zbiorach otwartych i gęstych przestrzeni stanów. W związku z tym, będę używała określenia (generycznej) osiągalności. W przypadku układów z wieloma wejściami i wieloma wyjściami definicja elementów autonomicznych została zmodyfikowana, aby zagwarantować pewną niezależność równań opisujących zależności między elementami autonomicznymi. Konieczność modyfikacji definicji została zilustrowana na przykładzie, patrz [**H4**, Example 4.3]. W związku z tym w pracy [**H4**] podaliśmy następującą definicję układu elementów autonomicznych:

[3] We wcześniejszych naszych pracach, między innymi w pracy [A32] oraz artykułach konferencyjnych [C15, C20], zależności te były przyjmowane za definicje.

Definicja 4.1 (Definition 4.1. w [**H4**]). *Niech $\psi_1, \ldots, \psi_k$, $1 \leqslant k \leqslant p$, będą funkcjami z ciała $\mathcal{K}$ ograniczonymi do pewnych otwartych podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^N$, gdzie N jest liczbą zmiennych, od których zależą funkcje $\psi_1, \ldots, \psi_k$, $\psi_i^{[\ell]} := \Delta_\Phi^\ell(\psi_i)$ dla $\ell \geqslant 1$, oraz niech różniczki $\mathrm{d}\psi_1, \ldots, \mathrm{d}\psi_k$ będą liniowo niezależne nad ciałem $\mathcal{K}^*$. Wtedy funkcje $\psi := (\psi_1, \ldots, \psi_k)$ nazywamy* układem elementów autonomicznych *układu Σ postaci (3) jeżeli istnieją liczba całkowita $\varsigma \geqslant 1$ oraz niezerowa funkcja $F = (F_1, \ldots, F_k)$ analityczna (na otwartym podzbiorze zbioru $\mathbb{R}^\eta$, gdzie $\eta \leqslant (\varsigma + 1)k$), taka że $F\left(\psi, \psi^{[1]}, \ldots, \psi^{[\varsigma]}\right) = 0$ oraz $\operatorname{rank}_{\mathcal{K}^*} \frac{\partial F}{\partial(\psi_1^{[\varsigma_1]}, \ldots, \psi_k^{[\varsigma_k]})} = k$, gdzie funkcja F_i zależy od $\left(\psi_1, \ldots, \psi_1^{[\varsigma_{i1}]}, \ldots, \psi_k, \ldots, \psi_k^{[\varsigma_{ik}]}\right)$, $i = 1, \ldots, k$, $\varsigma_j := \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \varsigma_{ij}$ i $\varsigma := \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \varsigma_j$.*

Używając pojęcia układu elementów autonomicznych możemy zdefiniować (generyczną) osiągalność nieliniowego układu (3).

Definicja 4.2 (Definition 4.2. w [**H4**]). *Układ sterowania postaci (3) nazywamy (*generycznie*)* osiągalnym *jeżeli nie posiada on układu elementów autonomicznych z ciała $\mathcal{K}$. W przeciwnym przypadku układ (3) nazywamy* nieosiągalnym.

Głównym wynikiem pracy [**H4**] jest sformułowanie i udowodnienie warunku koniecznego i wystarczającego (generycznej) osiągalności rozważanych układów wejście-wyjście. Poniższe twierdzenie zawarte w pracy [**H4**] podaje ten warunek:

Twierdzenie 4.3 (Theorem 4.5 w [**H4**]). *Układ sterowania (3) jest (generycznie) osiągalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierze P i Q (podane w (6), związane z układem (3)) są względnie lewo pierwsze.*

Dodatkowo, z dowodu Twierdzenia 4.3 oraz wyników prezentowanych w pracy [**H4**] (patrz [**H4**, Proposition 6, Theorem 3.1, Theorem 3.4, Corollaries 1 and 2]) wynika, że (generyczną) osiągalność można scharakteryzować za pomocą $\mathcal{H}_\infty$, mianowicie

Wniosek 4.1. *Układ sterowania (3) jest (generycznie) osiągalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{H}_\infty = \{0\}$.*

Twierdzenie 4.3 jest rozszerzeniem wyników pracy [A32] na układy z wieloma wejściami i wieloma wyjściami. W pracach [A31] i [A32] własność (generycznej) osiągalności układów z jednym wejściem i jednym wyjściem nazywana jest *nieredukowalnością* układu. Analogicznie Wniosek 4.1 został udowodniony dla układów z jednym wejściem i jednym wyjściem, ale zamiast osiągalności używaliśmy pojęcia nieredukowalności, patrz [A31, Theorem 3.2].

Z problemem osiągalności (nieredukowalności) układów związana jest ich równoważność. W przypadku układów z jednym wejściem i jednym wyjściem ich równoważność można zdefiniować bazując na nierozkładalnej formie różniczkowej związanej z układami równoważnymi, patrz np. [A32]. Definicja układów równoważnych zaproponowana w [A32] nie może jednak być zastosowana do układów z wieloma wejściami i wieloma wyjściami, ale w tym przypadku tę własność można zdefiniować uogólniając pojęcie równoważności w sensie transmitancji znanej z teorii układów liniowych, co zostało zrobione w pracy [**H4**]. Dodatkowo w pracy [**H4**] podaliśmy algorytm sprawdzający (generyczną) osiągalność oraz znajdujący podukład (generycznie) osiągalny w przypadku układów nieosiągalnych. Wyniki otrzymane w [**H4**] zostały zilustrowane przykładami.

4.1.6 Osiągalność układów w przestrzeni stanów

Zauważmy, że osiągalność jest pewnym rodzajem sterowalności i jest jedną z podstawowych własności układów sterowania, którą można algebraicznie scharakteryzować za pomocą zdefiniowanego poniżej pojęcia elementu autonomicznego (zmiennej autonomicznej) [44]. Ponieważ nieredukowalne realizowalne układy wejście-wyjście posiadają osiągalną realizację (patrz np. [6,45,A31]), więc biorąc pod uwagę to, że nie wszystkie równania wejście-wyjście są realizowalne w przestrzeni stanów postanowiliśmy w pracach [**H3**,**H4**] użyć pojęcia osiągalności, które będzie charakteryzowało zarówno układy opisane przez równania wejście-wyjście, jak również układy zdefiniowane przez równania w przestrzeni stanów. Biorąc pod uwagę to, że definicja osiągalności bazująca na elementach autonomicznych nie jest związana z opisem układu, ale można ją zastosować zarówno do układów wejście-wyjście jak również do układów zdefiniowanych w przestrzeni stanów, w pracy [**H3**] podaliśmy następującą definicję elementu autonomicznego dla układu (1a):

Definicja 4.4 (Definition 9 w [**H3**]). *Niestałą funkcję $\varphi \in \mathscr{K}$, która jest ograniczona do otwartego zbioru, nazywamy* elementem autonomicznym *dla układu sterowania postaci (1a) jeżeli istnieje liczba naturalna $\kappa \geqslant 1$ i niestała analityczna (na pewnym otwartym podzbiorze zbioru $\mathbb{R}^\eta$, gdzie $\eta \leqslant \kappa + 1$) funkcja F, taka że $F\Big(\varphi, \Delta_f(\varphi), \ldots, \Delta_f^\kappa(\varphi)\Big) = 0$ oraz $\frac{\partial F}{\partial \Delta_f^\kappa(\varphi)} \not\equiv 0$.*

Następnie podobnie jak w przypadku układów wejście-wyjście układ sterowania postaci (1a) nazywamy *generycznie osiągalnym* jeżeli nie posiada on żadnego elementu autonomicznego, patrz [**H3**, Definition 10]. Zauważmy, że generyczna osiągalność jest równoważna temu, że zbiór stanów osiągalnych[4] z każdego punktu ma niepuste wnętrze, patrz [6] w przypadku układów z czasem ciągłym oraz [8, 10] w przypadku układów z czasem dyskretnym.

Głównym wynikiem pracy [**H3**] było podanie warunków generycznej osiągalności układów w przestrzeni stanów. W tym celu zdefiniowane zostały następujące podprzestrzenie

$$\mathscr{H}_0 := \mathrm{span}_{\mathscr{K}^*}\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}u\}\,,\ \mathscr{H}_{k+1} := \{\omega \in \mathscr{H}_k :\ \Delta_f(\omega) \in \mathscr{H}_k\},\quad k \geqslant 0, \tag{7}$$

w przestrzeni jednoform różniczkowych $\mathscr{E}$ nad otrzymanym ciałem różniczkowym funkcji meromorficznych $\mathscr{K}^*$ oraz dystrybucje, które anihilują te podprzestrzenie. Własności podprzestrzeni $\mathscr{H}_k$, $k \geqslant 0$, przestrzeni $\mathscr{E}$ zostały zbadane miedzy innymi w [**H5**]. Na przykład pokazaliśmy, że istnieje liczba naturalna $0 < k^* \leqslant n$, taka że dla $0 \leqslant k \leqslant k^*$, $\mathscr{H}_{k+1} \subsetneq \mathscr{H}_k$ i $\mathscr{H}_{k^*+1} = \mathscr{H}_\ell$, $\ell > k^*$, patrz [**H5**, Proposition 3]. Korzystając z tego faktu zdefiniowaliśmy następującą przestrzeń $\mathscr{H}_\infty := \mathscr{H}_{k^*+1}$, którą można wyznaczyć następująco:

$$\mathscr{H}_\infty = \{\omega \in \mathscr{H}_1 :\ \Delta_f^\ell(\omega) \in \mathcal{H}_1, \ell \geqslant 0\}\,, \tag{8}$$

gdzie Δ_f^k jest k-krotnym złożeniem operatora Δ_f. Z konstrukcji $\mathscr{H}_\infty$ wynika, że jest ona największą podprzestrzenią przestrzeni $\mathscr{H}_1$, która jest niezmiennicza względem σ_f-różniczkowania Δ_f, patrz [**H5**, Proposition 4].

Zauważmy, że przestrzenie $\mathscr{H}_k$, $k \geqslant 0$, nie są kodystrybucjami w sensie znanej z geometrii różniczkowej definicji kodystrybucji. Aby skojarzyć $\mathscr{H}_k$ z kodystrybucją na $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$,

[4] *Zbiorem stanów osiągalnych z punktu* $x_0 \in \mathcal{X}$ nazywamy zbiór wszystkich punktów, do których można dotrzeć w skończonym czasie z punktu x_0.

punktowi $p \in \mathcal{S}$ przyporządkowujemy podprzestrzeń liniową $H_p := \mathscr{H}_k(p) \subset T_p^*\mathbb{R}^M$ (gdzie $M \in \mathbb{N}$) rozpiętą przez $\omega(p)$, gdzie jednoforma $\omega \in \mathscr{H}_k$ jest dobrze określona w p. Wtedy odwzorowanie $H : \mathcal{S} \ni p \mapsto H_p$ jest kodystrybucją na $\mathcal{S}$. Zauważmy, że zbiór $\mathcal{S}$ jest podzbiorem zbioru $\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^{(\iota+\kappa)m}$, na którym jednoformy generujące przestrzeń $\mathscr{H}_k$, $k = 2, \ldots, k^* + 1$, nad ciałem $\mathcal{K}^*$ są dobrze określone i są liniowo niezależne w każdym punkcie, gdzie ι i κ są pewnymi liczbami naturalnymi. Jeżeli jednoformy, które tworzą bazę przestrzeni $\mathscr{H}_k$, $k \geqslant 0$, są niezależne w każdym punkcie $(x, u, u^{[1]}, \ldots, u^{[\iota]}, z^{\{-1\}}, \ldots, z^{\{-\kappa\}}) \in \mathcal{S}$, wtedy mówimy, że $\mathscr{H}_k$ ma *stały rząd*, tzn. $\mathscr{H}_k$ definiuje kodystrybucję stałego wymiaru na zbiorze $\mathcal{S}$. Zauważmy, że redukując zbiór $\mathcal{S}$ zawsze możemy otrzymać stały rząd $\mathscr{H}_k$. Przez redukcję zbioru rozumiemy usunięcie z $\mathbb{R}^N$ wszystkich punktów, w których jednoformy nie są określone lub są liniowo zależne. Korzystając z faktu, że $\mathscr{H}_\infty$ jest *lokalnie całkowalna*, tzn. kodystrybucja związana z $\mathscr{H}_k$ jest lokalnie całkowalna, w pracy [**H3**] udowodniliśmy, że jeżeli tylko $\mathscr{H}_\infty$ ma stały rząd, to warunek $\mathscr{H}_\infty \neq \{0\}$ jest równoważny temu, że dla każdego $x \in \mathcal{X}$ istnieje otoczenie V punktu x oraz niestała funkcja $\varphi : V \to \mathbb{R}$, taka że $\mathrm{d}\varphi \in \mathscr{H}_\infty$, patrz [**H3**, Proposition 4].

Jednym z wyników pracy [**H3**] jest konstrukcja dystrybucji anihilujących $\mathscr{H}_k$. Niech $\mathscr{E}'$ będzie przestrzenią dualną do $\mathscr{E}$, tzn. przestrzenią odwzorowań liniowych z $\mathscr{E}$ do $\mathscr{K}^*$. Elementy $\mathscr{E}'$ nazywamy polami wektorowymi i mają one postać

$$X = \sum_{\ell \geqslant 1} \sum_{s=1}^{m} X_{z_s^{\{-\ell\}}} \frac{\partial}{\partial z_s^{\{-\ell\}}} + \sum_{i=1}^{n} X_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k \geqslant 0} \sum_{j=1}^{m} X_{u_j^{[k]}} \frac{\partial}{\partial u_j^{[k]}} \,, \tag{9}$$

gdzie $X_{z_s^{\{-\ell\}}}, X_{x_i}, X_{u_j^{[k]}} \in \mathscr{K}^*$. W pracy [**H3**] zdefiniowaliśmy operatory Δ_f i ∇_f w przestrzeni $\mathscr{E}'$ i podaliśmy ich własności. Podobnie jak w przypadku przestrzeni jednoform $\mathscr{E}$ operatory Δ_f i ∇_f w przestrzeni dualnej $\mathscr{E}'$ spełniają uogólnioną regułę Leibniza, patrz [A12, A32].

Oznaczmy przez $\mathbf{X}$ podprzestrzeń przestrzeni $\mathscr{E}'$ rozpiętą nad ciałem $\mathcal{K}^*$ przez $\partial/\partial x_i$, przez $\mathbf{U}$ podprzestrzeń zawierającą pola wektorowe X postaci (9) dla których $X_{x_i} = 0$ oraz $X_{z_s^{\{-\ell\}}} = 0$, zaś przez $\mathbf{Z}$ podprzestrzeń zawierającą pola wektorowe X postaci (9) dla których $X_{x_i} = 0$ oraz $X_{u_j^{[k]}} = 0$. Wtedy $\mathcal{E}' = \mathbf{X} \oplus \mathbf{U} \oplus \mathbf{Z}$. *Rzutem pola wektorowego* (9) na $\mathbf{X}$, oznaczanym przez X^π, jest pole wektorowe $X^\pi = \sum_{i=1}^n X_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$. Zdefiniujmy następujący ciąg niemalejących dystrybucji $\mathcal{D}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{D}_{\tilde{k}-1} \subseteq \mathcal{D}_{\tilde{k}} = \mathcal{D}_{\tilde{k}+1} =: \mathcal{D}_\infty \subseteq \mathbf{X}$, gdzie

$$\mathcal{D}_k := \mathrm{span}_{\mathcal{K}^*} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^{\nabla_f^l \pi}, l = 1, \ldots, k \right\} . \tag{10}$$

Do głównych wyników pracy [**H3**] należą następujące fakty, które umożliwiają badanie generycznej osiągalności układów w przestrzeni stanów:

Twierdzenie 4.5 (Theorem 13 w [**H3**]). *Układ postaci* (1a) *jest generycznie osiągalny wtedy i tylko wtedy gdy* $\mathcal{H}_\infty = \{0\}$.

Wniosek 4.2 (Corollary 14 w [**H3**]). *Układ postaci* (1a) *jest generycznie osiągalny wtedy i tylko wtedy gdy* $\dim \mathcal{D}_\infty = n$.

Wniosek 4.3 (Corollary 15 w [**H3**]). *Jeżeli układ postaci* (1a) *nie jest generycznie osiągalny, to wtedy jednoforma* $\mathrm{d}\varphi$ *odpowiadająca elementowi autonomicznemu* φ *jest niezmiennicza względem wszystkich pól wektorowych* $(\partial/\partial u)^{\nabla_f^l \pi}$, $l \geqslant 0$, *tzn.* $\left\langle \mathrm{d}\varphi, (\partial/\partial u)^{\nabla_f^l \pi} \right\rangle \equiv 0$.

Zatem w pracy [**H3**] podane zostały warunki na generyczną osiągalność nieliniowych układów sterowania określonych w przestrzeni stanów. Pokazaliśmy, że rozważane podprzestrzenie w przestrzeni jednoform różniczkowych można traktować jako kodystrybucje na pewnych zbiorach, wówczas w przestrzeni dualnej można rozważać dystrybucje. Pozwoliło to na sformułowanie warunków generycznej osiągalności zarówno w języku jednoform różniczkowych jak również w języku pól wektorowych. Zauważmy, że wyniki prezentowane w [**H3**] są rozszerzeniem faktów prezentowanych w monografii [6, Theorem 3.17] na układy określone na jednorodnych skalach czasowych. Ponieważ delta-pochodna dla układów z czasem ciągłym odpowiada pochodnej po czasie, więc wcześniejsze fakty podane w [6] wynikają z naszych wyników, gdyż czas ciągły jest szczególnym przypadkiem jednorodnej skali czasowej. W przypadku modeli dyskretnych prezentowany przez nas formalizm opiera się na operatorze różnicy, a nie na operatorze przesunięcia, więc dla układów z czasem dyskretnym prezentowane wyniki są nowe i nie pokrywają się z faktami zawartymi w pracy [10].

Reasumując, w pracy [**H3**] podaliśmy dwa alternatywne warunki konieczne i wystarczające generycznej osiągalności układu. Warunek, sformułowany w postaci delta-pochodnych jednoform, prowadzi do prostych obliczeń, ale nie pomaga on w znalezieniu punktów, w których układ nie jest osiągalny. Drugi warunek wykorzystujący nabla-pochodne pól wektorowych jest trudniejszy rachunkowo, ale pozwala on wskazać punkty osobliwe, w których układ nie posiada własności osiągalności. Znalezienie takich punktów jest ważne, ponieważ oba warunki sprawdzają tylko generyczną osiągalność, która zachodzi prawie wszędzie, z wyjątkiem niektórych punktów osobliwych, więc pojawia się pytanie jak wygląda zbiór otwarty i gęsty na którym zachodzi własność osiągalności. Wyniki otrzymane w pracy [**H3**] zostały zilustrowane na przykładzie.

4.1.7 Linearyzowalność poprzez sprzężenie zwrotne od stanu

Innym problemem pojawiającym się w matematycznej teorii sterowania jest linearyzacja układów sterowania w przestrzeni stanów poprzez statyczne oraz dynamiczne sprzężenia zwrotne. W pracy [**H5**] pokazaliśmy, że zamiana współrzędnych przestrzeni stanów w prezentowanym formalizmie algebraicznym (rozdział 4.1.4) prowadzi do inwersyjnego domknięcia, które jest izomorficzne z inwersyjnym domknięciem $\mathscr{K}^*$ związanym z oryginalnymi współrzędnymi stanu układu. Ponadto podaliśmy postać baz podprzestrzeni $\mathscr{H}_k$, $k \geqslant 0$, patrz [**H5**, Theorem 1] oraz omówiliśmy ich własności (patrz np. [**H5**, Corollary 2,Proposition 8]), które zostały wykorzystane do zbadania problemu linearyzowalności poprzez sprzężenie zwrotne od stanu badanych układów. W pracy [**H5**] podany został algorytm wyznaczania baz podprzestrzeni $\mathscr{H}_k$, $k \geqslant 2$.

W pracach [**H5**] oraz [**H1**] ciąg podprzestrzeni $(\mathscr{H}_k)_{k\geqslant 0}$ spełnia następujące założenie:

Założenie 3. *Załóżmy, że* $\mathscr{H}_\infty = \{0\}$ *oraz dla każdego* $(x, u, u^{[1]}, \dots, u^{[\iota]}, z^{\{-1\}}, \dots, z^{\{-\kappa\}}) \in \mathcal{S}$ *jednoformy* $\Delta_f^j(\omega_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k^*$, $0 \leqslant j \leqslant r_i{-}1$ *w punkcie* $(x, u, u^{[1]}, \dots, u^{[\iota]}, z^{\{-1\}}, \dots, z^{\{-\kappa\}})$ *są liniowo niezależne nad* $\mathbb{R}$.

Zauważmy, że przy Założeniu 3 wszystkie przestrzenie $\mathscr{H}_k$, $k \geqslant 2$, definiują kodystrybucje stałego wymiaru na $\mathcal{S}$ (w sensie podanym na stronie 15 autoreferatu). W pracy [**H5**] zbadany został problem linearyzowalności układów sterowania określonych na jednorodnych skalach czasowych poprzez statyczne sprzężenia zwrotne zależne od stanu. Wprowadziliśmy następujące definicje:

Definicja 4.6 (Definition 3 w [**H5**]). *Układ* Σ *postaci* (1a) *nazywamy* linearyzowalnym *poprzez statyczne sprzężenie zwrotne zależne od stanu jeżeli istnieje analityczny dyfeomorfizm* $\mathcal{X} \ni x \mapsto \hat{x} = \xi(x) \in \widehat{\mathcal{X}}$ *postaci i statyczne sprzężenie zwrotne od stanu* $\mathcal{X} \times \mathcal{V} \ni (x, v) \mapsto u = \phi(x, v) \in \mathcal{U}$*, takie że* $\vartheta : (\mathcal{X}, \mathcal{V}) \ni (x, v) \mapsto (x, \phi(x, v)) \in (\mathcal{X}, \mathcal{U})$ *jest analitycznym dyfeomorfizmem i w nowych współrzędnych mamy*

$$\hat{x}^{\Delta}(t) = A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot v(t)\,, \tag{11}$$

gdzie para (A, B) *jest sterowalna, tzn.* $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$.

Zmienne $(\hat{x}, v)$ układu (11) należą do pewnego otwartego podzbioru zbioru $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Definicja 4.7 (Definition 4 w [**H5**]). *Układ* Σ *postaci* (1a) *nazywamy* generycznie lokalnie linearyzowalnym *przez statyczne sprzężenie zwrotne zależne od stanu, jeżeli istnieje otwarty i gęsty podzbiór* T *zbioru* $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$*, taki że dla każdego* $(\bar{x}, \bar{u}) \in T$ *istnieje otoczenie* V *punktu* $(\bar{x}, \bar{u})$ *zawarte w* $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$*, takie że układ* Σ *ograniczony do* V *jest linearyzowalny poprzez statyczne sprzężenie zwrotne zależne od stanu.*

W pracy [**H5**] sformułowaliśmy i udowodniliśmy następujący warunek konieczny generycznej lokalnej linearyzowalności:

Stwierdzenie 4.1 (Proposition 9 w [**H5**]). *Jeżeli układ* (1a) *jest generycznie lokalnie linearyzowalny poprzez regularne statyczne sprzężenie zwrotne zależne od stanu, to wtedy* $\mathscr{H}_\infty = \{0\}$.

Zauważmy, że warunek $\mathscr{H}_\infty = \{0\}$ jest równoważny temu, że układ (1a) posiada własność generycznej osiągalności, patrz Twierdzenie 4.5 (w [**H3**, Theorem 13]).

Głównym wynikiem pracy [**H5**] jest podanie warunku koniecznego i wystarczającego generycznej lokalnej linearyzacji poprzez statyczne sprzężenie zwrotne zależne od stanu układów opisanych przez delta-różniczkowe równania określone na skalach jednorodnych. Warunek ten podaliśmy w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 4.8 (Theorem 2 w [**H5**]). *Załóżmy, że zachodzi Założenie 3. Wtedy układ* (1a) *jest generycznie lokalnie linearyzowalny przez poprzez statyczne sprzężenie zwrotne od stanu wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzenie* $\mathscr{H}_k$*,* $1 \leqslant k \leqslant k^*$*, są lokalnie całkowalne.*

Zauważmy , że dla układów z czasem ciągłym Twierdzenie 4.8 odpowiada Twierdzeniu 9.1 (Theorem 9.1) w [49], które charakteryzuje własność generycznej lokalnej linearyzowalności w języku jednoform różniczkowych i jest ono równoważne charakteryzacji podanej w artykułach [15,16] opartych na dystrybucjach i polach wektorowych związanych z układem. Dla układów z czasem dyskretnym Twierdzenie 4.8 daje nowy warunek na generyczną lokalną linearyzowalność, w którym użyto operatora różnicy zamiast przesunięcia [10].

W przypadku układów sterowania określonych na jednorodnych skalach czasowych, które nie są generycznie lokalnie linearyzowalne poprzez statyczne sprzężenie zwrotne zależne od stanu w pracy [**H1**] podaliśmy warunki linearyzowalności poprzez dynamiczne sprzężenie zwrotne od stanu. Linearyzacja układu poprzez dynamiczne sprzężenie zwrotne zależne od stanu umożliwia pokazanie zależności między linearyzującymi jednoformami i wyjściami. Zależności te zostały podane we wcześniejszym artykule konferencyjnym [C12], ale bez omówienia warunków odwracalności układów, co dawało niekompletność otrzymanych wyników. Ponieważ warunki odwracalności konieczne do rozwiązania problemu dynamicznej linearyzowalności nie były dotychczas badane dla układów określonych na jednorodnych skalach czasowych, więc w pracy [**H1**] podane zostały warunki konieczne i wystarczające odwracalności układów zadanych w przestrzeni stanów, patrz [**H1**, Theorem 2], [**H1**, Theorem 3] oraz [**H1**, Remark 3].

Badaną w pracy [**H1**] linearyzowalność poprzez dynamiczne sprzężenie zwrotne zależne od stanu definiujemy następująco:

Definicja 4.9 (Definition 6 w [**H1**]). *Układ* (1a) *nazywamy* linearyzowalnym poprzez dynamiczne sprzężenie zwrotne zależne od stanu *jeśli istnieje odwracalny dynamiczny kompensator postaci*

$$\eta^{\Delta} = \zeta(x,\eta,v) \tag{12a}$$

$$u = \psi(x,\eta,v) \tag{12b}$$

z $\eta \in \mathbb{R}^s$*, oraz przekształcenie* $\xi = \phi(x,\eta)$*, takie że w nowych współrzędnych skompensowany układ* (1a), (12) *ma postać* $\xi^{\Delta} = A\xi + Bv$*, gdzie* $\xi \in \mathbb{R}^{n+s}$ *oraz para* (A,B) *jest sterowalna.*

Dla układów z czasem ciągłym wiadomo, że warunkiem wystarczającym linearyzowalności poprzez dynamiczne sprzężenie zwrotne zależne od stanu jest: *i*) prawa odwracalność układu, oraz *ii*) brak dynamiki zerowej, [4, 20].

Definicja 4.10 (Definition 7 w [**H1**]). *Niech* $h^{[k]} := \Delta_f^k(h)$*,* $k \geqslant 0$. Linearyzującym wyjściem *nazywamy funkcję wyjścia* $y = \varphi\left(x, u, u^{[1]}, \dots, u^{[\nu-1]}\right)$*, która spełnia następujące własności:*

(*i*) *układ* (1a) *z wyjściem* $y = \varphi\left(x, u, u^{[1]}, \dots, u^{[\nu-1]}\right)$ *jest prawoodwracalny, tzn. dla każdego* $k \geqslant 0$ *obraz odwzorowania* $H_k := (\varphi, \Delta_f(\varphi), \dots \Delta_f^k(\varphi))$ *ma niepuste wnętrze, patrz [**H1**, Definition 1];*

(*ii*) $\dim_{\mathscr{K}^*}(\operatorname{span}_{\mathscr{K}^*}\{\mathrm{d}x_\ell, \ell = 1, \dots, n\} \cap \bigcup_{k\geqslant 0} \operatorname{span}_{\mathscr{K}^*}\{\mathrm{d}h_j^{[0]}, \dots, \mathrm{d}h_j^{[k]},\ j = 1, \dots, p\}) = n.$

Pomysł linearyzującego wyjścia pochodzi z pracy [50]. Definicja 4.10 jest bardziej ogólna i jest ona rozszerzeniem analogicznej definicji dla układu (1). Linearyzujące wyjście można traktować jako zbiór różniczkowo niezależnych funkcji $\varphi_i(x, u, u^{[1]}, \dots)$, $i = 1, \dots, m$, takich że zmienne x i u, mogą być wyrażone jako funkcje zależne od φ_i, $i = 1, \dots, m$, i skończonej liczby ich delta-pochodnych. Dodatkowo, prawa odwracalność gwarantuje, że składowe φ_i wyjścia są różniczkowo niezależne w tym sensie, że nie spełniają one żadnego równania delta-różniczkowego niezależnego od u.

Do sformułowania warunku koniecznego i wystarczającego linearyzwalności układu poprzez dynamiczne sprzężenie zwrotne zależne od stanu w pracy [**H1**] użyliśmy języka jednoform różniczkowych oraz nieprzemiennych wielomianów różniczkowych nad σ_f-różniczkowym ciałem $\mathscr{K}^*$. Podobnie jak dla układów wejście-wyjście zauważmy, że σ_f-różniczkowe ciało $\mathscr{K}^*$ z operatorami σ_f oraz Δ_f indukuje nieprzemienny pierścień lewych wielomianów różniczkowych oznaczany przez $\mathscr{K}^*[z;\sigma_f,\Delta_f]$ ze zwykłym dodawaniem oraz mnożeniem spełniającym warunek: $z\alpha := \sigma_f(\alpha)z + \Delta_f(\alpha)$, dla każdej funkcji $\alpha \in \mathscr{K}^* \subset \mathscr{K}^*[z;\sigma_f,\Delta_f]$.

Niech $\mathscr{K}^*[z;\sigma_f,\Delta_f]^{q\times q}$ oznacza zbiór kwadratowych macierzy wielomianowych stopnia q z wyrazami z pierścienia $\mathscr{K}^*[z;\sigma_f,\Delta_f]$. Macierz $U(z) \in \mathscr{K}^*[z;\sigma_f,\Delta_f]^{q\times q}$ nazywamy *unimodularną* jeżeli posiada ona macierz odwrotną $U^{-1}(z) \in \mathscr{K}^*[z;\sigma_f,\Delta_f]^{q\times q}$. Niech $q \geqslant 1$ i $\mathscr{E}^q$ oznacza $\mathscr{K}^*$-przestrzeń wektorową rozpiętą przez q-tkę jednoform z $\mathscr{E}$. Każda macierz $U(z) \in \mathscr{K}^*[z;\sigma_f,\Delta_f]^{q\times q}$ definiuje delta-różniczkowy operator w $\mathscr{E}^q$ w następujący sposób:

$$U(z)\Omega = \sum_i U_i \Delta_f^i(\Omega)$$

dla wszystkich $\Omega = [\omega_1,\ldots,\omega_q]^\mathsf{T} \in \mathscr{E}^q$, gdzie $\Delta_f^i(\Omega) = [\Delta_f^i(\omega_1),\ldots,\Delta_f^i(\omega_q)]^\mathsf{T} \in \mathscr{E}^q$ i $U(z) := \sum_i U_i z^i \in \mathscr{K}^*[z;\sigma_f,\Delta_f]^{q\times q}$.

Niech $\Omega := [\omega_1,\ldots,\omega_m]^\mathsf{T} \in \mathscr{E}^m$ będzie *układem jednoform linearyzujących*, tzn. układem jednoform, takich że $\omega_1,\ldots,\omega_m \in \mathscr{H}_1$ oraz istnieją liczby naturalne $r_1,\ldots,r_m$ dla których jednoformy $\Delta_f^j(\omega_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $0 \leqslant j \leqslant r_i - k$, tworzą bazę przestrzeni $\mathscr{H}_k$, $k \geqslant 0$. W przypadku, gdy Ω składa się z jednoform dokładnych ($\omega_i = \mathrm{d}\varphi_i$, tzn. $\Omega = \mathrm{d}\varphi$), te własności pokrywają się z warunkami w Definicji 4.10.

W pracy [**H1**] podaliśmy zależność między linearyzującymi wyjściami (o ile istnieją), a układem linearyzujących jednoform skonstruowanych w [**H5**, Theorem 1] dla dowolnego układu generycznie osiągalnego, tzn. układu spełniającego warunek $\mathscr{H}_\infty = \{0\}$.

Twierdzenie 4.11 (Theorem 6 w [**H1**])**.** *Załóżmy, że* $\mathscr{H}_\infty = \{0\}$*, oraz niech* Ω *będzie układem linearyzujących jednoform dla układu* (1a)*. Wtedy istnienie układu linearyzujących wyjść jest równoważne istnieniu unimodularnej macierzy wielomianowej* $U(z) \in \mathscr{K}^*[z;\sigma_f,\Delta_f]^{m\times m}$*, takiej że* $\mathrm{d}(U(z)\Omega) = 0$.

Ponadto w [**H1**] pokazaliśmy następującą równoważność:

Wniosek 4.4 (Corollary 3 w [**H1**])**.** *Niech* (1a) *będzie układem z jednym wejściem i załóżmy, że* $\mathscr{H}_\infty = \{0\}$*. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) układ (1a) *jest linearyzowalny poprzez statyczne sprzężenie zwrotne;*

(ii) układ (1a) *jest linearyzowalny poprzez dynamiczne sprzężenie zwrotne;*

(iii) $\mathrm{d}\omega_1 \wedge \omega_1 = 0$*, gdzie* ω_1 *jest taka że* $\mathscr{H}_n = \mathrm{span}_{\mathcal{K}^*}\{\omega_1\}$.

Wyniki dotyczące linearyzowalności układów poprzez sprzężenia zwrotne zależne od stanów otrzymane w pracach [**H1**,**H5**] zostały zilustrowane na przykładach prezentowanych w tych pracach.

Podane warunki algebraiczne prezentowane w pracach [**H1**,**H3**,**H4**,**H5**] pozwalają na badanie tzw. generycznej osiągalności lub generycznej lokalnej linearyzowalności układów, co oznacza, że własności te zachodzą na zbiorach otwartych i gęstych. Wówczas pojawia się pytanie co się dzieje w punktach, które nie należą do tych zbiorów. Punkty te nazywamy punktami osobliwymi. Charakteryzują się one tym, że wymiary (ko)dystrybucji w tych punktach różnią się od wymiarów w punktach z ich otoczeń.

4.1.8 Silna osiągalność nieliniowych układów sterowania z czasem ciągłym

Zauważmy, że warunek $\mathcal{H}_\infty = \{0\}$ w przypadku układów wejście-wyjście ($\mathscr{H}_\infty = \{0\}$ w przypadku układów w przestrzeni stanów) jest równoważny generycznej osiągalności układów na skalach czasowych. Niestety z warunku tego nie możemy podać punktów, dla których zachodzi własność osiągalności, ale wiemy, że układ posiada własność osiągalności na pewnym zbiorze otwartym i gęstym. W przypadku, gdy układ nie jest generycznie osiągalny podprzestrzenie $\mathcal{H}_\infty$ oraz $\mathscr{H}_\infty$ pozwalają na wyznaczenie (układu) elementów autonomicznych związanych z rozważanym układem sterowania, patrz na przykład [6] w przypadku układów z czasem ciągłym oraz [10] dla układów z czasem dyskretnym. Z [**H3**] wiemy, że podprzestrzenie $\mathscr{H}_k$, $k \geqslant 1$, przestrzeni jednoform różniczkowych umożliwiają zbadanie generycznej osiągalności, a zbiór na którym układ jest osiągalny nie zawsze można podać z obliczeń wykonywanych przy wyznaczaniu baz podprzestrzeni $\mathscr{H}_k$, $k \geqslant 1$. Wtedy do wyznaczenia punktów, z których układ jest osiągalny można użyć nabla-pochodnych pól wektorowych, które są związane z dystrybucjami anihilującymi przestrzenie $\mathscr{H}_k$, $k \geqslant 1$. Wówczas pojawiło się pytanie o zbadanie osiągalności układu w każdym punkcie przestrzeni stanów.

W pracy [**H2**] podałam formalizm algebraiczny (bazujący na języku ideałów i modułów w pierścieniu kiełków funkcji analitycznych) umożliwiający badanie silnej osiągalności nieliniowych układów sterowania z czasem ciągłym w punkcie z przestrzeni stanów. Skupiłam się na zbadaniu własności silnej osiągalności w punkcie przestrzeni stanów, gdyż ta własność jest uogólnieniem sterowalności liniowych układów sterowania. Ponieważ w pracy [**H2**] badałam lokalne zachowanie układów sterowania, więc postanowiłam użyć pojęcia kiełków, które wydają się być naturalnym językiem opisującym lokalne własności układów.

Rozpatrzmy nieliniowy układ Σ zdefiniowany przez zbiór równań różniczkowych pierwszego rzędu postaci:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))\,, \tag{13}$$

gdzie zmienna niezależna $t \in \mathbb{R}$ oznacza czas, $x(t) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ jest stanem układu (13) i załóżmy, że $\mathcal{X}$ jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ jest sterowaniem (wejściem) zastosowanym do układu (13), $u : \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ oraz $f := (f_1, \ldots, f_n)^{\mathrm{T}} : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ są funkcjami analitycznymi.

Funkcja f pochodząca z układu (13) definiuje następującą rodzinę pól wektorowych $f_u := f(\cdot, u) \in V(\mathcal{X})$ sparametryzowanych przez $u \in \mathcal{U}$: $\mathcal{F} := \{f_u : \ u \in \mathcal{U}\}$. Zauważmy, że we współrzędnych pole wektorowe f_u można interpretować jako następującą pochodną: $f_u = (f_u)_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (f_u)_n \frac{\partial}{\partial x_n}$, gdzie $(f_u)_i = f_i(\cdot, u)$, $i = 1, \ldots, n$.

Przypomnijmy definicje i fakty związane z własnością silnej osiągalności, które można znaleźć na przykład w [3]. *Zbiór osiągalny* $\mathcal{R}(x_0, t)$ *z punktu* x_0 *w czasie* t jest z definicji zbiorem stanów postaci: $\{\gamma(t, 0, x_0, u) : \ t \geqslant 0, \ u \text{ jest sterowaniem dopuszczalnym}\}$, gdzie $\gamma(t, 0, x_0, u)$ oznacza wartość $x(t)$ w czasie t rozwiązania układu (13) z warunkiem początkowym x_0 w czasie 0 odpowiadającego sterowaniu $u = u(\cdot)$. Mówimy, że układ (13) ma *własność silnej osiągalności w* x_0 (jest *silnie osiągalny z* x_0) jeżeli $\mathcal{R}(x_0, t)$ ma niepuste wnętrze dla wszystkich $t > 0$, oraz układ (13) posiada *własność silnej osiągalności* (jest *silnie osiągalny*) jeżeli jest on silnie osiągalny z każdego punktu $x_0 \in \mathcal{X}$. Powiemy, że układ (13) jest *generycznie silnie osiągalny* jeżeli jest on silnie osiągalny z prawie wszystkich punktów z $\mathcal{X}$ (tzn. z wszystkich punktów przestrzeni stanów $\mathcal{X}$ oprócz punktów ze zbioru miary zero). Własności te można sprawdzić używając podalgebr w $V(\mathcal{X})$, patrz [3]. *Algebrę Liego układu* (13) definiujemy jako najmniejszą przestrzeń liniową $\mathfrak{T}$ z pól wektorowych określonych na $\mathcal{X}$, która zawiera rodzinę $\mathcal{F}$ i jest zamknięta na nawias Liego. Wtedy $\mathfrak{T}(x)$ jest podprzestrzenią w $\mathbb{R}^n$ nad ciałem liczb rzeczywistych. Zauważmy, że algebra Liego $\mathfrak{T}$ generuje dystrybucję $\mathfrak{T} : \mathcal{X} \ni x \mapsto \mathfrak{T}(x) \subseteq T_x\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. Dodatkowo definiujemy *ideał Liego układu* (13) jako najmniejszą podprzestrzeń liniową $\mathfrak{T}_0$ przestrzeni $\mathfrak{T}$ rozpiętą przez pola wektorowe ze zbioru $\mathcal{G} := \{f_u - f_v,\ u, v \in \mathcal{U}\}$ i wszystkie nawiasy Liego $[f, g]$ dla wszystkich $f \in \mathcal{F}$ i $g \in \mathcal{G}$. Wtedy $\mathfrak{T}_0 : \mathcal{X} \ni x \mapsto \mathfrak{T}_0(x) \subseteq T_x\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ nazywamy *dystrybucją silnej osiągalności* układu (13). Z geometrycznego punktu wiedzenia własność silnej osiągalności w punkcie x_0 jest scharakteryzowana przez dystrybucję silnej osiągalności w [3, Corollary 4.7].

Wprowadzony w pracy [**H2**] formalizm matematyczny bazuje na algebrze kiełków funkcji analitycznych w punkcie x_0, gdzie $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Algebra ta oznaczona została przez $\mathcal{O}_{x_0}$. Funkcja f występująca po prawej stronie układu (13) definiuje rodzinę kiełków pól wektorowych $f_u \in \mathcal{F}$. Dla uproszczenia notacji, gdy punkt x_0 jest ustalony, kiełek $(f_u)_{x_0}$ będziemy oznaczali przez f_u, zaś kiełek g_{x_0} przez g. Zauważmy, że dla dowolnego kiełka $\varphi \in \mathcal{O}_{x_0}$ otrzymujemy $L_{f_u}\varphi := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(f_u)_i$, więc $L_{f_u}\varphi \in \mathcal{O}_{x_0}$ dla ustalonego u (wtedy u jest parametrem). Jeżeli u nie jest parametrem, to wtedy $L_{f_u}\varphi$ jest kiełkiem funkcji, która zależy od x i u, a zatem $L_{f_u}\varphi \notin \mathcal{O}_{x_0}$. Z tego powodu w pracy [**H2**] rozważałam większą algebrę kiełków funkcji w punkcie x_0, która jest sparametryzowane przez funkcje meromorficzne zależne od $u^{(k)}$, $k \geqslant 0$.

Analogicznie jak w pracach [**H1**,**H3**,**H5**] wprowadziłam następujący nieskończony zbiór rzeczywistych zmiennych (niezależnych): $\mathscr{C} := \mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_u$, gdzie $\mathcal{C}_x := \{x_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ oraz $\mathcal{C}_u := \left\{u_j^{(k)},\ j = 1, \ldots, m,\ \ k \geqslant 0\right\}$. Przez $\mathscr{A}$ oznaczyłam algebrę funkcji analitycznych na $\mathcal{X}$ zależnych od zmiennych ze zbioru $\mathcal{C}_x$ nad ciałem $\mathscr{K}$ funkcji meromorficznych zależnych od skończonej liczby zmiennych ze zbioru $\mathcal{C}_u$. W algebrze $\mathscr{A}$ zdefiniowałam operator Δ_f, który spełnia regułę Leibniza, więc jest różniczkowaniem algebry $\mathscr{A}$. Zauważmy, że w przypadku układów z czasem ciągłym (gdy funkcja ziarnistości $\mu \equiv 0$) operator Δ_f zdefiniowany w artykułach [**H1**, **H3**, **H5**] pokrywa się z różniczkowaniem Δ_f algebry $\mathscr{A}$. Następnie przez $\mathscr{A}_{x_0}$ oznaczyłam zbiór kiełków funkcji z $\mathscr{K}$ w punkcie $x_0 \in \mathcal{X}$ sparametryzowanych przez funkcje meromorficzne zależne od $u^{(k)}$, $k \geqslant 0$. Korzystając z [51] otrzymujemy, że $\mathscr{A}_{x_0}$ jest lokalną przemienną algebrą noetherowską nad ciałem $\mathfrak{K}(x_0)$ funkcji meromorficznych, które zależą od $u^{(k)}$, $k \geqslant 0$. Jeżeli $u \in \mathcal{U}$ oraz $u^{(k)} \in \mathbb{R}^m$, $k > 0$, są ustalone, to wtedy zbiór funkcji z $\mathscr{A}_{x_0}$ dla ustalonego $u^{(k)}$, $k \geqslant 0$, pokrywa się z pierścieniem $\mathcal{O}_{x_0}$. Zauważmy, że zbiór kiełków z algebry $\mathscr{A}_{x_0}$ tworzy pierścień przemienny. W pierścieniu $\mathscr{A}_{x_0}$ operator $\Delta_f : \mathscr{A}_{x_0} \to \mathscr{A}_{x_0}$ definiujemy następująco: $\Delta_f(\varphi) = \left(\Delta_f(\widetilde{\varphi})\right)_{x_0}$, gdzie $\widetilde{\varphi}$ jest reprezentantem kiełka φ. Jeżeli u jest ustalone, to wtedy $L_{f_u}\psi = \Delta_f(\psi)(u)$ dla dowolnego kiełka funkcji $\psi \in \mathcal{O}_{x_0}$.

Ponieważ $\mathcal{O}_{x_0}$ jest pierścieniem lokalnym, więc posiada dokładnie jeden ideal maksymalny m_{x_0}. W pracy [**H2**] zdefiniowałam następujące ideały: ideał $(\mathcal{I}_\infty)_{x_0} := \mathrm{gen}_{\mathscr{A}_{x_0}}\{\varphi \in m_{x_0} :\ \Delta_f^\ell(\varphi) \in (\mathcal{I}_0)_{x_0},\ \ell \geqslant 0\}$ w pierścieniu $\mathscr{A}_{x_0}$ oraz ideał $(I_\infty)_{x_0} := \mathrm{gen}_{\mathcal{O}_{x_0}}\{\varphi \in m_{x_0} :\ \Delta_f^\ell(\varphi) \in (\mathcal{I}_0)_{x_0},\ \ell \geqslant 0\}$ w pierścieniu $\mathcal{O}_{x_0}$. Ponieważ pierścień $\mathcal{O}_{x_0}$ jest noetherowski, to ideał $(I_\infty)_{x_0}$ jest skończenie generowany. Zatem istnieją kiełki $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, takie że

$$(I_\infty)_{x_0} = \mathrm{gen}_{\mathcal{O}_{x_0}}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in m_{x_0} :\ \Delta_f^\ell(\varphi_i) \in (\mathcal{I}_0)_{x_0},\ i = 1, \ldots, k, \ell \geqslant 0\}. \tag{14}$$

Z definicji ideałów $(\mathcal{I}_\infty)_{x_0}$ oraz $(I_\infty)_{x_0}$ otrzymujemy, że kiełki $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ są także generatorami ideału $(\mathcal{I}_\infty)_{x_0}$ i

$$(\mathcal{I}_\infty)_{x_0} = \mathrm{gen}_{\mathscr{A}_{x_0}}\{\varphi_1,\ldots,\varphi_k \in m_{x_0}:\ \Delta_f^\ell(\varphi_i) \in (\mathcal{I}_0)_{x_0},\ i=1,\ldots,k,\ell\geqslant 0\}\,. \tag{15}$$

W pracy [**H2**] pokazałam, że ideał $(\mathcal{I}_\infty)_{x_0}$ jest maksymalnym ideałem właściwym w pierścieniu $\mathscr{A}_{x_0}$ niezmienniczym względem rózniczkowania Δ_f, patrz [**H2**, Proposition 5]. Wykorzystując ideał $(I_\infty)_{x_0}$ wyznaczyłam kiełki rozmaitości całkowych algebry Liego pól wektorowych związanych z rozważanym układem w otoczeniu punktu $x_0 \in \mathcal{X}$. Niech $M_{x_0} := Z((I_\infty)_{x_0})$ będzie kiełkiem zbioru zer (w punkcie x_0) ideału $(I_\infty)_{x_0}$. Zauważmy, że $(I_\infty)_{x_0} \subseteq J(M_{x_0})$, gdzie $J(M_{x_0})$ jest ideałem w pierścieniu $\mathcal{O}_{x_0}$ zawierającym kiełki w x_0 analitycznych funkcji rzeczywistych, które znikają na M_{x_0}. Z (14) mamy, że $(I_\infty)_{x_0}$ jest generowany przez kiełki $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, więc $M_{x_0} = Z((I_\infty)_{x_0}) = \bigcap_{i=1}^k\{x \in \mathcal{X}:\ \widetilde{\varphi}_i(x) = 0\}_{x_0}$, gdzie $\widetilde{\varphi}_i$ jest reprezentantem kiełka φ_i, $i = 1,\ldots,k$.

Korzystając z faktu, że jeżeli I_{x_0} jest maksymalnym ideałem właściwym w pierścieniu $\mathcal{O}_{x_0}$ niezmienniczym względem kiełka pola wektorowego ze zbioru analitycznych pól wektorowych określonych na $\mathcal{X}$, to I_{x_0} jest ideałem pierwszym i $Z(I_{x_0})$ jest kiełkiem zbioru (w punkcie x_0) rozmaitości, patrz [**H2**, Theorem 11], oraz Twierdzenia Nagano (patrz [52]) w pracy [**H2**] pokazałam następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.12 (Theorem 13 w [**H2**]). *Niech $(I_\infty)_{x_0}$ będzie ideałem w pierścieniu $\mathcal{O}_{x_0}$ zdefiniowanym przez* (14). *Wtedy*

(i) $(I_\infty)_{x_0}$ jest maksymalnym ideałem właściwym w pierścieniu $\mathcal{O}_{x_0}$ niezmienniczym względem kiełków z $\mathfrak{T}_{x_0}$.

(ii) $M_{x_0} = Z\left((I_\infty)_{x_0}\right)$ jest kiełkiem zbioru rozmaitości całkowej algebry Liego $\mathfrak{T}$ układu (13) *przechodzącej przez x_0.*

Używając ideału $(I_\infty)_{x_0}$ w pracy [**H2**] podałam warunek konieczny silnej osiągalności w punkcie x_0.

Twierdzenie 4.13 (Theorem 15 w [**H2**]). *Jeżeli układ* (13) *posiada własność silnej osiągalności w punkcie x_0, to wtedy $(I_\infty)_{x_0} = \{0\}$.*

Ponieważ jesteśmy zainteresowani znalezieniem funkcji analitycznych generujących $(I_\infty)_{x_0}$, których różniczki są liniowo niezależne, więc jednoformy różniczkowe będą użytecznym narzędziem umożliwiającym zbadanie tej niezależności. W tym celu wprowadziłam następujące zbiory: $\mathrm{d}\mathscr{C} := \{\mathrm{d}x_i,\ i=1,\ldots,n, \mathrm{d}u_j^{(k)},\ j=1,\ldots,m,\ k\geqslant 0\}$ oraz $(\mathrm{d}\mathscr{C})_{x_0} := \{(\mathrm{d}x_i)_{x_0},\ i=1,\ldots,n,\ (\mathrm{d}u_j^{(k)})_{x_0},\ j=1,\ldots,m,\ \ k\geqslant 0\}$, gdzie $x_0 \in \mathcal{X}$. Zauważmy, że $\mathrm{d}u_j$, $j=1,\ldots,m$, nie zależą od $x \in \mathcal{X}$, więc $(\mathrm{d}u_j^{(k)})_{x_0} = \mathrm{d}u_j^{(k)}$. Dla uproszczenia notacji, będziemy używali symbolu $\mathrm{d}x_i$ do oznaczenia kiełka elementu $\mathrm{d}x_i$. Niech $\mathscr{E} := \mathrm{span}_{\mathscr{A}}\mathrm{d}\mathscr{C}$ oraz $\mathscr{E}_{x_0} := \mathrm{span}_{\mathscr{A}_{x_0}}(\mathrm{d}\mathscr{C})_{x_0}$ będą modułami odpowiednio nad pierścieniami $\mathscr{A}$ oraz $\mathscr{A}_{x_0}$. W [**H2**] zdefiniowany został w standardowy sposób operator różniczkowania d, który funkcjom z pierścienia $\mathscr{A}$ oraz kiełkom funkcji z pierścienia $\mathscr{A}_{x_0}$ przyporządkowuje elementy modułów odpowiednio $\mathscr{E}$ oraz $\mathscr{E}_{x_0}$. W modułach $\mathscr{E}$ oraz $\mathscr{E}_{x_0}$ zdefiniowane zostały operatory $\Delta_f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ oraz $\Delta_f : \mathscr{E}_{x_0} \to \mathscr{E}_{x_0}$ przez zależności: $\Delta_f(\sum_i A_i\mathrm{d}\zeta_i) := \sum_i \{\Delta_f(A_i)\mathrm{d}\zeta_i + A_i\mathrm{d}\left[\Delta_f(\zeta_i)\right]\}$ $\Delta_f(\omega_{x_0}) := \left(\Delta_f(\omega)\right)_{x_0}$, gdzie $A_i \in \mathscr{A}$ i $\zeta_i \in \mathscr{C}$, zaś ω będzie reprezentantem ω_{x_0}.

Przypomnijmy, że w formalizmie algebraicznym prezentowanym w [6,53] (a później rozszerzonym do delta-różniczkowych układów na skalach czasowych [B14]) zamiast pierścienia $\mathscr{A}_{x_0}$ rozważane jest przemienne ciało $\mathscr{K}$ funkcji moromorficznych zależnych od skończonej liczby zmiennych ze zbioru $\mathscr{C}$. Wtedy wprowadzona została następująca podprzestrzeń przestrzeni $\mathscr{H}_1 := \mathrm{span}_{\mathscr{K}}\{\mathrm{d}x\}$:

$$\mathscr{H}_\infty := \{\omega :\ \Delta_f^\ell(\omega) \in \mathscr{H}_1,\ \ell \geqslant 1\}\,, \tag{16}$$

która następnie została wykorzystana do sformułowania warunku koniecznego i wystarczającego generycznej silnej osiągalności w przypadku układów z czasem ciągłym (warunku generycznej osiągalności w przypadku układów sterowania określonych na jednorodnych skalach czasowych). W [6, 53] autorzy udowodnili, że $\mathscr{H}_\infty = \{0\}$ jest równoważna generycznej silnej osiągalności układu, zaś w [**H3**, A31] pokazaliśmy, że warunek $\mathscr{H}_\infty = \{0\}$ charakteryzuje generyczną osiągalność układu sterowania określonego na jednorodnej skali czasowej.

W pracy [**H2**] definicja przestrzeni $\mathscr{H}_\infty$ nad ciałem funkcji meromorficznych podana w [6] została zmodyfikowana i zaadaptowana do pierścienia $\mathscr{A}_{x_0}$. Ponieważ $\mathscr{A}_{x_0}$ jest pierścieniem kiełków (w punkcie x_0) funkcji analitycznych, możemy zdefiniować moduły nad pierścieniem $\mathscr{A}_{x_0}$. Dodatkowo, rozpatrywane moduły powiązałam z punktami x_0 używając kiełków jednoform (w punkcie x_0). Sformułowanie warunków silnej osiągalności w pracy [**H2**] w języku jednoform różniczkowych było możliwe dzięki wprowadzeniu następujących podmodułów modułu $\mathscr{E}_{x_0}$:

- podmodułu $(\mathcal{P}_\infty)_{x_0} := \mathrm{span}_{\mathcal{O}_{x_0}}\{\mathrm{d}\varphi_1, \ldots, \mathrm{d}\varphi_k\}$ w module $\mathfrak{O}_{x_0} := \mathrm{span}_{\mathcal{O}_{x_0}}\{\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n\}$, gdzie $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ są generatorami ideałów $(\mathcal{I}_\infty)_{x_0}$ oraz $(I_\infty)_{x_0}$
- podmodułu $(H_\infty)_{x_0} := \{\omega \in (H_0)_{x_0},\ \Delta_f^\ell(\omega)(x_0) \in H(x_0)\,,\quad \ell \geqslant 0\}$ w module $(H_0)_{x_0} := \mathrm{span}_{\mathscr{A}_{x_0}}\{\mathrm{d}x_i, i = 1, \ldots, n\}$, gdzie $H(x_0) := \mathrm{span}_{\mathfrak{K}(x_0)}\{\mathrm{d}x_i(x_0),\ i = 1, \ldots, n\}$ jest przestrzenią nad ciałem $\mathfrak{K}(x_0)$ funkcji meromorficznych, które zależą od $u^{(k)}$, $k \geqslant 0$.

Podmoduł $(H_\infty)_{x_0}$ został wykorzystany do wyznaczenia kiełków elementów autonomicznych dla układu sterowania postaci (13). Między wprowadzonymi podmodułami zachodzi następująca zależność $(\mathcal{P}_\infty)_{x_0} \subsetneq (H_\infty)_{x_0}$, patrz [**H2**, Proposition 17]. Wtedy Twierdzenie 4.13 można zapisać w równoważnej postaci w języku jednoform różniczkowych następująco:

Twierdzenie 4.14 (Theorem 19 w [**H2**]). *Jeżeli* (13) *posiada własność silnej osiągalności w punkcie x_0, to wtedy $(\mathcal{P}_\infty)_{x_0} = \{0\}$.*

Ponieważ wprowadzona w pracy [**H2**] przestrzeń wektorowa $\mathcal{P}_\infty(x_0) := (\mathcal{P}_\infty)_{x_0}(x_0) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\mathrm{d}\varphi_1(x_0), \ldots, \mathrm{d}\varphi_k(x_0)\}$ jest anihilatorem podprzestrzeni liniowej $\mathfrak{T}(x_0)$ nad $\mathbb{R}$, patrz [**H2**, Proposition 22], więc korzystając na przykład z [3, Corollary 4.6] otrzymujemy, że warunek $(\mathcal{P}_\infty)_{x_0} = \{0\}$ (lub równoważnie $(I_\infty)_{x_0} = \{0\}$) jest równoważny osiągalności w punkcie x_0. Ze względu na to, że w pracy [**H2**] badana jest tylko silna osiągalność, więc ta charakteryzacja osiągalności układu sterowania nie została podana w [**H2**].

Zauważmy, że $\mathcal{P}_\infty(x_0)$ jest przestrzenią wektorową, więc moduł $(\mathcal{P}_\infty)_{x_0}$ definiuje następującą kodystrybucję: $\mathcal{P}_\infty : x_0 \mapsto \mathcal{P}_\infty(x_0)$. Ogólnie kodystrybucja $\mathcal{P}_\infty$ nie jest analityczna, ponieważ jej wymiar zmienia się w otoczeniu punktu x_0, co w pracy [**H2**] zilustrowałam na przykładzie. Ponadto pokazałam, że kodystrybucja $\mathcal{P}_\infty : x_0 \mapsto \mathcal{P}_\infty(x_0)$ jest całkowalna w każdym punkcie $x_0 \in \mathcal{X}$ oraz $M_{x_0} = Z((I_\infty)_{x_0})$ jest kiełkiem zbioru rozmaitości całkowej kodystrybucji $\mathcal{P}_\infty$ przechodzącej przez x_0, patrz [**H2**, Proposition 25].

Warunek $(\mathcal{P}_\infty)_{x_0} = \{0\}$ podany w Twierdzeniu 4.14 jest warunkiem koniecznym silnej osiągalności, ale nie jest warunkiem wystarczającym. Moim celem było wyznaczenie warunku, który jest równoważny silnej osiągalności układu. Korzystając z faktu, że z całkowalnym modułem $(H_\infty)_{x_0}$, tzn. rozpiętym przez kiełki jednoform dokładnych, związana jest przestrzeń wektorowa $H_\infty(x_0)$, która jest anihilatorem przestrzeni $\mathfrak{T}_0(x_0)$, patrz [**H2**, Proposition 26] w pracy [**H2**] sformułowałam i udowodniłam następujący warunek konieczny i wystarczający silnej osiągalności:

Twierdzenie 4.15 (Theorem 28 w [**H2**])**.** *Układ* (13) *posiada własność silnej osiągalności w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $(H_\infty)_{x_0} = \{0\}$.*

Reasumując, w [**H2**] bazując na podanym formalizmie sformułowałam i udowodniłam warunki silnej osiągalności (we wszystkich punktach z przestrzeni stanów) dla analitycznych układów sterowania opisanych przez równania różniczkowe zwyczajne. W przypadku układów nieosiągalnych podałam rozmaitości całkowe algebry Liego rozważanego układu. Rozmaitości te zostały opisane za pomocą generatorów ideałów niezmienniczych ze względu na kiełki pól wektorowych algebr Liego związanych z rozważanymi układami. Dodatkowo na przykładzie zilustrowałam otrzymane wyniki i pokazałam, że powyższy formalizm matematyczny umożliwia badanie silnej osiągalności w punkcie przestrzeni stanów.

5. Omówienie pozostałych wyników badań

Prace [C22] oraz [C24] to publikacje przed doktoratem. Ich spis znajduje się w Literaturze na stronie 42.

Prace [A33, B15, B16, C21, C23, C25, C26] to publikacje wchodzące w skład rozprawy doktorskiej, a ich spis znajduje się w Literaturze na końcu autoreferatu na stronach 40 (poz. [A33]), 41 (poz. [B15, B16]) i 42 (poz. [C21, C23, C25, C26]).

Od początku rozpoczęcia pracy na Politechnice Białostockiej moja działalność naukowa koncentrowała się na matematycznej teorii sterowania. Jedna z pierwszych publikacji [C24] referowana podczas III Ogólnopolskich Warsztatów dla Młodych Matematyków pt. „Teoria osobliwości” bazuje na pracach profesora Zbigniewa Bartosiewicza i dr hab. Doroty Mozyrskiej, [54–57] i związana była z badaniem własności lokalnej obserwowalności nieliniowych układów sterowania wprowadzonej w 1977 roku przez R. Hermanna i A.J. Krenera, [58]. Problem stabilności lokalnej obsewowalności nieliniowych układów sterowania był tematem mojej pracy magisterskiej pisanej pod kierunkiem profesora Zbigniewa Bartosiewicza. Praca ta opierała się na teorii kiełków funkcji i kiełków zbiorów, a także ideałów oraz przestrzeni stycznych, [59].

Ponieważ jednym z problemów pojawiających się w teorii sterowania jest rekonstrukcja nieznanego stanu układu oryginalnego, więc rozpoczęłam badania w tym kierunku. W pracy współautorskiej z profesorem Z. Bartosiewiczem [C22] zajęliśmy się konstrukcją obserwatorów doskonałych, tzn. układów, które dokładnie odtwarzają nieznany stan układu oryginalnego. Konstrukcja takiego obserwatora została po raz pierwszy podana przez Dai w 1988 roku dla układów dyskretnych, a następnie rozszerzona przez T. Kaczorka, który nazwał tego rodzaju obserwatory obserwatorami doskonałymi. W [C22] podaliśmy konstrukcję obserwatorów doskonałych dla nieliniowych obserwowalnych układów sterowania. Korzystając z założenia obserwowalności dokonaliśmy zanurzenia układu w osobliwy układ liniowy, dla którego można było skonstruować obserwator doskonały. Następnie odtworzony został nieznany stan układu oryginalnego.

5.1 Zagadnienie rozważane w rozprawie doktorskiej: konstrukcja multiobserwatora dla analitycznych układów sterowania

W mojej rozprawie doktorskiej, [60], napisanej pod kierunkiem profesora Zbigniewa Bartosiewicza, badałam problem konstrukcji obserwatora dla analitycznych układów sterowania z czasem ciągłym przy możliwie słabych założeniach. Konstrukcja wzorowana jest na pomysłach Gauthiera, Kupki i Jouana, którzy w [61, 62] przedstawili konstrukcję obserwatora rozszerzonego rzędu, który jest obserwatorem gładkim. W rozprawie podałam warunki wystarczające na istnienie obserwatora dla układu analitycznego zarówno ze sterowaniem, jak i bez sterowania. Oprócz analityczności istotnym założeniem była lokalna obserwowalność układów, która jest łatwiejsza do sprawdzenia niż globalna obserwowalność i wydaje się być bardziej naturalna zwłaszcza dla układów bez sterowania. Dzięki temu, że stany nieodróżnialne tworzą zbiór dyskretny w przypadku układów lokalnie obserwowalnych, po ograniczeniu się do zbioru zwartego, na wyjściu multiobserwatora, który estymuje całą klasę stanów nieodróżnialnych, pojawia się funkcja wielowartościowa o skończonych wartościach. Dynamika skonstruowanego obserwatora nieregularnego opisana jest przez funkcje ciągłe, a zatem zgubiona została analityczność, którą cechował się układ. Wynikiem rozprawy jest pokazanie, że dla analitycznego układu, po ograniczeniu się do zbioru zwartego globalnie semianalitycznego, wystarczy skończenie wiele funkcji do opisania relacji nieodróżnialności. Konsekwencją tego jest możliwość wyrażenia wyższych pochodnych Liego wyjścia jako ciągłych funkcji od skończonej liczby pochodnych niższego rzędu. Ponadto rozwiązany został problem rozszerzenia na całą przestrzeń funkcji i multifunkcji pojawiających się na wyjściu multiobserwatora. Główne wyniki rozprawy zostały zawarte w pracy [A33] oraz artykułach konferencyjnych [B15, B16, C21, C23, C25, C26]. Dodatkowo w pracy [A33] omówione zostało zastosowanie skonstruowanych multiobserwatorów do stabilizacji układów poprzez dynamiczne sprzężenia zwrotne od wyjścia.

Prace [A1–A32, B1–B14, C3, C5–C20] zostały opublikowane po doktoracie i nie weszły one do zasadniczej części osiągnięcia naukowego. Ich spis znajduje się w spisie literatury na stronach 38-40: poz. [A1–A32], na stronach 40-41: poz. [B1–B14] oraz na stronach 41-42: poz. [C3, C5–C20]. Ponadto wyniki zawarte w niektórych pracach nawiązują do tematyki cyklu publikacji wchodzących w skład osiągnięcia naukowego i są wstępem (jak np. [A21, B14]) do badań podjętych w pracach [**H1**, **H2**, **H3**, **H4**, **H5**] lub stanowią ich kontynuację (np. [A25]).

Prace opublikowane po doktoracie, które nie wchodzą w skład osiągnięcia naukowego, zasadniczo dotyczą następującej tematyki:

- algebraicznych metod badania układów z czasem ciągłym i dyskretnym:
  - wprowadzenia algebraicznego formalizmu dla układów określonych na skalach czasowych,
  - redukowalności (nieosiągalności), realizowalności i obserwowalności układów wejście-wyjście na skalach czasowych,
  - redukowalności uwikłanych równań różnicowych,
  - transformacji i odwracalności układów wejście-wyjście z czasem dyskretnym,
- uogólnionych pochodnych na skalach czasowych,
- badania własności układów niecałkowitych rzędów,
- konsensusu dla układów wieloagentowych.

W latach 2006-2008 pracując w Instytucie Cybernetyki przy Politechnice w Tallinie zajmowałam się układami na skalach czasowych. Podczas pobytu w Estonii prowadziłam zajęcia dla doktorantów pt. „Wprowadzenie do układów sterowania na skalach czasowych" („Introduction to control systems on time scales"). Głównym celem kursu było wprowadzenie rachunku skal czasowych do badania równań dynamicznych zdefiniowanych na różnych skalach czasowych. Skalę czasową (definiowaną jako dowolny niepusty domknięty podzbiór zbioru liczb rzeczywistych) można utożsamiać z modelem czasu, dlatego też termin skale czasowe związany jest ze sposobem w jaki układy dynamiczne zmieniają się w czasie. Prowadzony kurs przyczynił się do zgłębienia nowej dziedziny, jaką był wtedy dla mnie rachunek skal czasowych.

5.2 Układy sterowania na skalach czasowych

Niektóre wyniki prezentowane w tym rozdziale są wstępem do badań podjętych w pracach [**H1**, **H3**, **H4**, **H5**] lub stanowią ich kontynuację.

Pierwszą pracą związaną z układami sterowania na skalach czasowych jest artykuł [C18], który prezentowałam na konferencji CDC (46th IEEE Conference on Decision and Control). Wspólnie z profesorem Zbigniewem Bartosiewiczem i mgr Ewą Piotrowską badaliśmy liniowe układy sterowania określone na dowolnych skalach czasowych. Pokazaliśmy, że klasyczne wyniki dla liniowych układów z czasem ciągłym i dyskretnym dotyczące stabilizacji i wykrywalności można rozszerzyć do układów określonych na dowolnych skalach czasowych. Wyniki te zależą od kryteriów wykładniczej stabilności, które są różne dla różnych skal czasowych. W [C18] zbadaliśmy zbiór stabilności wykładniczej, który pojawia się w tych kryteriach i pokazaliśmy że może on być pusty, co prowadzi do pewnych patologii w zachowaniu układu. Ponadto pokazaliśmy, że standardowe konstrukcje obserwatorów można rozszerzyć na układy z niepustym zbiorem stabilności wykładniczej.

Ponieważ niektóre problemy w teorii sterowania można analizować bez wyznaczania rozwiązań rozważanych układów, więc w pracy [B14] wspólnie z profesorem Zbigniewem Bartosiewiczem, profesor Ülle Kottą oraz dr hab. Ewą Pawłuszewicz wprowadziliśmy formalizm matematyczny (algebraiczny) unifikujący istniejącą teorię dla układów z czasem ciągłym [6] oraz dyskretnym [63]. Kluczowym zadaniem tego formalizmu jest konstrukcja ciała σ_f-różniczkowego związanego z danym nieliniowym układem sterowania określonym na jednorodnej skali czasowej. Formalizm ten został opisany w pracy [B14] i bazuje on na jednoformach różniczkowych, które zostały wykorzystane do skonstruowania inwersyjnego domknięcia (inversive closure) ciała funkcji meromorficznych związanych z danym układem. W otrzymanych ciałach różniczkowych wprowadzone zostały operatory delta-pochodnej i przesunięcia oraz podane zostały ich własności. Rozszerzenie podanego formalizmu algebraicznego na przypadek p-form zostało podane w pracy [A21]. Operatory delta-pochodnej i przesunięcia do przodu zostały rozszerzone do rozpatrywanych p-form. Podane zostały własności zdefiniowanych operatorów. Ponadto wprowadzona została dualna przestrzeń pól wektorowych i wspomniane operatory zostały rozszerzone do pól wektorowych. Dodatkowo w pracy [A25] (będącej rozszerzeniem artykułu konferencyjnego [C11]) podjęta została próba rozszerzenia istniejącego formalizmu do układów zdefiniowanych na niejednorodnych skalach czasowych. W artykule [A25] opisana została algebraiczna konstrukcja inwersyjnego pierścienia różniczkowego związanego z nieliniowym układem sterowania, określonym na regularnej skali czasowej. Skonstruowany został pierścień funkcji meromorficznych zależnych od zmiennych związanych z układem. W pierścieniu tym zdefiniowane zostały operatory delta- i nabla-pochodnych oraz operator przesunięcia. W porównaniu z przypadkiem jednorodnym, główne trudności to nieprzemienność pochodnych delta (nabla) i operatora przesunięcia oraz fakt, że dodatkowa zmienna czasowa t pojawia się w definicji pierścienia różniczkowego. To powoduje, że nowe zmienne domknięcia inwersyjnego, które zależą od t, muszą być wybrane tak, aby były funkcjami gładkimi w każdym gęstym punkcie t skali czasowej. W pracy [A25] pokazaliśmy, że rozszerzenie formalizmu algebraicznego do niejednorodnych skal czasowych nie jest trywialne. Mimo, iż można skonstruować przemienny pierścień różniczkowy funkcji meromorficznych związanych z nieliniowym układem sterowania, to może on mieć dzielniki zera. Wtedy niemożliwe jest skonstruowanie ciała ułamków tego pierścienia. W związku z tym zamiast przestrzeni nad ciałem można konstruować moduły nad tym pierścieniem, co zostało pokazane w [A25], a zatem otrzymaliśmy znacznie bardziej skomplikowany formalizm algebraiczny. Kontynuacją prac [A21, A25, B14] jest artykuł [A12], który podobnie jak [A21, A25, B14] koncentruje się na opracowaniu narzędzi algebraicznych, które pozwalają badać własności nieliniowych układów sterowania, zdefiniowanych na skalach czasowych. W [A12] rozszerzyliśmy operatory: przesunięcia w tył ρ_f oraz nabla-pochodnej ∇_f, zdefiniowane przez układ sterowania określony na jednorodnej skali czasowej, do jednoform oraz pól wektorowych oraz podaliśmy i udowodniliśmy ich własności. Operator nabla-pochodnej (zastosowanej do pól wektorowych) jest użytecznym narzędziem i na przykład w [**H3**] operator nabla-pochodnej został zastosowany do wyznaczenia dystrybucji anihilującej $\mathscr{H}_k$ oraz sprawdzania własności osiągalności układów określonych na skalach czasowych. Wyniki prezentowane w pracach [A12, A21, B14] są wstępem do badań podjętych w pracach [**H1**, **H3**, **H4**, **H5**].

Jednym z założeń pojawiających się przy konstrukcji inwersyjnych domknięć jest submersyjność układu, która niestety okazała się za słabym założeniem. Założenie submersyjności pozwalało na konstrukcję ciała będącego inwersyjnym domknięciem, ale tylko lokalnie na pewnym otoczeniu punktu, w którym zachodzi warunek submersyjności. W związku z tym, założenie to zostało wzmocnione przez: Założenie 1 dla układów w przestrzeni stanów oraz Założenie 2 dla układów wejście-wyjście. Warunki submersyjności układów wejście-wyjście określonych na jednorodnych skalach czasowych omówione zostały w pracy [A27]. Pokazaliśmy, że inwersyjne domknięcie dla dynamicznego nieliniowego układu wejście-wyjście można znaleźć w podobny sposób jak w przypadku układów w przestrzeni stanów, używając rozszerzonego układu w przestrzeni stanów związanego z układem wejście-wyjście, co zostało również przedstawione w [**H4**].

5.2.1 Redukowalność (nieosiągalność) i realizowalność układów wejście-wyjście na jednorodnych skalach czasowych

Bazując na podanym formalizmie w pracach [A32, C20] sformułowane zostały warunki na redukowalność (brak osiągalności) nieliniowego delta-różniczkowego równania wejście-wyjście określonego na jednorodnej skali czasowej. Pokazaliśmy, że rozpatrywany układ wejście-wyjście można opisać za pomocą dwóch wielomianów, które należą do nieprzemiennego pierścienia lewych wielomianów nad ciałem σ_Φ-różniczkowym. Wówczas sprawdzenie redukowalności wymaga znalezienia lewego wspólnego dzielnika tych wielomianów. Wymienione warunki redukowalności oraz związane z nimi problemy redukcji i równoważności nieliniowych delta-różniczkowych układów wejście-wyjście określonych na jednorodnych skalach czasowych opisane zostały w [A32]. Praca [A32] nawiązuje do tematyki badań podjętych w artykule [**H4**] oraz artykule konferencyjnym [C15], które są rozszerzeniem wyników na przypadek układów z wieloma wejściami i wieloma wyjściami.

Innym sposobem badania redukowalności (braku osiągalności) układów wejście-wyjście jest użycie nierosnącego ciągu $(\mathcal{H}_k)$ podprzestrzeni zdefiniowanych (dla układów z jednym wejściem i jednym wyjściem) przez

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 :=& \operatorname{span}_{\mathcal{K}^*}\{\mathrm{d}y, \ldots, \mathrm{d}y^{[n-1]}, \mathrm{d}u, \ldots, \mathrm{d}u^{[s]}\}\,, \\ \mathcal{H}_{k+1} :=& \{\omega \in \mathcal{H}_k : \ \Delta_f(\omega) \in \mathcal{H}_k\}, \quad k \geqslant 0\,. \end{aligned} \tag{17}$$

w przestrzeni $\mathcal{E}^*$ jednoform różniczkowych nad skonstruowanym ciałem σ_Φ-różniczkowym $\mathcal{K}^*$. W artykule konferencyjnym [C16], który prezentowałam na konferencji ACC w 2008 roku, pokazaliśmy, że zerowanie się najmniejszej podprzestrzeni w ciągu $(\mathcal{H}_k)$ jest równoważne nieredukowalności układu wejście-wyjście. Ponadto omówiliśmy problem redukcji i równoważności nieliniowych układów z jednym wejściem i jednym wyjściem zdefiniowanych na jednorodnych skalach czasowych przez delta-różniczkowe równania n-tego rzędu. Wprowadzona definicja równoważności uogólnia pojęcie równoważności w sensie transmitancji dla układów liniowych. Rozszerzeniem wyników zawartych w [C16] oraz w artykule konferencyjnym [C19] (który referowałam na symposium SSSC07: 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control) jest praca [A31]. W [A31] sformułowaliśmy i udowodniliśmy warunki konieczne i wystarczające redukowalności i realizowalności nieliniowych układów wejście-wyjście oraz omówiliśmy równoważność układów. Pokazaliśmy, że realizowalność układu jest równoważna całkowalności podprzestrzeni zdefiniowanych przez (17). W przypadku realizowalnych układów wejście-wyjście podano metodę znajdowania współrzędnych stanu układu oraz wyznaczania jego realizacji. Metoda ta bazuje bezpośrednio na definicji ciągu $(\mathcal{H}_k)$ i związana jest z rozwiązywaniem równań liniowych umożliwiających wyznaczenie baz kolejnych podprzestrzeni w ciągu.

Bazując na wynikach pracy [A31] w artykule konferencyjnym [C14] opisaliśmy problem redukcji i realizowalności nieliniowych układów sterownia z wykorzystaniem funkcji programu Mathematica. W [C14] zaprezentowane zostały diagramy blokowe funkcji realizacji i redukcji. Funkcje te są częścią pakietu programu Mathematica zwanego NLControl `http://www.nlcontrol.ioc.ee`. Zauważyliśmy, że wraz ze wzrostem złożoności równania wejście-wyjście czas obliczeń szybko rośnie. Przez złożoność rozumiemy nie tylko długość równania, ale także stopień nieliniowości. Obliczanie ciągu $\mathcal{H}_k$ zwykle przebiegało szybciej w przypadku podprzestrzeni całkowalnych, dlatego najbardziej czasochłonną procedurą jest sprawdzenie nieredukowalności układu nie posiadającego realizacji.

5.2.2 Obserwowalność układów na jednorodnych skalach czasowych

Oprócz układów wejście-wyjście można rozpatrywać układy w przestrzeni stanów w postaci (1). W artykule [A18] zbadaliśmy problem obserwowalności nieliniowych układów sterowania zdefiniowanych za pomocą równań delta-różniczkowych określonych na jednorodnych skalach czasowych. Bazując na algebraicznym formalizmie wprowadzonym w [B14] zdefiniowany został rosnący ciąg podprzestrzeni jednoform zwany filtracją obserwowalności. Pokazano, że dla skonstruowanego ciągu podprzestrzeni istnieje granica, która nosi nazwę przestrzeni obserwowalności rozpatrywanego układu. Wykazano, że obserwowalność nieliniowego układu określonego na jednorodnej skali czasowej można scharakteryzować przy pomocy przestrzeni obserwowalności. Podobnie jak w przypadku układów z czasem ciągłym i dyskretnym, równość przestrzeni obserwowalności z przestrzenią stanów rozpatrywanego układu jest warunkiem koniecznym i wystarczającym obserwowalności delta-różniczkowego układu określonego na jednorodnej skali czasowej. W przypadku układów nieobserwowalnych pokazaliśmy, że całkowalność przestrzeni obserwowalnej umożliwia podział układu na podukłady z których jeden jest obserwowalny, zaś drugi nieobserwowalny. Ponieważ przestrzeń obserwowalna nie zawsze jest całkowalna więc wspomniany podział nie zawsze jest możliwy, co zostało omówione w pracy [A18].

5.3 Redukowalność uwikłanych równań różnicowych

Standardowy sposób patrzenia na układy sterowania jest związany z wejściem i wyjściem. Dane wejściowe odpowiadają działaniu (przyczyna), a wyjściowe reakcji (efektowi). Zauważmy, że podział na wejścia i wyjścia zależy w dużym stopniu od celu, do którego wykorzystywany jest model, a czasami ten podział jest po prostu niemożliwy. Typowym przykładem jest dioda, która nie jest sterowana ani prądem ani napięciem [64]; inne przykłady można znaleźć w [65]. Mimo, że podejście wejście-wyjście jest nadal głównym nurtem teorii sterowania, podejście behawioralne zyskuje coraz większą popularność w ostatnich latach. Zauważmy, że jeśli dyskretyzujemy nieliniowy obwód elektryczny (na przykład RLC), otrzymamy równanie różnicowe z zewnętrznymi zmiennymi będącymi prądem i napięciem. Mając model obwodu elektrycznego opisany przez układ różnicowy rzędu drugiego, można zbadać jego zachowanie, sprawdzając jego redukowalność. Inną możliwością jest badanie zachowania się dyskretnego modelu makro-ekonomicznego, który wiąże produkcję produktu, tempo wzrostu pieniądza i stopę inflacji.

W pracy [B12] zbadaliśmy problem redukowalności nieliniowych układów z czasem dyskretnym opisanych przez uwikłane równania różnicowe wyższych rzędów, w których sygnały wejścia i wyjścia nie są odróżniane. Bazując na elemencie autonomicznym podaliśmy definicję redukowalności równania różnicowego, a następnie sformułowaliśmy i udowodniliśmy warunek konieczny redukowalności rozpatrywanych układów. Pokazaliśmy, że z badanymi równaniami różnicowymi związane są lewe podmoduły generowane przez macierze wierszowe (opisujące zachowanie układu zlinearyzowanego) nad pierścieniem lewych wielomianów różnicowych. Udowodniliśmy, że jeżeli uwikłane równanie różnicowe jest redukowalne, to związany z nim lewy podmoduł nad pierścieniem wielomianów różnicowych nie jest domknięty. Ponadto pokazaliśmy, że w szczególnym przypadku, gdy sygnały wejścia i wyjścia są odróżniane oraz układ jest opisany za pomocą równania różnicowego, z którego potrafimy wyznaczyć najwyższe przesunięcie wyjścia występującego w równaniu, to otrzymany wynik jest równoważny znanemu warunkowi związanemu z istnieniem lewego wspólnego dzielnika wielomianów opisujących zachowanie układu zlinearyzowanego poprzez obustronne zróżniczkowanie badanego układu. W [B12] postawiliśmy hipotezę, że domkniętość lewego podmodułu (nad pierścieniem lewych wielomianów różnicowych) generowanego przez wektor opisujący zachowanie układu zlinearyzowanego jest warunkiem koniecznym i wystarczającym nieredukowalności równania różnicowego, co potwierdziły prezentowane w pracy przykłady.

5.4 Transformacje i odwracalność układów wejście-wyjście z czasem dyskretnym

W przypadku układów sterowania wejście-wyjście opisanych przez zbiór równań różnicowych wyższych rzędów postać Popova jest punktem wyjścia w większości prac poświęconych różnym problemom modelowania i sterowania układów nieliniowych, opisanych przez równania wejście-wyjście. Dlatego też jednym z problemów jest doprowadzenie nieliniowego układu wejście-wyjście do nieliniowego zbioru równań będącego w postaci Popova. Przedstawienie nieliniowych równań wejście-wyjście w silnej postaci Popova jest dobrym punktem wyjścia zarówno do badań teoretycznych, jak i do implementacji. Silna postać Popova umożliwia konstrukcję ciała funkcji meromorficznych związanego z nieliniowym układem sterowania, i konsekwentnie możliwe jest stworzenie oprogramowania pozwalającego badać pewne własności układów. W artykule konferencyjnym [C8] opracowaliśmy algorytm przekształcania zbioru nieliniowych równań różnicowych wyższych rzędów do układu podwójnie zredukowanego (zredukowanego wierszowo i kolumnowo) lub do układu w postaci Popova. W algorytmie tym wykorzystaliśmy liniowe transformacje równoważności, wprowadzone w [66]. Opis układu przekształconego obejmuje, oprócz równań opisujących układ, także pewną liczbę nierówności, które gwarantują, że pewne wyrażenia będą niezerowe. Dlatego nasze transformacje są poprawne globalnie w całej przestrzeni z usuniętymi zerami funkcji pojawiających się w mianownikach. Może się jednak zdarzyć, że transformacje liniowe (nad pierścieniem wielomianów) nie wystarczą do przekształcenia nieliniowych równań do układu w postaci Popova. Kontynuacją artykułu [C8] jest praca [A13], która porusza problem transformacji nieliniowych układów dyskretnych, opisanych przez uwikłane równania różnicowe wyższych rzędów, w silną postać wierszowo zredukowaną. Pokazaliśmy, że czasami równania w postaci wierszowo zredukowanej mogą zawierać przesunięcia wyższych zmiennych wyjściowych niż odpowiadające im stopnie wiersza. Oznacza to, że na ogół liniowe transformacje nie wystarczają do przekształcenia równań do postaci silnie wierszowo zredukowanej.

Dlatego w artykule [A13] zbadano możliwość wykorzystania lokalnych nieliniowych transformacji w celu zredukowania rzędu układu. Zaproponowaliśmy konstruktywny algorytm, w którym zbiór równań wejście-wyjście przekształcamy do postaci silnie wierszowo zredukowanej. W ostatnio opublikowanym artykule [A3] zastosowaliśmy te same narzędzia co w pracach [66, A13] do przekształcenia układu równań do układu będącego w (silnej) postaci Popova. Artykuł [A3] jest rozszerzeniem artykułu konferencyjnego [C8]. W artykule tym poprawiony został algorytm przekształcania układów do postaci Popova, skonstruowany został zbiór nierówności, zapewniający to, że niektóre wyrażenia są niezerowe. Ponadto porównaliśmy postać Popova i silną postać Popova oraz dodaliśmy algorytm przekształcający zbiór równań wejście-wyjście do silnej postaci Popova. Opracowaliśmy przykłady ilustrujące prezentowane wyniki.

Innym problemem pojawiającym się w teorii układów sterowania jest problem odwracalności układów. W przypadku układów w przestrzeni stanów problem ten został omówiony w pracy [**H1**] wchodzącej w skład osiągnięcia naukowego. Ponieważ nie wszystkie układy sterowania można opisać w przestrzeni stanów, więc pojawia się pytanie o odwracalność układów wejście-wyjście. W naszych dotychczasowych badaniach ograniczyliśmy się do układów wejście-wyjście z czasem dyskretnym będących w postaci Popova (algorytm przekształcania zbioru nieliniowych równań różnicowych wejście-wyjście do postaci Popova podany został w [A2]). Praca [A3] dotyczy zastosowania postaci Popova układu równań różnicowych wiążących wejście i wyjście do konstrukcji prawej i lewej odwrotności układu. W pracy tej zdefiniowaliśmy pojęcia prawego i lewego układu odwrotnego. Rozumiemy przez to układ podobnego typu co dany układ, który albo odtwarza wyjście dla dowolnego wejścia w przypadku prawej odwrotności, albo odtwarza wejście w sposób jednoznaczny dla zadanego wyjścia układu w przypadku lewej odwrotności. Główne wyniki dotyczyły charakteryzacji prawej i lewej odwracalności, czyli istnienia prawej i lewej odwrotności zadanego układu. Z układem tym, po przejściu do różniczek, związane są dwie macierze nad pewnym pierścieniem wielomianów. Druga z tych macierzy, odpowiadająca różniczce wejścia, pozwala sformułować warunki konieczne i wystarczające na prawą i lewą odwracalność. Dla prawej odwracalności rząd tej macierzy powinien być równy liczbie zmiennych wyjścia, a dla lewej odwracalności rząd macierzy powinien być równy liczbie zmiennych wejścia.

5.5 Uogólnione pochodne na skalach czasowych

Dla funkcji określonych na skalach czasowych rachunek różniczkowy bazuje na pojęciach delta- i nabla-pochodnych, które dla skali czasowej $\mathbb{R}$ zachowują się jak zwykła pochodna. Wiadomo, że istnieją uogólnione pochodne zapewniające różniczkowalność odwzorowań, które nie są różniczkowalne w sensie klasycznym. Jedną z takich pochodnych jest kontyngensowa epipochodna wprowadzonej przez [67] dla odwzorowań wielowartościowych. Wspólnie z dr hab. Dorotą Mozyrską oraz dr Ewą Girejko w pracy [A28] wprowadziliśmy kontyngensową epipochodną funkcji określonych na skali czasowej. Podałyśmy relacje między pochodnymi dynamiczymi typu nabla, delta a kontyngensową epipochodną funkcji określonych na skalach czasowych. Używając kontyngensowej epipochodnej scharakteryzowałyśmy funkcje określone na skalach czasowych.

Kluczową rolę w różnych dziedzinach nauki i inżynierii odgrywają funkcje wypukłe. Są one na przykład wykorzystywane przy badaniu podróżniczkowalności funkcji. Bazując na tym, że własność wypukłości funkcji można uogólnić i zdefiniować dla funkcji określonych na dowolnych skalach czasowych, wspólnie z dr hab. Dorotą Mozyrską oraz dr Ewą Girejko zbadałyśmy własności funkcji wypukłych i wyniki nasze omówiłyśmy w pracy [A26]. Sformułowałyśmy definicję podróżniczki na skalach czasowych i pokazałyśmy zależność podróżniczkowalności funkcji od jej wypukłości. W artykule [A26] omówiłyśmy również relacje miedzy pochodnymi dynamicznymi, do których zaliczyłyśmy pochodne delta, nabla i diamentową pochodną, a podróżniczkami funkcji wypukłych.

5.6 Badanie własności układów niecałkowitych rzędów

Innym obszarem moich badań są układy z pochodną lub operatorem różnicowym niecałkowitego rzędu typu Caputo, Riemanna-Liouville'a oraz Grünwalda-Letnikova. Badania te prowadzę wspólnie z dr Ewą Girejko, dr hab. Dorotą Mozyrską oraz dr hab. Ewą Pawłuszewicz od 2010 roku. Prace [A9, A14, A16, A17, A20, B3–B11, C7, C9, C10, C13] są wynikami związanymi z realizacją projektu badawczego NCN „*Własności h-różnicowych układów sterowania niecałkowitego rzędu*".

Rozwój rachunku ułamkowego/niecałkowitego rzędu został zapoczątkowany przez G.W. Leibniza (w roku 1695) oraz L. Eulera (w roku 1738), [68]. W XIX wieku rachunkiem niecałkowitego rzędu zajmowały się między innymi takie osoby jak P.S. Laplace, S. F. Lacroix, J. B. J. Fourier, N. H. Abel, J. Liouville, A. K. Grünwald, A. V. Letnikov, G. F. B. Riemann, H. Laurent, J. Hadamard. W drugiej połowie XX wieku pojawiły się następujące monografie [69–72], zaś na początku XXI wieku rachunek niecałkowitego rzędu znalazł zastosowanie w modelowaniu i rozwiązywaniu problemów praktycznych. Rezultaty badań z zakresu rachunku niecałkowitego rzędu można znaleźć na przykład w publikacjach [73–86]. Układy sterowania niecałkowitych rzędów stały się ważnym narzędziem w modelowaniu procesów. Modele wykorzystujące różnice niecałkowitych rzędów pojawiły się w teorii sterowania między innymi w pracach: [68, 78, 85, 87–98].

5.6.1 Rozwiązania układów różnicowych niecałkowitych rzędów i ich stabilność

Opracowanie podstawowych własności operatorów dyskretnych niecałkowitego rzędu można znaleźć na przykład w pracach [69, 99]. W pracy [B10] porównałyśmy h-różnicowe operatory typu: Caputo, Riemanna-Liouville'a oraz Grünwalda-Letnikova. Podanie zależności między operatorami typu Riemanna-Liouville'a i Grünwalda-Letnikova, pozwoliło pokazać równoważność obu operatorów. Zatem teoria wypracowana dla operatora typu Riemanna-Liouville'a zachodzi również dla operatora typu Grünwalda-Letnikova. W związku z tym w naszych dalszych badaniach ograniczyłyśmy się do dwóch operatorów mianowicie typu Caputo oraz Riemanna-Liouville'a. W pracy [A20] badałyśmy zachowanie się rozwiązań układów z sekwencyjnym operatorem różnicy typu Caputo z krokiem h. Podałyśmy wzory rekurencyjne na jednoznaczne rozwiązania zagadnień początkowych dla rozważanych układów liniowych i semiliniowych. Ponadto sformułowałyśmy warunek wystarczający dodatniości rozważanych układów. Układy z uogólnionymi dwuskładnikowymi różnicami niecałkowitego rzędu były badane w [B9]. Poprzez wybór określonego jądra operatory te można zredukować do standardowych całek i pochodnych niecałkowitego rzędu. W [B9] zbadałyśmy istnienie rozwiązań zagadnień początkowych dla takich układów.

Ważnym aspektem symulacji wielu procesów fizycznych jest aproksymacja rozwiązań układów z czasem ciągłym za pomocą układów z czasem dyskretnym. W pracy [A19] omówiony został problem przybliżeń rozwiązań zagadnień początkowych dla układów niecałkowitych rzędów z czasem ciągłym przez rozwiązania zagadnień początkowych dla układów z czasem dyskretnym. W [A19] zaprezentowano metodę opartą na przybliżeniu pochodnej typu Caputo poprzez h-różnicowy operator typu Caputo wprowadzony w [99].

W naukach technicznych, w których korzysta się z liniowych równań różnicowych, podstawowe charakterystyki układów fizycznych opisywane są w języku $\mathcal{Z}$-transformaty. Przekształcenie $\mathcal{Z}$ jest wygodnym narzędziem badania rozwiązań liniowych równań różnicowych. Wykorzystując klasyczną $\mathcal{Z}$-transformatę w artykułach konferencyjnych [C9, C10], które były prezentowane na konferencji International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications FDA'2014, podałyśmy wzory na rozwiązania zagadnień początkowych dla liniowych układów niecałkowitych rzędów z różnicami typu Caputo oraz Riemanna-Liouville'a. Wykorzystując transformatę $\mathcal{Z}$ w pracy [B6] badałyśmy rozwiązania zagadnień początkowych dla liniowych i semiliniowych równań z dodatnimi różnicami typu Caputo oraz Riemanna-Liouville'a. Zdefiniowałyśmy dyskretną wersję funkcji Mittaga-Lefflera będącej odpowiednikiem eksponenty dyskretnej ułamkowego rzędu i udowodniłyśmy, że przy niektórych wartościach parametrów funkcja ta jest funkcją własną liniowego równania różnicowego z operatorem różnicy typu Caputo lub Riemanna-Liouville'a z rzędem $\alpha \in (q-1, q]$, gdzie $q \in \mathbb{N}$. Funkcja ta została użyta do podania wzorów na rozwiązania zagadnień początkowych dla rozważanych układów. Również w pracy [B3] metoda przekształcenia $\mathcal{Z}$ została wykorzystana do wyznaczenia rozwiązań liniowych układów z sekwencyjną różnicą typu Caputo.

Uogólnieniem artykułów [C9, C10] jest praca [A17], w której podane zostały rozwiązania zagadnień początkowych dla liniowych układów niecałkowitych rzędów z operatorami typu Caputo, Riemanna-Liouville'a oraz Grünwalda-Letnikova. W [A17] podałyśmy wzór na obraz uogólnionej funkcji Mittaga-Lefflera. Ponadto wykorzystując użyteczność transformaty $\mathcal{Z}$ przy określaniu warunków stabilności rozwiązań liniowych układów różnicowych podałyśmy warunki stabilności układów liniowych niecałkowitych rzędów z wymienionymi wyżej operatorami. Problem stabilności liniowych układów z niecałkowitymi dodatnimi rzędami typu Grünwalda-Letnikova został zbadany w artykule [B4], zaś stabilność układów typu Caputo oraz Riemanna-Liouville'a była analizowana w artykule [C5]. W obu artykułach [B4, C5] po przekształceniu układu z niecałkowitymi rzędami dodatnimi do układu z wieloma rzędami, w których rzędy poszczególnych operatorów są z przedziału $(0, 1]$ podałyśmy warunki gwarantujące asymptotyczną stabilność rozwiązań rozważanych układów bazując na przekształceniu $\mathcal{Z}$, które okazało się być efektywnym sposobem badania stabilności układów liniowych niecałkowitych rzędów. W pracy [B1] używając $\mathcal{Z}$-transformaty podałyśmy warunki na asymptotyczną stabilność liniowych układów h-różnicowych niecałkowitego rzędu z operatorem typu Grünwalda-Letnikova. Warunki te pokazują jakie zależności muszą spełniać wyrazy macierzy, aby układ był asymptotycznie stabilny.

Z uwagi na brak interpretacji geometrycznej pochodnych niecałkowitych rzędów trudno jest znaleźć odpowiednie narzędzia umożliwiające analizę stabilności równań niecałkowitych rzędów. W [B7] zaproponowałyśmy definicję stabilności Mittaga-Lefflera nieliniowych układów z różnicami niecałkowitych rzędów typu Caputo oraz Riemanna-Liouville'a. Sformułowałyśmy i udowodniłyśmy warunek, który gwarantuje stabilność Mittaga-Lefflera rozwiązań zagadnień początkowych dla tych układów.

W przypadku układów nieliniowych analiza dynamiki układów niecałkowitych rzędów z matematycznego punktu widzenia jest zagadnieniem złożonym i często także niejednoznacznym podobnie jak w przypadku układów z całkowitymi rzędami. Wyznaczanie na przykład obszaru stabilności za pomocą funkcji Lapunowa wymaga bardzo skomplikowanych obliczeń, patrz [100,101,A16]. W pracy [A16] podane zostały warunki wystarczające stabilności asymptotycznej układów z operatorami różnicy typu Riemanna-Liouville'a i Caputo. Ponadto pokazałyśmy, że do badania stabilności nieliniowych układów niecałkowitych rzędów można użyć metody Lapunowa, którą zastosowałyśmy również w pracy [B11] do badania stabilności układów różnicowych typu Caputo z dwoma niecałkowitymi rzędami. Bazując w głównej mierze na eksperymentach numerycznych w artykule konferencyjnym [C13], który referowałam na konferencji 6th Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications - 2013 IFAC Joint Conference SSSC, pokazałyśmy w jaki sposób bezpośrednią metodę Lapunowa można zastosować do badania stabilności układów nieuatonomicznych z nabla różnicą typu Caputo.

Ogólnie znanym zagadnieniem jest określenie obszaru stabilności poprzez analizę wartości własnych macierzy przybliżenia liniowego. Jest to pierwszy krok w analizie stabilności układu nieliniowego. Następnym krokiem jest stabilizacja układów nieliniowych niecałkowitych rzędów. Linearyzacja oraz badanie problemu stabilności układów przez liniową aproksymację omówione zostały w [A10]. Pokazaliśmy, że stabilność układów niecałkowitych rzędów można zbadać stosując metodę linearyzacji poprzez rozwinięcie w szereg Taylora wokół punktu równowagi, która nie wymaga złożonych przekształceń, jednak stanowi dokładne przybliżenie jedynie w bliskim sąsiedztwie punktu równowagi. Linearyzacja nieliniowych układów niecałkowitych rzędów przedstawiona w pracy [A10] została wykorzystana do sformułowania warunków, które gwarantują lokalną asymptotyczną stabilność nieliniowych układów różnicowych. Wykorzystując fakt, że pochodne niecałkowitego rzędu można przybliżać niecałkowitą h-różnicą pokazany został związek między stabilnością nieliniowych układów różniczkowych niecałkowitych rzędów oraz stabilnością liniowych układów z niecałkowitymi operatorami h-różnicowymi.

5.6.2 Stabilność układów liniowych z operatorami Grünwalda-Letnikova i Caputo typu splotowego

Ponieważ operator Grünwalda-Letnikova jest najczęściej stosowanym operatorem, więc stosując ten operator wspólnie z dr hab. Dorotą Mozyrską oraz profesorem Piotrem Ostalczykiem rozpoczęłam badania związane z realizacją projektu badawczego NCN *„Dyskretne sterowanie typu PID zmiennych niecałkowitych rzędów"*. Nasze badania rozpoczęliśmy od zbadania problemu stabilności dla układów i równań liniowych dyskretnych z operatorem niecałkowitego rzędu (o stałej funkcji rzędu) typu Grünwalda-Letnikova z opóźnieniem w dziedzinie czasu. Otrzymane wyniki zawarliśmy w pracy [A6] analizując równania i układy liniowe z kilkoma opóźnieniami. Własność stabilności rozważanych układów została zbadana za pomocą $\mathcal{Z}$-transformaty. Podaliśmy warunki wystarczające asymptotycznej stabilności dla układów z jednym opóźnieniem o konkretną liczbę kroków k_0. Sformułowane warunki dotyczą określenia własności odpowiedniego położenia wartości własnych macierzy definiujących dany liniowy układ różnicowy. W pracy podaliśmy liczne przykłady graficzne obszarów położenia wartości własnych zapewniających stabilność układu. W tym celu dokonaliśmy implementacji numerycznych w programie Maple.

Dyskusja i rozwiązanie problemu stabilności dla układów i równań liniowych dyskretnych z operatorem typu splotowego niecałkowitego rzędu typu Grünwalda-Letnikova ze zmienną funkcją rzędu (variable-, fractional-order) przeprowadziłyśmy w pracy [A1]. Do rozwiązania problemu użyłyśmy transformaty $\mathcal{Z}$, przyjmując za podstawę obraz koła jednostkowego. Podałyśmy i udowodniłyśmy warunki gwarantujące stabilność rozwiązań układu liniowego i równania skalarnego oraz warunek na niestabilność układu. W podanych warunkach pojawiły się nieskończone szeregi zespolone. Prezentowane w pracy z wysoką dokładnością granice obszarów stabilności zostały wyznaczone na podstawie obliczeń związanych ze skończoną sumą. Uzyskane wyniki dotyczą funkcji rzędu nie tylko z zakresem wartości z przedziału (0,1] lub monotonicznej. Wynik podstawowy jest na tyle ogólny, iż można go stosować do dowolnie zadanych funkcji rzędu. Podobnie jak w pracy [A6] na przykładach zilustrowałyśmy obszary położenia wartości własnych zapewniających stabilność układu.

Ponieważ w przypadku liniowych układów z operatorem Grünwalda-Letnikova otrzymujemy tylko zerowe punkty równowagi, a układy z operatorem Caputo dopuszczają niezerowe stany równowagi, więc nasze aktualne badania są skoncentrowane na zbadaniu problemu stabilności dla układów liniowych z czasem dyskretnym z operatorem niecałkowitego ze zmienną funkcją rzędu typu Caputo, patrz [C1, C2].

Innym problemem pojawiającym się w teorii sterowania jest obserwowalność i sterowalność. Zagadnienia te dla liniowych układów niecałkowitych rzędów z operatorem typu Caputo zostały omówione w [A14]. Liniowe układy równań h-różnicowych z dwoma niecałkowitymi rzędami z operatorem typu Caputo zostały zbadane w artykule [B8]. Pokazałyśmy w jakich sytuacjach mogą pojawić się takie układy. Zwróciłyśmy uwagę na to, w jaki sposób stan początkowy jednego z układów wpływa na rząd następnego układu. Omówiłyśmy problem sterowalności i obserwowalności tego typu układów. W przypadku nieliniowych układów niecałkowitych rzędów w [A9] zbadałyśmy lokalną obserwowalność i sterowalność tych układów bazując na ich linearyzacji.

Problem stabilizacji liniowego układu sterowania ułamkowego rzędu z operatorem h-różnicowym typu Grünwalda-Letnikova został omówiony w artykule konferencyjnym [C7]. Wykorzystując przekształcenie $\mathcal{Z}$ podałyśmy warunek konieczny i wystarczający stabilizacji liniowego wieloparametrowego układu sterowania z h-różnicą Grünwalda-Letnikova poprzez liniowe sprzężenie zwrotne od stanu. Warunek ten jest związany z położeniem pierwiastków równania charakterystycznego związanego z danym układem.

Problem estymacji nieznanego stanu układu na podstawie wejść i wyjść został zbadany w pracy [A8]. Jest on związany z konstrukcją obserwatora dla liniowych układów niecałkowitych rzędów z różnicami typu Riemanna-Liouville'a oraz Grünwalda-Letnikova. Bazując na $\mathcal{Z}$-transformacie podałam warunek wystarczający istnienia obserwatora niecałkowitego rzędu dla prezentowanych liniowych układów różnicowych.

5.6.3 Problem drożności rozwiązań układów niecałkowitych rzędów

Analizując układy z operatorami niecałkowitego rzędu badałyśmy problem drożności rozwiązań tych układów. Wspólnie z dr Ewą Girejko i dr hab. Dorotą Mozyrską w pracach [A23, A24] sformułowałyśmy i udowodniłyśmy warunki drożności rozwiązań nieliniowych układów niecałkowitego rzędu z operatorami Riemanna-Liouville'a oraz Caputo. Warunek wystarczający drożności rozwiązań układu równań różniczkowych niecałkowitego rzędu z pochodną typu Caputo nie został poprawnie udowodniony, gdyż w dowodzie twierdzenia 9 w artykule [A24, Theorem 9] pominęłyśmy składnik związany z warunkiem styczności, co zostało zauważone i poprawione przez O. Carja, T. Doncheva, M. Rafaqat i R. Ahmeda w artykule [102]. W pracy [A15] podałyśmy warunek konieczny drożności rozwiązań układów niecałkowitego rzędu z pochodną Caputo. Zależność między operatorami Caputo i Riemanna-Liouville'a pozwoliła zbadać problem drożności z tzw. pamięcią (memo-viability). Ponieważ zauważyłyśmy, że warunki wystarczające drożności podane w [A15] opierają się na wynikach pracy [A24], więc stwierdzenie 16 i wniosek 18 w [A15, Proposition 16, Corollary 18] należałoby zmodyfikować opierając się na wynikach pracy [102]. Możliwość aproksymacji rozwiązań układu z czasem ciągłym przez rozwiązania układu z czasem dyskretnym [A19] umożliwiła zbadanie problemu drożności rozwiązań układów różnicowych niecałkowitych rzędów. W artykule [B5] sformułowałyśmy warunki wystarczające na istnienie drożnych rozwiązań układów różnicowych niecałkowitych rzędów poprzez warunki istnienia takich rozwiązań dla układów z czasem ciągłym.

5.7 Konsensus dla układów wieloagentowych

Publikacje [A4, A5, A7, A11, B2, C3, C4, C6] są wynikami badań związanych z realizacją projektu NCN „*Konsensus w systemach dynamicznych niecałkowitego rzędu oraz w systemach na skalach czasowych*”. Mówiąc o konsensusie musimy wyobrazić sobie grupę osób/ekspertów, którzy musza działać razem jako zespół lub komisja. Każdy z ekspertów ma swoje zdanie, ale jest gotów do współpracy oraz do zmiany opinii pod wpływem interakcji z innymi ekspertami/sąsiadami. Dojście do konsensusu (porozumienia) jest jednym ze zjawisk pojawiających się w grupach tzw. agentów będących ze sobą w interakcji. Mówimy wówczas o dynamice opinii. W obszarze dynamiki opinii można wyróżnić model wprowadzony przez Ulricha Krausego [103] znany również jako model Hegelsmanna–Krausego [104,105] oraz model Cuckera-Smale'a [106]. W pracach [A4, A5, A7, A11, B2, C3, C4, C6] zbadałyśmy układy wieloagenetowe, w których agenci/eksperci współdziałają zgodnie z pewnymi ustalonymi regułami. Konsensus w modelach niecałkowitego rzędu z czasem dyskretnym typu Krausego czy Hegselmanna–Krausego został zbadany w pracy [A11]. Wspólnie z dr hab. Dorotą Mozyrską podałyśmy opis własności modeli typu Hegselmanna–Krausego z operatorem niecałkowitego rzędu z czasem dyskretnym. Użyłyśmy najczęściej stosowanego operatora niecałkowitego rzędu typu Grünwalda-Letnikova. Wprowadziłyśmy definicję konsensusu z liderami. Podałyśmy i udowodniłyśmy warunek konieczny osiągania pojedynczego konsensusu w układzie o dowolnej skończonej liczbie agentów. W celu lepszego zilustrowania przebiegów konsensusu zdefiniowanego jako zbieżność wzdłuż trajektorii, zastosowałyśmy normalizację wektorów w każdym kroku, dzieląc wartość opinii przez najwyższą opinię w danym kroku. Dokonałyśmy analizy twierdzenia dotyczącego zbieżności w klastrach dowodząc odpowiedniego twierdzenia.

Praca [B2] dotyczy problemu konsensusu w modelu niecałkowitego rzędu z czasem ciągłym typu Hegselmanna–Krausego. W badanym układzie interakcje między agentami zdefiniowane są tak, jak w przypadku modelu Hegselmanna–Krausego, ale wzbogacone poprzez pamięć, którą wnosi operator niecałkowitego rzędu zastosowany do lewej strony układu. Zaproponowana postać układu, w zależności od rzędu równania, daje możliwość badania ciągłej bądź dyskretnej wersji modelu.

W pracy [A7] zbadałyśmy dwa modele: model rzędu pierwszego (typu odpowiadającego modelowi Krausego) i model rzędu drugiego (typu odpowiadającego modelowi Cuckera-Smale'a), oba z czasem dyskretnym. W równaniach na położenie i prędkość wprowadziłyśmy pamięć poprzez użycie po lewej stronie układu dyskretnego operatora niecałkowitego rzędu Grünwalda-Letnikova. Zaproponowałyśmy sterowanie dla którego zachodzi konsensus z liderem. Podstawą do badań była analiza stabilności układu uzyskanego po odpowiedniej transformacji zmiennych, co odpowiada warunkom zapewniającym pojawienie się konsensusu z liderem w obu układach. Z uwagi na ten fakt rozwiązania opracowanych modeli nie zbiegają do stałych wartości, a dążą do nieskończoności zgodnie z trajektorią wskazanego lidera. Symulacje numeryczne wykonane w programie Maple pozwoliły potwierdzić, że wybrany model jest właściwy i otrzymujemy zbieżność do zachowań lidera dla każdego rzędu z przedziału $[0, 1]$. Główna praca została podzielona na dwie części: badania nad układami z tzw. pojedynczym sumatorem (odpowiednik pierwszego rzędu) oraz na badania nad podwójnym sumatorem (odpowiednik drugiego rzędu). Zaprezentowane w pracy przykłady i przeprowadzone symulacje komputerowe potwierdzają otrzymane wyniki i pokazują efektywność otrzymanych warunków gwarantujących konsensus. Rozszerzeniem wyników podanych w [A7] jest praca [A5], w której przeprowadziłyśmy podobne badania. Bazując na warunkach podanych w [A6] związanych z asymptotyczną stabilnością dyskretnych liniowych układów z opóźnieniem w pracy [A5] zbadaliśmy konsensus z liderem w przypadku, gdy stan lidera jest dostępny tylko dla wybranych agentów (w przykładach lider ma wpływ na jednego agenta). Sformułowałyśmy i udowodniłyśmy warunki osiągania konsensusu oraz przeprowadziłyśmy analizę numeryczną dla przykładu z sześcioma agentami. W pracy [A5] pamięć została wprowadzona do układu nie tylko przez wzięcie operatora Grünwalda-Letnikova z czasem dyskretnym niecałkowitego rzędu po lewej stronie równań opisujących model, ale również przez uwzględnienie dowolnego opóźnienia w układzie.

Symulacje numeryczne modelu typu Cuckera-Smale'a z czasem ciągłym przeprowadzono w pracach [A4, C3, C4, C6]. Ponieważ pierwsze równanie wiąże ze sobą drogę i prędkość agentów, więc opisane jest układem różniczkowym zwyczajnym. Operator różniczkowy niecałkowitego rzędu Grünwalda-Letnikova typu splotowego jest użyty po lewej stronie równań opisujących dynamikę prędkości. W związku z tym pamięć wprowadzona zostaje tutaj tylko w równaniach związanych z prędkością. Aczkolwiek, możliwe jest wprowadzenie pamięci również do pierwszego równania. Podstawą do badań jest analiza asymptotycznej stabilności nieliniowego układu opisującego zachowanie się różnic stanów i prędkości poszczególnych agentów. Dokonanie linearyzacji umożliwiło wyznaczenie wartości własnych macierzy związanej z układem zlinearyzowanym. W rezultacie możliwe było sformułowanie warunków wystarczających na lokalną asymptotyczną stabilność nieliniowego układu wyjściowego. Otrzymane oszacowania na parametr H są bardzo silne, ale dają warunek wyjściowy do analizy numerycznej. Przedstawiłyśmy przykłady trajektorii prędkości odpowiadające różnym rzędom oraz różnym wartościom parametru H. Przeprowadzona analiza dotyczy przybliżeń układów z czasem ciągłym za pomocą odpowiednich układów z czasem dyskretnym. W pracach [C4, C6] badane są modele z dwoma agentami, w których niecałkowity rząd pojawiający się w równaniach związanych z prędkością był w [C6] stały, zaś w [C4] funkcja rzędu zmieniała się w czasie. Podobnie zmienna funkcja rzędu została zastosowana do modelu w pracy [C3], a stała w [A4].

Obecnie badamy modele z operatorem typu Caputo. Modele te wydają się być ciekawsze ze względu na to, że układy z operatorem Caputo dopuszczają niezerowe stany równowagi. Dodatkowo planujemy uwzględnić fakt, że agenci poruszają się w $\mathbb{R}^3$, w ten sposób otrzymujemy model, który naszym zdaniem jest bardziej realistyczny.

W swojej pracy badawczej zajmowałam się także tematyką dotyczącą aproksymacji, interpolacji i modelowania danych spektroradiometrycznych z pomiarów LEDów, [A29,A30, B13]

Literatura

Publikacje wchodzące w skład osiągnięcia naukowego:

[**H1**] Z. Bartosiewicz, J. Belikov, Ü. Kotta, M. Wyrwas, *State feedback linearization of nonlinear control systems on homogeneous time scales*, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 31 (2019) 69–85. doi:10.1016/j.nahs.2018.08.002.

[**H2**] M. Wyrwas, *Strong accessibility and integral manifolds of the continuous-time nonlinear control systems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 469:2 (2019) 935-959. doi:https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.09.045.

[**H3**] Z. Bartosiewicz, Ü. Kotta, T. Mullari, M. Tõnso, M. Wyrwas, *On accessibility conditions for state space nonlinear control systems on homogeneous time scales*, Systems and Control Letters 98 (2016) 8–13. doi:10.1016/j.sysconle.2016.09.018.

[**H4**] Z. Bartosiewioz, Ü. Kotta, M. Tõnso, M. Wyrwas, *Accessibility conditions of MIMO nonlinear control systems on homogeneous time scales*, Mathematical Control and Related Fields 6:2 (2016) 217–250. doi:10.3934/mcrf.2016002.

[**H5**] Z. Bartosiewicz, Ü. Kotta, M. Tõnso, M. Wyrwas, *Static state feedback linearization of nonlinear control systems on homogeneous time scales*, Mathematics of Control, Signals, and Systems 27:4 (2015) 523–550. doi:10.1007/s00498-015-0150-5.

Publikacje w czasopismach znajdujących się w bazie Journal Citation Report (JCR):

[A1] D. Mozyrska, M. Wyrwas, *Systems with fractional variable-order difference operator of convolution type and its stability*, Elektronika Ir Elektrotechnika 24:5 (2018) 69–73. doi:10.5755/j01.eie.24.5.21846.

[A2] Z. Bartosiewicz, Ü. Kotta, E. Pawłuszewicz, M. Tõnso, M. Wyrwas, *Popov form and the explicit equations of inverse systems*, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences 67:4 (2018) 342–355. doi:10.3176/proc.2018.4.04.

[A3] Z. Bartosiewicz, E. Pawłuszewicz, M. Wyrwas, Ü. Kotta, M. Tõnso, *The strong Popov form of nonlinear input-output equations*, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences 67:3 (2018) 193–206. doi:10.3176/proc.2018.3.01.

[A4] E. Girejko, D. Mozyrska, M. Wyrwas, *Numerical analysis of behaviour of the Cucker-Smale type models with fractional operators*, Journal of Computational and Applied Mathematics 339 (2018) 111–123. doi:10.1016/j.cam.2017.12.013.

[A5] E. Girejko, D. Mozyrska, M. Wyrwas, *Behaviour of fractional discrete-time consensus models with delays for summator dynamics*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences 66:4 (2018) 403–410. doi:10.24425/124255.

[A6] D. Mozyrska, P. Ostalczyk, M. Wyrwas, *Stability conditions for fractional-order linear equations with delays*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences 66:4 (2018) 449–454. doi:10.24425/124261.

[A7] M. Wyrwas, D. Mozyrska, E. Girejko, *Fractional discrete-time consensus models for single- and double-summator dynamics*, International Journal of Systems Science 49:6 (2018) 1212–1225. doi:10.1080/00207721.2018.1442511.

[A8] M. Wyrwas, *Full-order observers for linear fractional multi-order difference systems*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences 65:6 (2017) 891–898. doi:10.1515/bpasts-2017-0096.

[A9] D. Mozyrska, E. Pawłuszewicz, M. Wyrwas, *Local observability and controllability of nonlinear discrete-time fractional order systems based on their linearisation*, International Journal of Systems Science 48:4 (2017) 788–794. doi:10.1080/00207721.2016.1216197.

[A10] D. Mozyrska, M. Wyrwas, *Stability by linear approximation and the relation between the stability of difference and differential fractional systems*, Mathematical Methods in the Applied Sciences 40:11 (2017) 4080–4091. doi:10.1002/mma.4287.

[A11] D. Mozyrska, M. Wyrwas, *Fractional discrete-time of Hegselmann-Krause's type consensus model with numerical simulations*, Neurocomputing 216 (2016) 381–392. doi:10.1016/j.neucom.2016.08.010.

[A12] Z. Bartosiewicz, Ü. Kotta, T. Mullari, M. Tõnso, E. Pawluszewicz, M. Wyrwas, *Nabla derivatives associated with nonlinear control systems on homogeneous time scales*, Nonlinear Analysis: Modelling and Control 21:4) (2016) 547–563. doi:10.15388/NA.2016.4.8.

[A13] Z. Bartosiewicz, J. Belikov, Ü. Kotta, M. Tõnso, M. Wyrwas, *On the transformation of a nonlinear discrete-time input-output system into the strong row-reduced form*, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences 65:3 (2016) 220–236. doi:10.3176/proc.2016.3.02.

[A14] D. Mozyrska, E. Pawłuszewicz, M. Wyrwas, *The h-difference approach to controllability and observability of fractional linear systems with Caputo-type operator*, Asian Journal of Control 17:4 (2015) 1163–1173. doi:10.1002/asjc.1034.

[A15] E. Girejko, D. Mozyrska, M. Wyrwas, *On memo-viability of fractional equations with the Caputo derivative*, Advances in Difference Equations 2015:58 (2015), 11 stron. doi:10.1186/s13662-015-0403-0.

[A16] M. Wyrwas, E. Pawluszewicz, E. Girejko, *Stability of nonlinear h-difference systems with n fractional orders*, Kybernetika 54:1 (2015) 112–136. doi:10.14736/kyb-2015-1-0112.

[A17] D. Mozyrska, M. Wyrwas, *The $\mathcal{Z}$-transform method and delta type fractional difference operators*, Discrete Dynamics in Nature and Society 2015. doi:10.1155/2015/852734.

[A18] V. Kaparina, Ü. Kotta, M. Wyrwas, *Observable space of the nonlinear control system on a homogeneous time scale*, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences 63:1 (2014) 11–25. doi:10.3176/proc.2014.1.04.

[A19] D. Mozyrska, E. Girejko, M. Wyrwas, *Fractional nonlinear systems with sequential operators*, Central European Journal of Physics 11:10 (2013) 1295–1303. doi:10.2478/s11534-013-0223-3.

[A20] M. Wyrwas, D. Mozyrska, E. Girejko, *On solutions to fractional discrete systems with sequential h-differences*, Abstract and Applied Analysis 2013 (2013) 11 stron. doi:10.1155/2013/475350.

[A21] Z. Bartosiewicz, Ü. Kotta, E. Pawłuszewicz, M. Tõnso, M. Wyrwas, *Algebraic formalism of differential p-forms and vector fields for nonlinear control systems on homogeneous time scales*, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences 62:4 (2013) 215–226. doi:10.3176/proc.2013.4.02.

[A22] D. Mozyrska, E. Girejko, M. Wyrwas, *Nonlinear fractional cone systems with the Caputo derivative*, Applied Mathematics Letters 25:4 (2012) 752–756. doi:10.1016/j.aml.2011.10.015.

[A23] D. Mozyrska, E. Girejko, M. Wyrwas, *A necessary condition of viability for fractional differential equations with initialization*, Computers and Mathematics with Applications 62:9 (2011) 3642–3647. doi:10.1016/j.camwa.2011.09.017.

[A24] E. Girejko, D. Mozyrska, M. Wyrwas, *A sufficient condition of viability for fractional differential equations with the Caputo derivative*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 381:1 (2011) 146–154. doi:10.1016/j.jmaa.2011.04.004.

[A25] Z. Bartosiewicz, Ü. Kotta, E. Pawłuszewicz, M. Wyrwas, *Control systems on regular time scales and their differential rings*, Mathematics of Control, Signals, and Systems 22:3 (2011) 185–201. doi:10.1007/s00498-011-0058-7.

[A26] M. Wyrwas, D. Mozyrska, E. Girejko, *Subdifferentials of convex functions on time scales*, Discrete and Continuous Dynamical Systems 29:2 (2011) 671–691. doi:10.3934/dcds.2011.29.671.

[A27] Ü. Kotta, B. Rehák, M. Wyrwas, *On submersivity assumption for nonlinear control systems on homogeneous time scales*, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences 60:1 (2011) 25–37. doi:10.3176/proc.2011.1.03.

[A28] E. Girejko, D. Mozyrska, M. Wyrwas, *Contingent epiderivatives of functions on time scales*, Journal of Convex Analysis 18:4 (2011) 1047–1064.

[A29] D. Mozyrska, I. Fryc, M. Wyrwas, *Methods for a numerical description of spectroradiometric data of D65 illuminant regarding to uncertainties of measurement interpolation and approximation* [*Metody numerycznego opisu rozkładu egzytancji widmowej iluminantu D65 z uwzględnieniem niepewności pomiarowych wnoszonych przez użyty spektroradiometr*], Przegląd Elektrotechniczny 87:4 (2011) 66–68.

[A30] D. Mozyrska, I. Fryc, M. Wyrwas, *Nonlinear numerical models of spectral power distributions of black body* [*Nieliniowe modele pomiarowe rozkładu egzytancji widmowej ciała czarnego*], Przegląd Elektrotechniczny 87:4) (2011) 116–119.

[A31] D. Casagrande, Ü. Kotta, M. Tõnso, M. Wyrwas, *Transfer equivalence and realization of nonlinear input-output delta-differential equations on homogeneous time scales*, IEEE Transactions on Automatic Control 55:11) (2010) 2601–2606. doi:10.1109/TAC.2010.2060251.

[A32] Ü. Kotta, Z. Bartosiewicz, E. Pawłuszewicz, M. Wyrwas, *Irreducibility, reduction and transfer equivalence of nonlinear input-output equations on homogeneous time scales*, Systems and Control Letters 58:9 (2009) 646–651. doi:10.1016/j.sysconle.2009.04.006.

[A33] M. Wyrwas, *Multiobservers and their application to output stabilization*, Control and Cybernetics 35:4 (2006) 977–995.

Publikacje w czasopismach międzynarodowych lub krajowych (nie będących w bazie JCR) oraz rozdziały w monografiach:

[B1] D. Mozyrska, M. Wyrwas, *Explicit criteria for stability of fractional h-difference two-dimensional systems*, International Journal of Dynamics and Control 5:1 (2017) 4–9. doi:10.1007/s40435-016-0239-9.

[B2] E. Girejko, D. Mozyrska, M. Wyrwas, *On the fractional continuous-time Hegselmann-Krause's type consensus model*, Lecture Notes in Electrical Engineering 407 (2017) 21–32. doi:10.1007/978-3-319-45474-0_3.

[B3] E. Girejko, E. Pawłuszewicz, M. Wyrwas, *The $\mathcal{Z}$-transform method for sequential fractional difference operators*, Lecture Notes in Electrical Engineering 357 (2016) 57–67. doi:10.1007/978-3-319-23039-9_5.

[B4] M. Wyrwas, D. Mozyrska, *Stability of linear discrete-time systems with fractional positive orders*, Lecture Notes in Electrical Engineering 357 (2016) 157–166. doi:10.1007/978-3-319-23039-9_13.

[B5] E. Girejko, D. Mozyrska, M. Wyrwas, *Viable solutions to fractional difference and differential equations*, Lecture Notes in Electrical Engineering 320 (2015) 15–24. doi:10.1007/978-3-319-09900-2_2.

[B6] D. Mozyrska, M. Wyrwas, *Fractional linear equations with discrete operators of positive order*, Lecture Notes in Electrical Engineering 320 (2015) 47–58. doi:10.1007/978-3-319-09900-2_5.

[B7] M. Wyrwas, D. Mozyrska, *On Mittag-Leffler stability of fractional order difference systems*, Lecture Notes in Electrical Engineering 320 (2015) 209–220. doi:10.1007/978-3-319-09900-2_19.

[B8] E. Pawłuszewicz, D. Mozyrska, M. Wyrwas, *Uwagi o liniowych układach złożonych z dwoma niecałkowitymi rzędami*, w: K. Malinowski, J. Józefczyk, J. Świątek (Eds.), Aktualne Problemy Automatyki i Robotyki, Vol. 20, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 2014, 216–224, monografie/ Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk t. 20.

[B9] E. Girejko, D. Mozyrska, M. Wyrwas, *Solutions of systems with two-terms fractional difference operators*, Lecture Notes in Electrical Engineering 257 LNEE (2013) 183–189. doi:10.1007/978-3-319-00933-9_16.

[B10] D. Mozyrska, E. Girejko, M. Wyrwas, *Comparison of h-difference fractional operators*, Lecture Notes in Electrical Engineering 257 LNEE (2013) 191–197. doi:10.1007/978-3-319-00933-9_17.

[B11] M. Wyrwas, E. Girejko, D. Mozyrska, E. Pawłuszewicz, *Stability of fractional difference systems with two orders*, Lecture Notes in Electrical Engineering 257 LNEE (2013) 41–52. doi:10.1007/978-3-319-00933-9_4.

[B12] Z. Bartosiewicz, Ü. Kotta, E. Pawłuszewicz, M. Tõnso, M. Wyrwas, *Reducibility condition for nonlinear discrete-time systems: behavioral approach*, Control and Cybernetics 42:2 (2013) 329–346.

[B13] D. Mozyrska, M. Wyrwas, I. Fryc, *The determination of the leds colorimetric parameters, in the range of their operating temperature* [*Wyznaczanie parametrów kolorymetrycznych leda w pełnym zakresie temperatur pracy*], Przegląd Elektrotechniczny 88:4 A (2012) 232–234.

[B14] Z. Bartosiewicz, Ü. Kotta, E. Pawłuszewicz, M. Wyrwas, *Algebraic formalism of differential one-forms for nonlinear-control systems on time scales*, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences: Physics, Mathematics 56:3) (2007) 264–282.

[B15] M. Wyrwas, *Analytic control systems and their properties related to observers*, Rendiconti del Seminario Matematico 64:1 (2006) 111–119.

[B16] M. Wyrwas, *Multiobservers for nonlinear systems*, Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej. Matematyka, Fizyka, Chemia 20 (2001) 87–98.

Publikacje w recenzowanych materiałach konferencyjnych:

[C1] D. Mozyrska, M. Wyrwas, *Stability of linear discrete-time systems with the Caputo fractional-, variable-order h-difference operator of convolution type*, w: Proceedings of International Conference on Fractional Differentiation and its Applications (ICFDA) 2018, 4 strony. Available at SSRN: doi:10.2139/ssrn.3270846.

[C2] D. Mozyrska, M. Wyrwas, *Stability of linear systems with Caputo fractional-, variable-order difference operator of convolution type*, w: 41st International Conference on Telecommunications and Signal Processing: TSP 2018, 2018, 619–622. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc. (2018). doi:10.1109/TSP.2018.8441360.

[C3] E. Girejko, D. Mozyrska, M. Wyrwas, *On the fractional variable order Cucker-Smale type model*, IFAC-PapersOnLine 51:4 (2018) 693–697. doi:10.1016/j.ifacol.2018.06.184.

[C4] E. Girejko, D. Mozyrska, M. Wyrwas, *The fractional variable-order Cucker-Smale type model for a couple of agents*, w: 2018 23rd International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2018, 2018, 105–109. doi:10.1109/MMAR.2018.8485966.

[C5] D. Mozyrska, M. Wyrwas, *Stability of discrete fractional linear systems with positive orders*, IFAC-PapersOnLine 50:1 (2017) 8115–8120. doi:10.1016/j.ifacol.2017.08.1250.

[C6] E. Girejko, D. Mozyrska, M. Wyrwas, *Behaviour of the fractional Cucker-Smale type model for a couple of agents*, w: 2017 22nd International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2017, 2017, 762–767. doi:10.1109/MMAR.2017.8046924.

[C7] D. Mozyrska, M. Wyrwas, E. Pawluszewicz, *Stabilization of linear multi-parameter fractional difference control systems*, w: 2015 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2015, 2015, 315–319. doi:10.1109/MMAR.2015.7283894.

[C8] Z. Bartosiewicz, Ü. Kotta, E. Pawluszewicz, M. Tõnso, M. Wyrwas, *Transforming a set of nonlinear input-ouput equations into Popov form*, w: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 54rd IEEE Conference on Decision and Control,CDC 2015, 2015, 7131–7136. doi:10.1109/CDC.2015.7403344.

[C9] D. Mozyrska, M. Wyrwas, *Solutions of fractional linear difference systems with Caputo-type operator via transform method*, w: 2014 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications, ICFDA 2014, 2014. doi:10.1109/ICFDA.2014.6967386.

[C10] D. Mozyrska, M. Wyrwas, *Solutions of fractional linear difference systems with Riemann-Liouville-type operator via transform method*, w: 2014 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications, ICFDA 2014, 2014. doi:10.1109/ICFDA.2014.6967410.

[C11] Z. Bartosiewicz, Ü. Kotta, E. Pawluszewicz, M. Wyrwas, *Differential rings associated with control systems on regular time scales*, w: 2009 European Control Conference, ECC 2009, 2014, 242–247.

[C12] J. Belikov, Ü. Kotta, M. Tõnso, Z. Bartosiewicz, M. Wyrwas, *Dynamic feedback linearization of nonlinear control systems on homogenous time scale*, w: 2014 IEEE Conference on Control Applications, CCA 2014, 2014, 947–952. doi:10.1109/CCA.2014.6981458.

[C13] M. Wyrwas, D. Mozyrska, E. Girejko, *Stability of discrete fractional-order nonlinear systems with the nabla Caputo difference*, Vol. 46, 2013, 167–171. doi:10.3182/20130204-3-FR-4032.00216.

[C14] D. Casagrande, Ü. Kotta, M. Tõnso, M. Wyrwas, *Mathematica application for nonlinear control systems on time scales*, w: International Congress on Computer Application and Computational Science: CACS 2010, Singapur, 2010, 621–624.

[C15] Ü. Kotta, B. Rehák, M. Wyrwas, *Reduction of MIMO nonlinear systems on homogeneous time scales*, w: IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline), Vol. 43, 2010, 1249–1254. doi:10.3182/20100901-3-IT-2016.00007.

[C16] D. Casagrande, Ü. Kotta, M. Wyrwas, M. Tõnso, *Transfer equivalence and reduction of nonlinear delta differential equations on homogeneous time scale*, w: Proceedings of the American Control Conference, 2008, 5136–5141. doi:10.1109/ACC.2008.4587309.

[C17] E. Petlenkov, J. Belikov, S. Nõmm, M. Wyrwas, *Dynamic output feedback linearization based adaptive control of nonlinear MIMO systems*, w: Proceedings of the American Control Conference, 2008, 3446–3451. doi:10.1109/ACC.2008.4587026.

[C18] Z. Bartosiewicz, E. Piotrowska, M. Wyrwas, *Stability, stabilization and observers of linear control systems on time scales*, w: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, 2007, 2803–2808. doi:10.1109/CDC.2007.4434182.

[C19] D. Casagrande, Ü. Kotta, M. Wyrwas, *State-space realization of nonlinear input-output delta differential equations on homogeneous time scale*, w: Preprints of the 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control, SSSC07, Foz do Iguassu, Brazil, 2007, 6 stron.

[C20] Z. Bartosiewicz, Ü. Kotta, E. Pawłuszewicz, M. Wyrwas, *Irreducibility conditions for nonlinear input-output equations on homogeneous time scales*, w: IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline), Vol. 7, 2007, 705–710.

[C21] M. Wyrwas, Z. Bartosiewicz, *Observers for locally observable systems*, w: M. Guerra, D. Torres (Eds.), Preprints of the Third European Meeting on Control, Optimization and Computation, University of Aveiro, Aveiro, Portugal, 2005, 181–194.

[C22] M. Wyrwas, Z. Bartosiewicz, *Perfect observers for nonlinear control systems*, w: R. Kaszyński (Ed.), Proceedings of the 9th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics: MMAR'2003, Vol. 1, Politechnika Szczecińska, Instytut Automatyki Przemysłowej, IEEE. Poland Section, Wydaw. Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Miedzyzdroje, Poland, 2003, 487–490.

[C23] M. Wyrwas, Z. Bartosiewicz, *On families of multiobservers for nonlinear systems*, w: S. Domek, R. Kaszyński (Eds.), Proceedings of the 8th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics: MMAR'2002, Vol. 2, Politechnika Szczecińska, Instytut Automatyki Przemysłowej, IEEE. Poland Section, Wydaw. Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Szczecin, Poland, 2002, 1281–1284.

[C24] M. Wyrwas, *Osobliwości a obserwowalność*, w: Ogólnopolskie Warsztaty dla młodych matematyków: III Ogólnopolskie Warsztaty dla młodych matematyków, IV Ogólnopolskie Warsztaty dla młodych matematyków, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 2002, 49–55.

[C25] Z. Bartosiewicz, M. Wyrwas, *On multiobservers for nonlinear systems*, w: N. E. Mastorakis (Ed.), Proceedings of the 3rd World Multiconference on Circuits, Systems, Comunications and Computers: CSCC'99, Vol. 1, IEEE, IMACS, Athens, 1999, 4 strony.

[C26] Z. Bartosiewicz, M. Kosk (obecnie Wyrwas), D. Mozyrska, *Local observability and quasi-observes for nonlinear systems*, w: A. Beghi, L. Finesso, G. Picci (Eds.), Proceedings of the MTNS'98 Symposium, Mathematical Theory of Networks and Systems, Universitá di Padova, IL POLIGRAFO, Padova, Italy, 1998, 61–64.

Literatura uzupełniająca

[1] J. Zabczyk, *Mathematical Control Theory - An Introduction*, Birkhäuser, Boston, 1995.

[2] T. Kaczorek, *Teoria sterowania i systemów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1999.

[3] H. J. Sussmann, V. Jurdjevic, *Controllability of nonlinear systems*, Journal of Differential Equations 12 (1972) 95–116. doi:10.1016/0022-0396(72)90007-1.

[4] E. Aranda-Bricaire, C. H. Moog, J. B. Pomet, *A linear algebraic framework for dynamic feedback linearization*, IEEE Trans. Autom. Control 40:1 (1995) 127–132.

[5] J. F. Pommaret, *Géométrie différentielle algébrique et théorie du contrôle*, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Paris 302 (1986) 547–550.

[6] G. Conte, C. H. Moog, A. M. Perdon, *Algebraic Methods for Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag*, London, UK, 2007.

[7] B. Jakubczyk, D. Normand-Cyrot, *Orbites de pseudo-groupes de difféomorphismes et commandabilité des systèmes non linéaires en temps discret*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Math. 298 (1984) 257–260.

[8] B. Jakubczyk, E. Sontag, *Controllability of nonlinear discrete-time systems: a Lie-algebraic approach*, SIAM J. Control Optim. 28:1 (1990) 1–33. doi:http://dx.doi.org/10.1137/0328001.

[9] F. Albertini, E. Sontag, *Discrete-time transitivity and accessibility: analytic systems*, SIAM J. Control Optim. 31:6 (1993) 1599–1622. doi:http://dx.doi.org/10.1137/0331075.

[10] E. Aranda-Bricaire, Ü. Kotta, C. H. Moog, *Linearization of discrete-time systems*, SIAM J. Control Optim. 34:6 (1996) 1999–2023.

[11] J. W. Grizzle, *A linear algebraic framework for the analysis of discrete-time nonlinear systems*, SIAM J. Control Optim. 31:4 (1993) 1026–1044.

[12] M. Fliess, *Should the theoriesfor continuous-time and discrete-time linear and nonlinear systems really look alike?*, w: Proc. IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems Design, 1989, 186–191.

[13] M. Fliess, *Automatique en temps discret et algèbre aux différences*, Forum Mathematicum 2 (1990) 213–232.

[14] G. Conte, A. Perdon, M. C.H., *The differential field associated to a general analytic nonlinear system*, IEEE Trans. Autom. Contr 38 (1993) 1120–1124.

[15] B. Jakubczyk, W. Respondek, *On linearization of control systems*, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences 28 (1980) 517–522.

[16] L. R. Hunt, R. Su, *Linear equivalents of nonlinear time varying systems*, w: Int. Symp. MTNS, Santa Monica, 1981.

[17] J. W. Grizzle, *Feedback linearization of discrete-time systems*, w: Analysis and Optimization of Systems, Vol. 83 of Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Berlin / Heidelberg, 1986, 271–281.

[18] B. Jakubczyk, *Feedback linearization of discrete-time systems*, System & Control Letters 9 (1987) 411–416.

[19] L. Hunt, R. , Su, G. Meyer, *Design for multi-input nonlinear systems*, w: R. Brockett, R. Millmann, H. Sussmann (Eds.), Differential Geometric Control Theory, Birkhäuser, Boston, 1983, 268–298.

[20] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, London, UK, 1995.

[21] R. Cohn, *Difference Algebra*, Wiley-Interscience, New York, 1965.

[22] I. Kaplansky, *An Introduction to Differential Algebra*, Hermann, Paris, 1957.

[23] S. Hilger, *Ein masskettenkalkül mit anwendung auf zentrumsmannigfaltigkeiten*, Ph.D. thesis, Universität Würzburg (1988).

[24] C. Halaucă, C. Lazăr, *Delta domain predictive control for fast, unstable and non-minimum phase systems*, Control Eng. Appl. Inform. 10:4) (2008) 26–31.

[25] M. A. Chadwick, V. Kadirkamanathan, S. A. Billings, *Analysis of fast-sampled non-linear systems: Generalised frequency response functions for δ-operator models*, Signal Processing 86:11 (2006) 3246–3257.

[26] H. Fan, P. De, *High speed adaptive signal progressing using the delta operator*, Digital Signal Processing 11 (2001) 3–34.

[27] M. B. Lauritsen, M. Rostgaard, N. K. Poulsen, *GPC using a delta-domain emulator-based approach*, Int. J. Control 68:1 (1997) 219–232.

[28] J. I. Yuz, G. C. Goodwin, *On sampled-data models for nonlinear systems*, IEEE Trans. Autom. Control 50:10 (2005) 1477–1489.

[29] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado, *Control System Design*, NJ: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2001.

[30] P. Suchomski, *Robust PI and PID controller design in delta domain*, Proc. Inst. Elect. Eng. 148:5 (2001) 350–354.

[31] R. H. Middleton, G. C. Goodwin, *Digital Control and Estimation: A Unified Approach*, NJ: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1990.

[32] G. Li, M. Gevers, *Comparative study of finitewordlength effects in shift and delta operator parameterizations*, IEEE Trans. Autom. Control 38:5 (1993) 803–807.

[33] J. B. Hoagg, M. A. Santillo, D. S. Bernstein, *Internal model control in the shift and delta domains*, IEEE Trans. Autom. Control 53:4 (2008) 1066–1072.

[34] J. Gao, Q.-R. Wang, L.-W. Zhang, Existence and stability of almost-periodic solutions for cellular neural networks with time-varying delays in leakage terms on time scales, Appl. Math. Comput. 237 (2015) 639–649.

[35] R. Hilscher, V. Zeidan, Nabla time scale symplectic systems and related quadratic functionals, Differ. Equ. Dyn. Syst. 18:1 (2010) 163—198.

[36] B.J. Jackson, Adaptive control in the nabla setting, Neural Parallel Sci. Comput. 16 (2008) 253–272.

[37] M. Bohner, A. Peterson, *Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications*, Birkhäuser, Boston, MA, USA, 2001.

[38] M. Bohner, A. C. Peterson, *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Birkhäuser, 2003.

[39] F. M. Atici, D. C. Biles, A. Lebedinsky, An application of time scales to economics, Math. Comput. Modelling 43:7–8 (2006) 718–726.

[40] M. Bohner, M. Fan, J. Zhang, *Periodicity of scalar dynamic equations on time scales and applications to population models*, J. Math. Anal. Appl. 330 (2007) 1–9.

[41] M. Bohner, H. Warth, *The Beverton-Holt dynamic equation*, Appl. Anal. 86 (2007) 1007–1015.

[42] V. M. Popov, *Some properties of the control systems with irreducible matrix – Transfer functions, w: Seminar on Differential Equations and Dynamical Systems*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 1969, 169–180.

[43] J. C. McConnell, J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1987.

[44] J. F. Pommaret, *Partial Differential Control Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2001.

[45] Ü. Kotta, M. Tõnso, *Realization of discrete-time nonlinear input-output equations: Polynomial approach*, Automatica 48:2 (2012) 255–262.

[46] E. Artin, *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, New York, USA, 1957.

[47] Ü. Kotta, Z. Bartosiewicz, S. Nõmm, E. Pawłuszewicz, *Linear input-output equivalence and row reducedness of discrete-time nonlinear systems*, IEEE Trans. Autom. Control 56:6 (2011) 1421–1426.

[48] H. Nijmeijer, A. J. van der Schaft, Nonlinear Dynamical Control Systems, Springer-Verlag, New York, 1990.

[49] G. Conte, C. Moog, A. Perdon, *Algebraic methods for nonlinear control systems*, 2nd Edition, no. 242 in Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, London, 2007.

[50] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, P. Rouchon, *Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples*, Int. J. Control 61:6) (1995) 1327–1361.

[51] J. M. Ruiz, *The Basic Theory of Power Series*, Vieweg, Teubner Verlag, 1993.

[52] T. Nagano, *Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras*, J. Math. Soc. Japan 18:4 (1966) 398–404.

[53] E. Aranda-Bricaire, C. Moog, J.-B. Pomet, A linear algebraic framework for dynamic feedback linearization, IEEE Trans. Autom. Contr. 40:1 (1995) 127–132.

[54] Z. Bartosiewicz, *Local observability of nonlinear systems*, Systems & Control Letters 25 (1995), 295-298.

[55] Z. Bartosiewicz, *Real analytic geometry and local observability*, w: Differential Geometry and Control, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 64, eds. G. Ferreyra, R. Gardner, H. Hermes and H. Sussmann, American Mathematical Society, Providence 1998.

[56] D. Mozyrska and Z. Bartosiewicz, *Rank condition of stable local observability of analytic systems on* $\mathbb{R}^3$, w: Proceedings of International Conference on Control'96, Exeter, September 1996.

[57] D. Mozyrska, Z. Bartosiewicz, *Algebraic criteria for stable local observability of analytic systems on* $\mathbb{R}^n$, w: Proceedings of European Control Conference ECC-97, Brussels, Belgium, July 1997.

[58] R. Hermann and A. Krener, Nonlinear controllability and observability, IEEE Transactions AC-22 (1977), 728–740.

[59] J-J. Risler, *Le thèoréme des zèros en gèomètries algèbrique et analytique rèelles*, Bull. Soc. Math. France 104 (1976), 113-127.

[60] M. Wyrwas, *Nieregularne obserwatory nieliniowych układów sterowania*, Ph.D. thesis, Wydział Matemtyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska, Warszawa (2004).

[61] P. Jouan, J.-P. Gauthier, *Finite singularities of nonlinear systems. output stabilization, observability, and observers*, Journal of Dynamical and Control Systems 2:2 (1996) 255–288. doi:10.1007/BF02259528.

[62] J.-P. Gauthier, I. Kupka, *Deterministic Observation Theory and Applications*, Cambridge University Press, 2001.

[63] Ü. Kotta, A. S. I. Zinober, P. Liu, Transfer equivalence and realization of nonlinear higher order input-output difference equations, Automatica 37 (2001) 1771–1778.

[64] J. C. Willems, The behavioral approach to open and interconnected systems, IEEE Control Syst. Mag. 27:6 (2007) 46–99.

[65] J. W. Polderman, J. C. Willems, *Introduction to Mathematical Systems Theory: a behavioral approach*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[66] Ü. Kotta, Z. Bartosiewicz, S. Nõmm, E. Pawłuszewicz, *Linear input-output equivalence and row reducedness of discrete-time nonlinear systems*, IEEE Trans. Autom. Contr. 56:6 (2011) 1421–1426.

[67] J. P. Aubin, H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990.

[68] P. Ostalczyk, *Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowania w automatyce*, The Publishing Office of Lodz University of Technology, 2008.

[69] K. S. Miller, B. Ross, *Fractional difference calculus, Proceedings of the International Symposium on Univalent Functions*, Fractional Calculus and their Applications, Nihon University, Kōriyama, Japan (1988) 139–152.

[70] K. B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.

[71] I. Podlubny, Fractional Differential Equations. Mathematics in Sciences and Engineering, 198, Academic Press, San Diego, 1999.

[72] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers S.A., Yverdon, 1993.

[73] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J. J. Trujillo, *Fractional Calculus Models and Numerical Methods*, Vol. 3 of Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos, World Scientific, Singapore, 2012.

[74] D. Baleanu, J. A. T. Machado, A. C. J. Luo, *Fractional Dynamics and Control*, Springer-Verlag, New York, NY, USA, 2012.

[75] R. Caponetto, G. Dongola, G. Fortuna, and I. Petras, *Fractional Order Systems: Modeling and Control Applications*, World Scientific, Singapore, 2010.

[76] K. Diethelm, *The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*, Springer-Verlag, 2010.

[77] R. Herrmann, *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists*, World Scientific Publishing Company, 2011.

[78] T. Kaczorek, *Selected problems of fractional systems theory*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 411, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

[79] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, North–Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B. V., Amsterdam, 2006.

[80] J. S. Leszczyński, *An introduction to fractional mechanics*, The Publishing Office of Czestochowa University of Technology, 2011.

[81] V. Lakshmikantham, S. Leela, J. V. D. Cottenham, *Theory of fractional dynamic systems*, Cambridge Scientific Publishers, 2009.

[82] M. H. A. Annaby, Z. S. Mansour, *q-Fractional calculus and equations*, Heidelberg, Springer, 2012.

[83] W. Mitkowski, *Approximation of fractional diffusion-wave equation*, Acta Mechanica et Automatica 5:2 (2011) 65–68.

[84] M. D. Ortigueira, *Fractional calculus for scientists and engineers*, Springer, 2011.

[85] P. Ostalczyk, *Discrete Fractional Calculus Applications in Control and Image Processing*, Vol. 14 of Series in Computer Vision, World Scientific Publishing Co., Inc. River Edge, NJ, USA, 2016.

[86] V. E. Tarasov, *The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*, Heidelberg: Springer, 2010.

[87] M. Bettayeb, S. Djennoune, *A note on the controllability and the obseravbility of fractional dyanmical systems*, w: Proceedings of the 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Application, Porto, Portugal, 2006.

[88] M. Busłowicz, *Stability of fractional discrete-time linear scalar systems with one delay*, Pomiary, Automatyka, Robotyka R. 17:2 (2013) 327–332.

[89] D. Dzieliński, P. M. Czyronis, *Fixed final time and free final state optimal control problem for fractional dynamic systems - linear quadratic discrete-time case*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences 61:3 (2013) 681–690.

[90] T. Kaczorek, *Reachability and controllability to zero tests for standard and positive fractional discrete-time systems*, Journal European des Systemes Automatises 42:6–8 (2008) 769–787.

[91] T. Kaczorek, *Practical stability of positive fractional discrete-time linear systems*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences 56:4 (2008) 313–317.

[92] T. Kaczorek, *Stability of interval positive fractional discrete–time linear systems*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 28:3 (2018) 451–456.

[93] P. Ostalczyk, *Equivalent descriptions of a discrete-time fractional-order linear system and its stability domains*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 22:3 (2012) 533–538.

[94] D. Sierociuk, D. Dzieliński, *Fractional Kalman filter algorithm for the states parameters and order of fractional system estimation*, Int. J. Appl. Math. Comp. Sci. 16:1 (2006) 129–140.

[95] D. Sierociuk, M. Macias, W. Malesza, *Analog realization of fractional variable-type and -order iterative operator*, Applied Mathematics and Computation 336 (2018) 138–147.

[96] R. Stanisławski, K. J. Latawiec, *Stability analysis for discrete-time fractional-order LTI state-space systems. Part I: New necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences 61:2 (2013) 353–361.

[97] R. Stanisławski, K. J. Latawiec, *Stability analysis for discrete-time fractional-order LTI state-space systems. Part II: new stability criterion for FD-based systems*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences 61:2 (2013) 363–370.

[98] R. Stanisławski, M. Rydel, K. J. Latawiec, *New Stability Tests for Discretized Fractional-Order Systems Using the Al-Alaoui and Tustin Operators*, Complexity 2018, nr artykułu 2036809, (2018) 9 stron.

[99] D. Mozyrska, E. Girejko, Advances in Harmonic Analysis and Operator Theory: The Stefan Samko Anniversary Volume, Vol. 229, Springer, 2013, Ch. *Overview of the fractional h-difference operators*, 253–267.

[100] F. Chen, *Fixed points and asymptotic stability of nonlinear fractional difference equations*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 39 (2011) 1–18.

[101] F. Chen, Z. Liu, *Asymptotic stability results for nonlinear fractional difference equations*, Journal of Applied Mathematics 2012 (2012) 14 stron, doi: 10.1155/2012/879657.

[102] O. Carja, T. Donchev, M. Rafaqat, R. Ahmed, *Viability of fractional differential inclusions*, Applied Mathematics Letters 38 (2014) 48–51.

[103] U. Krause, *A discrete nonlinear and non-autonomous model of consensus formation*, Proc. Commun. Difference Equations (2000) 227–236.

[104] R. Hegselmann, U. Krause, *Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulations*, J. Artif. Societies Social Simul. 5:3 (2002) 33 strony.

[105] V. D. Blondel, J. M. Hendrickx, F. N. Tsitsiklis, *On Krause's multi-agent consensus model with state-dependent connectivity*, IEEE Transactions on Automatic Control 5:11 (2009) 2586–2597.

[106] F. Cucker, S. Smale, *Emergent behavior in flocks*, IEEE Transactions on Automatic Control 52:5 (2007) 852–862. doi:10.1109/TAC.2007.895842.

Małgorzata Wyrwas
Wydział Informatyki, Politechnika Białostocka
Wiejska 45A, 15-351 Białystok
adresy e-mail: m.wyrwas@pb.edu.pl; malgorzata.wyrwas@gmail.com
tel. kom: +48 604833063

Małgorzata Wyrwas