

AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko: Konstanty Junosza-Szaniawski

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe:

- dyplom doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki, Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych Politechniki Warszawskiej, 2004, tytuł rozprawy doktorskiej: *Lematy kombinatoryczne dla pseudorozmaitości*, promotor: prof. dr hab. Adam Idzik.
- dyplom magistra matematyki (z wyróżnieniem), Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych Politechniki Warszawskiej, 1999, tytuł pracy magisterskiej: *Reszty Ramseya dla grafów i hipergrafów*, promotor: prof. dr hab. Zbigniew Lonc.

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:

- **od marca 2017** starszy wykładowca
Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych
Politechnika Warszawska
- **marzec 2005 - luty 2017** adiunkt
Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych
Politechnika Warszawska
- **październik 2004 - luty 2005** asystent, Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Akademia Świętokrzyska,

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. Nr 65, poz. 595 ze zm.):

Rozprawa habilitacyjna zatytułowana

Kolorowanie i etykietowanie $L(2, 1)$ grafów oraz płaszczyzny

składa się z cyklu 5 prac:

- [R1] K. Junosza-Szaniawski, J. Kratochvíl, M. Liedloff, P. Rossmanith, P. Rzążewski, *Fast Exact Algorithm for $L(2,1)$ -Labeling of Graphs*, Theoretical Computer Science 505 (2013) 42-54, 2013 (DOI: 10.1016/j.tcs.2012.06.037),(w spisie literatury pozycja [76]), wersja konferencyjna TAMC 2011 Proc., LNCS 6648, 82-93 , (w spisie literatury pozycja [77])

- [R2] K. Junosza-Szaniawski, J. Kratochvíl, M. Liedloff, P. Rzażewski, *Determining the $L(2,1)$ -span in Polynomial Space*, Discrete Applied Mathematics 161, (2013) 2052–2061, (DOI: 10.1016/j.dam.2013.03.027),(w spisie literatury pozycja [79])
wersja konferencyjna WG 2012 Proc., LNCS 7551 (2012), 126-137 (w spisie literatury pozycja [78])
- [R3] J. Grytczuk, K. Junosza-Szaniawski, J. Sokół, K. Węsek, *Fractional and j -Fold Coloring of the Plane*, open access in Discrete and Computational Geometry 55, (2016) 594–609 (w spisie literatury pozycja [57])
- [R4] K. Junosza-Szaniawski *Upper Bound on the Circular Chromatic Number of the Plane*, Electronic Journal of Combinatorics 25(1) (2018), #P1.53. (w spisie literatury pozycja [75])
- [R5] K. Junosza-Szaniawski, P. Rzażewski, J. Sokół, K. Węsek, *Online Coloring And $L(2,1)$ -Labeling Of Unit Disk Intersection Graphs*, SIAM J. Discrete Math. 32-2 (2018) 1335-1350, (DOI 10.1137/16M1097821) (w spisie literatury pozycja [85])

Omówienie rozprawy:

Kolorowanie i etykietowanie $L(2, 1)$ grafów oraz płaszczyzny

Wstęp

Przedstawiana rozprawa dotyczy kolorowania grafów różnych modeli oraz szczególnych klas grafów. Rozważane modele to klasyczne, ułamkowe, cyrkularne oraz etykietowanie $L(2, 1)$. Do głównych wyników rozprawy należą:

- A. Algorytmy dokładne wyznaczające optymalne $L(2, 1)$ -etykietowanie grafów. Złożoności przedstawionych algorytmów zostały wyznaczone dzięki ograniczeniom na maksymalne liczby szczególnych struktur kombinatorycznych w grafach.
- B. Ograniczenia na ułamkową oraz cyrkularną liczbę chromatyczną płaszczyzny - częściowe rozwiązania szczególnych wersji problemu Hadwiger-Nelsona.
- C. Algorytmy on-line do kolorowania oraz etykietowania $L(2, 1)$ grafów przecięć dysków jednostkowych. Algorytmy te bazują na kolorowaniach płaszczyzny.

Kolorowanie grafów jest fascynującą i ważną dziedziną matematyki zarówno ze względu na zagadnienia teoretyczne, jak i liczne zastosowania, w szczególności grafów definiowanych geometrycznie [103]. Swoje początek bierze w słynnym problemie czterech kolorów, czyli pytaniu, czy każdą mapę polityczną można pokolorować czterema kolorami, tak aby sąsiadujące państwa były pokolorowane różnymi kolorami [90, 101]. Problem ten swoje pozytywne rozwiązanie znalazł po ponad stu latach dzięki pracy Appela i Hakena [2, 3]. Jednak jest to rozwiązanie nie

dla wszystkich satysfakcjonujące, ponieważ dowód, iż cztery kolory wystarczają, silnie bazował na obliczeniach komputera. Mimo, że pojawiały się kolejne dowody (np. [115]), to jednak wszystkie, choć w mniejszym stopniu, bazują na obliczeniach komputera i do dziś nie znamy „ludzkiego” dowodu twierdzenia o czterech kolorach.

Kolorowanie grafów ma liczne zastosowania praktyczne. Klasycznym zastosowaniem jest podział zasobów lub zadań w sytuacji, gdy występują ograniczenia na możliwość korzystania z zasobów lub wykonywania par zadań jednocześnie. W praktyce chcemy skutecznie i szybko pokolorować wiele konkretnych grafów. Stąd potrzeba efektywnych algorytmów kolorujących grafy. Problem, czy dany graf jest k -kolorowalny dla $k \geq 3$ jest problemem NP-zupełnym [88, 49]. Problem 3-kolorowalności 4-regularnych grafów planarnych również jest NP-zupełny [29]. Nawet aproksymacja liczby chromatycznej (czyli najmniejszej liczby k takiej, że dany graf jest k -kolorowalny) z dokładnością $O(n^{1-\epsilon})$ dla dowolnego $\epsilon > 0$ jest problemem NP-trudnym [137]. Najlepszy znany obecnie wielomianowy algorytm aproksymacyjny oblicza liczbę chromatyczną z dokładnością $O(n(\log \log n)^2 / \log^3 n)$ [62].

Sprawdzenie k -kolorowalności grafu metodą pełnego przeglądu ma złożoność czasową $O^*(n^k)$ (przy wielomianowej złożoności pamięciowej), a wyznaczenie liczby chromatycznej ma złożoność czasową $O^*(n^n)$. Przez $O^*(g(n))$ oznaczamy klasę funkcji $f(n)$ takich, że istnieje wielomian $p(n)$ taki że $f(n) \leq p(n)g(n)$. Pierwszy nietrywialny algorytm wyznaczający liczbę chromatyczną opublikował Chistofides [23]. Algorytm ten działa w pamięci wielomianowej i ma złożoność czasową $O^*(n!)$. Lawler [102] przedstawił algorytm znajdujący liczbę chromatyczną grafu w oparciu o algorytm Christofidesa i programowanie dynamiczne. Jest to algorytm o złożoności pamięciowej $O^*(2^n)$ i złożoności czasowej $O^*((1 + \sqrt[3]{3})^n) = O^*(2.4423^n)$. Złożoność czasowa wynika z ograniczenia na maksymalną liczbę par rozłącznych zbiorów wierzchołków w grafie, takich że pierwszy zbiór jest maksymalnym zbiorem niezależnym. Algorytm ten został poprawiony przez Eppsteina [36] i Byskova [17]. Oba te algorytmy miały złożoność pamięciową $O^*(2^n)$, a czasową odpowiednio $O^*(2.4151^n)$ i $O^*(2.4023^n)$. W obu przypadkach złożoność wynikała z czasu potrzebnego na weryfikację odpowiednio 3- oraz 4-kolorowalności wszystkich podgrafów oraz z liczby par zbiorów, w tym maksymalnego zbioru niezależnego, ale z dodatkowymi ograniczeniami na liczebności zbiorów. Eppstein pokazał, że maksymalnych zbiorów niezależnych liczebności k w grafie jest co najwyżej $3^{4k-n}4^{n-k}$, natomiast Byskov, że jest ich nie więcej niż $\lfloor n/k \rfloor^{(\lfloor n/k \rfloor + 1)^{k-n}} (\lfloor n/k \rfloor + 1)^{n - \lfloor n/k \rfloor k}$. W czasie $O^*(1.3289^n)$ można zweryfikować 3-kolorowalność grafu [35, 8], a 4-kolorowalność w czasie $O^*(1.7504^n)$ [17]. Pierwszym algorytmem, o wielomianowej złożoności pamięciowej, znajdującym liczbę chromatyczną w czasie $O^*(c^n)$, gdzie c jest stałą, jest algorytm Bodlaendera i Kratscha [12]. Jego złożoność czasowa wynosi $O^*(5.2830^n)$.

Przełomowy wynik został osiągnięty przez Björklunda, Hulfeldta i Koivisto [10] dzięki zastosowaniu zasady włączeń i wyłączeń. Autorzy [10] podali dwa algorytmy znajdujące liczbę chromatyczną, pierwszy o złożoności czasowej $O^*(2^n)$ przy złożoności pamięciowej $O^*(2^n)$, drugi o złożoności czasowej $O^*(2.2461^n)$ przy wielomianowej złożoności pamięciowej. Dokładniej udowodnili, że liczbę chromatyczną grafu można wyznaczyć w czasie $O^*((1+c)^n)$ i pamięci wielomianowej, jeśli wykorzysta się algorytm zliczający zbiory niezależne w grafie w czasie $O^*(c^n)$ i pamięci wielomianowej. Obecnie najszybszym algorytmem zliczającym zbiory niezależne jest algorytm Gaspersa i Lee [52], który ma złożoność $O^*(1.2330^n)$. Zatem liczbę

chromatyczną można wyznaczyć w pamięci wielomianowej w czasie $O^*(2.2330^n)$. Algorytm o wykładniczej złożoności pamięciowej [10] został poprawiony dla grafów o ograniczonym stopniu [9] i ma złożoność czasową $O^*((2^{\Delta+1} - \Delta - 1)^{n/(\Delta+1)})$, gdzie Δ oznacza ograniczenie na maksymalny stopień w grafie.

W praktycznych zastosowaniach bardzo często należy uwzględnić dodatkowe założenia lub modyfikacje, co doprowadziło do powstania wielu różnych modeli kolorowania grafów. Przegląd modeli można znaleźć w książkach *Graph coloring problems* autorstwa Jensena i Tofta [74] oraz *Graph colorings* pod redakcją Kubalego [101].

Kolorowanie grafów, z dodatkowymi ograniczeniami, jest szczególnie użyteczne w zagadnieniach związanych z telekomunikacją, zwłaszcza dotyczących przydziału częstotliwości w sieciach radiowych [6, 61, 130]. Jednym z pierwszych modeli kolorowania opisującym przydział częstotliwości był model przedstawiony przez Hale'a [61] pod nazwą problem przydziału kanałów (ang. channel assignment problem). Danymi wejściowymi dla tego problemu jest graf G , funkcja wag krawędzi $w : E(G) \rightarrow \{0, \dots, \ell\}$ dla pewnego $\ell \in \mathbb{N}$ oraz liczba $B \in \mathbb{N}$. Dla takich danych szukamy odpowiedzi na pytanie, czy istnieje funkcja $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, B\}$, taka że dla każdej krawędzi grafu uv zachodzi $|c(u) - c(v)| \geq w(uv)$. Najmniejsze B , dla którego istnieje funkcja c spełniająca powyższy warunek, nazywamy rozpiętością (ang. span) grafu ważonego (G, w) . W przypadku, gdy waga w wynosi dla każdej krawędzi jeden, otrzymujemy problem klasycznego kolorowania grafu, a rozpiętość grafu w tym przypadku oznacza liczbę chromatyczną grafu. McDiarmid i Reed udowodnili [107], że problem przydziału kanałów jest problemem NP-zupełnym, nawet w klasie grafów o szerokości drzewiastej nie przekraczającej 3. Král' [97] skonstruował algorytm znajdujący rozpiętość grafu w czasie $O(n(\ell + 2)^n)$, gdzie ℓ jest maksymalną wagą krawędzi. Nowsze algorytmy Cygana i Kowalika [28] oraz Kowalika i Soaty [96] działają odpowiednio w czasie $O^*((\ell + 1)^n)$ oraz $O^*((2\sqrt{\ell + 1})^n)$.

Szczególnym przypadkiem modelu przedstawionego problemu przydziału kanałów jest etykietowanie typu $L(p_1, \dots, p_k)$. Dla danego grafu szukamy funkcji etykietującej $c : V(G) \rightarrow \{0, \dots, B\}$, takiej że dla każdego $i \in \{1, \dots, k\}$ i dla każdej pary wierzchołków u, v w odległości i zachodzi $|c(u) - c(v)| \geq p_i$. Ponieważ etykietowanie $L(1)$ to klasyczne kolorowanie, a etykietowanie $L(1, 1)$ grafu G jest równoważne kolorowaniu kwadratu grafu G , to etykietowanie $L(2, 1)$ jest pierwszym wykraczającym poza klasyczne kolorowanie przypadkiem spośród etykietowań typu $L(p_1, p_2)$.

A. Etykietowanie $L(2, 1)$.

Pracę nad etykietowaniem $L(2, 1)$ rozpoczęli Griggs i Yeh [55]. Funkcję przypisującą wierzchołkom grafu liczby naturalne nazywamy etykietowaniem $L(2, 1)$, jeśli etykiety (kolory) sąsiednich wierzchołków różnią się co najmniej o dwa, a etykiety wierzchołków w odległości dwa są różne. Zauważmy, że każdy zbiór wierzchołków w jednym kolorze stanowi zbiór wierzchołków parami odległych o więcej niż dwa, czyli zbiór niezależny w kwadracie grafu. Takie zbiory nazywamy 2-upakowaniami. Ponadto zbiór wierzchołków w dowolnych dwóch kolejnych kolorach stanowi zbiór niezależny w grafie. Ten model motywowany jest zastosowaniami w telekomunikacji radiowej. Dwie kolejne częstotliwości (reprezentowane tu jako liczby całkowite) mogą się wzajemnie zakłócać, zatem, aby tego uniknąć, radiostacje będące w bezpośrednim sąsiedztwie otrzymu-

ją nie tylko różne, ale również nie kolejne częstotliwości. Ponadto mogą wystąpić zakłócenia drugiego rodzaju w sytuacji, gdy dwie radiostacje nie połączone bezpośrednio mają wspólnego sąsiada. Jeśli będą nadawać jednocześnie na tej samej częstotliwości, to ich wspólny sąsiad odbierze sumę ich sygnałów i nie będzie w stanie rozdzielić jej na dwa sygnały pochodzące od różnych nadawców, tzn. nie odczyta żadnej wiadomości. Aby tego problemu uniknąć, zakładamy, że wierzchołki w odległości dwa w grafie połączeń mają różne etykiety. Oczywiście zależy nam na najmniejszej liczbie użytych etykiet, a właściwie na najwęższym zakresie etykiet. Formalnie: różnicę między największą a najmniejszą etykietą etykietowania $L(2, 1)$ nazywamy rozpiętością (ang. span) tego etykietowania, a minimum rozpiętości po wszystkich etykietowaniach $L(2, 1)$ danego grafu nazywamy rozpiętością $L(2, 1)$ tego grafu (ozn. $L(2, 1)(G)$). Griggs i Yeh [55] pokazali, że problem wyznaczenia rozpiętości $L(2, 1)$ grafu jest problemem NP-zupełnym. Fiala i inni [41] udowodnili, że weryfikacja czy $L(2, 1)(G) \leq k$ pozostaje problemem NP-zupełnym dla każdego ustalonego $k \geq 4$ (dla $k < 4$ jest problemem wielomianowym). Problem pozostaje NP-zupełnym nawet dla grafów o szerokości drzewiastej dwa [40]. Problem jest wielomianowy dla drzew [22], a nawet powstał algorytm, który znajduje rozpiętość $L(2, 1)$ dowolnego drzewa w czasie liniowym [63]. Więcej informacji o etykietowaniu typu $L(2, 1)$ można odnaleźć w pracach [18, 19, 42, 132]. Etykietowanie $L(2, 1)$ nadal budzi duże zainteresowanie badaczy z powodu wciąż otwartej hipotezy postawionej przez Griggsa i Yeha [55]:

Hipoteza (Delta kwadrat). *Dla dowolnego grafu G o maksymalnym stopniu co najmniej dwa zachodzi*

$$L(2, 1)(G) \leq \Delta^2(G).$$

Griggs i Yeh [55] przez prostą analizę zachłannego algorytmu iteracyjnego pokazali, że rozpiętość $L(2, 1)$ grafu G nigdy nie przekracza $\Delta^2(G) + 2\Delta(G)$. Chang i Kuo [22] przez analizę algorytmu zachłannego, (który wybiera maksymalny dozwolony zbiór do pokolorowania kolejnym kolorem), pokazali, że $L(2, 1)(G) \leq \Delta^2(G) + \Delta(G)$. Král i Škrekovski [98] poprawili ograniczenie do $L(2, 1)(G) \leq \Delta^2(G) + \Delta(G) - 1$, a Gonçalves [53] do $L(2, 1)(G) \leq \Delta^2(G) + \Delta(G) - 2$. Havet, Reed i Sereni [65] metodą probabilistyczną udowodnili hipotezę dla grafów o dużym maksymalnym stopniu. Hipoteza Delta kwadrat jest tym bardziej pasjonująca, że pośród grafów o maksymalnym stopniu większym niż dwa znamy tylko dwa, które osiągają rozpiętość $L(2, 1)$ równą $\Delta^2(G)$ są to: graf Petersena oraz graf Hoffmanna–Singletona [67].

Ponieważ etykietowanie $L(2, 1)$ jest szczególnym przypadkiem problemu przydziału kanałów z maksymalną wagą krawędzi 2, to przy pomocy algorytmu Král'a [97] można znaleźć rozpiętość $L(2, 1)$ grafu w czasie $O^*(4^n)$. Havet, Klazar, Kratochvíl, Kratsch i Liedloff [64] zaprezentowali algorytm znajdujący rozpiętość $L(2, 1)$ grafu w czasie $O^*(3.8730^n)$. Dokładniej złożoność swojego algorytmu ograniczyli przez liczbę trójek rozłącznych zbiorów wierzchołków, z których jeden jest 2-upakowaniem w grafie spójnym. W analizie użyli ograniczenia na liczbę k -elementowych 2-upakowań $\binom{n/2}{k} 2^k$.

Razem z Pawłem Rzażewskim przeprowadziliśmy bardziej wnikliwą analizę tego algorytmu. Liczbę k -elementowych 2-upakowań w grafie spójnym udało się oszacować lepiej przez $\binom{n-k+1}{k}$ [86]. Ponadto zauważyliśmy, że algorytm rozważa jedynie takie trójki rozłącznych zbiorów (U, Y, A) , w których zbiory U i Y są 2-upakowaniami, takimi że $U \cup Y$ jest zbiorem niezależnym. Pozwoliło to oszacować złożoność algorytmu jako $O^*(3.5616^n)$ [86]. To oszacowanie

udało się poprawić przez generowanie rekurencyjnie całych trójek (U, Y, A) zamiast kolejno zbiorów Y , dla nich zbiorów U , a następnie zbiorów A . Okazało się, że jest ich nie więcej niż $O^*(3.2361^n)$, co stanowi oszacowanie na złożoność algorytmu [82].

Peter Rossmanith zaproponował nowe podejście - zamiast przetwarzania odpowiednich trójek zbiorów w grafie - generowanie listy ciągów kodujących częściowe etykietowania $L(2, 1)$ grafu. Listy były przetwarzane iteracyjnie wierzchołek po wierzchołku, co pozwoliło ograniczyć złożoność algorytmu do $O^*(3^n)$. Później powstał algorytm Kowalika i Cygana rozwiązujący problem przydziału kanałów [28], czyli problem ogólniejszy. Algorytm ten zastosowany do etykietowania $L(2, 1)$ wyznacza rozpiętość $L(2, 1)$ również w czasie $O^*(3^n)$. Kratochvíl i Liedloff zauważyli, że algorytm Rossmanitha można poprawić. Przetwarzając wspomniane listy iteracyjnie parami wierzchołków, zamiast po jednym, otrzymujemy algorytm o złożoności $O^*(2.9899^n)$. Przetwarzanie list iteracyjnie zbiorami większej, ale ustalonej liczności jeszcze bardziej przyspiesza algorytm. Zostaliśmy zaproszeni do współpracy przy analizie takiego algorytmu. W efekcie powstał wspólny artykuł **R1** [76], którego głównym wynikiem jest:

Twierdzenie 1 (R1 Theorem 1). *Rozpiętość $L(2, 1)$ grafu spójnego można wyznaczyć w czasie $O^*(2.6488^n)$.*

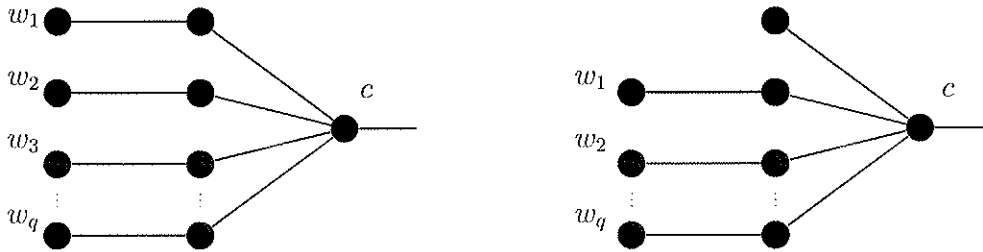
Złożoność algorytmu zaproponowanego przez Kratochvíla, Liedloffa i Rosmanitha została oszacowana przez liczbę par rozłącznych zbiorów wierzchołków w grafie spójnym, takich że pierwszy ze zbiorów jest 2-upakowaniem. Liczbę takich par oszacowaliśmy razem z Pawłem Rzażewskim. W rezultacie otrzymaliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2 (R1 Theorem 2). *W grafie spójnym liczba par rozłącznych zbiorów wierzchołków, z których jeden jest 2-upakowaniem, wynosi co najwyżej $O^*(2.6488^n)$.*

Pary o których mowa w Twierdzeniu 2 nazywamy poprawnymi. Istotą metody dzięki, której otrzymaliśmy oszacowanie jest algorytm rekurencyjny generujący wszystkie poprawne pary. Aby efektywnie skorzystać z rekurencji używamy kilku obserwacji. Po pierwsze możemy założyć, iż graf w którym zliczamy pary jest drzewem, ponieważ usunięcie krawędzi jedynie może zwiększyć liczbę 2-upakowań i w konsekwencji poprawnych par. Po drugie możemy założyć, że żadne dwa liście nie mają wspólnego sąsiada. Gdyby istniały dwa liście u, v o wspólnym sąsiedzie w to usuwając krawędź uw i dodając uv nie zmniejszamy liczby 2-upakowań ani liczby poprawnych par. Przy tych założeniach, w kroku rekurencyjnym wybieramy poddrzewo o średnicy nie przekraczającej 4, takie że usunięcie go nie rozspójni drzewa. Przy wcześniejszych założeniach zachodzi jeden z dwóch przypadków zobrazowanych na rysunku 1. Zliczamy, ile jest poprawnych par w poddrzewie, następnie rekurencyjnie zliczamy, na ile sposobów te pary można rozszerzyć w całym drzewie. Przypadkiem determinującym złożoność algorytmu generującego wszystkie pary okazał się pierwszy podprzypadek (tzn. gdy c nie sąsiaduje z liściem), dla $q = 2$. W tym przypadku równanie rekurencyjne przyjmuje postać

$$pp(n) \leq 16pp(n-4) + 88pp(n-5),$$

gdzie $pp(n)$ oznacza maksymalną liczbę poprawnych par w grafie spójnym o n wierzchołkach. Rozwiązując rekurencje otrzymujemy wynik asymptotyczny $pp(n) = O(\tau^n)$ gdzie $\tau_0 \approx 2.6488$ jest największym pierwiastkiem równania $\tau^5 = 16\tau + 88$.

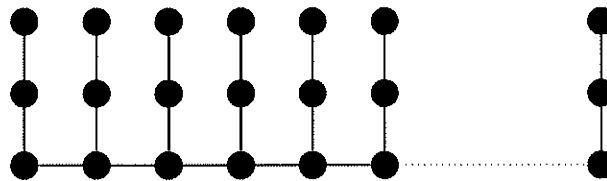


Rysunek 1: Dwa przypadki poddrzew, dla których wywoływana jest rekurencja.

Z Pawłem Rzążewskim podaliśmy również ograniczenie dolne na maksymalną liczbę poprawnych par w grafie spójnym:

Twierdzenie 3 (R1 Theorem 3.). *Wartość $pp(n)$ jest ograniczona od dołu przez $\Omega(\tau_1^n)$, gdzie $\tau_1 \approx 2.6117$ jest pierwiastkiem równania $\tau^3 = 16\tau^2 + 576$.*

Rodzina grafów dla której jest osiągane ograniczenie podane w Twierdzeniu 3, jest przedstawiony na rysunku 2:



Rysunek 2: Rodzina grafów realizująca ograniczenie dolne z Twierdzenia 3

Twierdzenia 2 i 3 pokazują, że górne i dolne ograniczenia na maksymalną liczbę poprawnych par w grafach spójnych nie dużo się różnią. Ciekawym i wciąż otwartym pytaniem pozostaje dokładne w sensie asymptotycznym wyznaczenie wartości $pp(n)$.

Przeanalizowaliśmy również maksymalną liczbę poprawnych par w spójnych grafach $K_{1,3}$ -wolnych otrzymując

Twierdzenie 4 (R1 Theorem 4). *W spójnym grafie $K_{1,3}$ -wolnym liczba par rozłącznych zbiorów wierzchołków, z których jeden jest 2-upakowaniem, wynosi co najwyżej $O^*(2.5944^n)$.*

Dzięki powyższemu twierdzeniu można lepiej oszacować czas działania algorytmu wyznaczającego rozpiętość $L(2, 1)$ w klasie grafów $K_{1,3}$ -wolnych:

Wniosek 5 (R1 Corollary 7). *Rozpiętość $L(2, 1)$ grafu spójnego $K_{1,3}$ -wolnego można wyznaczyć w czasie $O^*(2.5944^n)$.*

Ponieważ grafy krawędziowe są grafami $K_{1,3}$ -wolnymi to:

Wniosek 6 (R1 Corollary 7). *Rozpiętość $L(2, 1)$ etykietowania krawędziowego grafu można wyznaczyć w czasie $O^*(2.5944^m)$, gdzie m jest liczbą krawędzi w grafie.*

Nieco innym wynikiem zawartym w pracy **R1** jest oszacowanie na maksymalną liczbę 2-upakowań liczności k w grafach o małym zbiorze dominującym. Graf G nazywamy r -zdominowanym, jeśli posiada zbiór dominujący liczności nie większej niż r .

Lemat 7 (R1 Lemma 9). *W r -zdominowanym grafie maksymalna liczba 2-upakowań liczności k wynosi co najwyżej $\binom{n}{r} \left(\frac{n}{r}\right)^k$.*

Dzięki powyższemu lematowi możemy oszacować liczbę poprawnych par w grafie r -zdominowanym.

Twierdzenie 8 (R1 Lemma 10). *W r -zdominowanym grafie spójnym liczba par rozłącznych zbiorów wierzchołków, z których jeden jest 2-upakowaniem, wynosi co najwyżej $2^{n-r} \left(2 + \frac{n}{r}\right)^r$*

W konsekwencji otrzymujemy oszacowanie na czas działania algorytmu wyznaczającego rozpiętość $L(2, 1)$ zastosowanego do grafów o małym zbiorze dominującym.

Wniosek 9 (R1 Corollary 11). *Rozpiętość $L(2, 1)$ grafu r -zdominowanego można wyznaczyć w czasie $2^{n-r} \left(2 + \frac{n}{r}\right)^r$.*

Gdy $r > 0.2570n$, to oszacowanie z Wniosku 9 jest lepsze niż oszacowanie z Twierdzenia 1.

Twierdzenia 3, 4, 7 oraz Lemat 7 wraz wnioskami udowodniliśmy frazem z Pawłem Rzażewskim, wykorzystując metody, które wypracowaliśmy w naszych poprzednich artykułach [82, 83]. Główna idea metody zastosowania „głębokiej” rekurencji tzn. rozważania poddrzew o średnicy 4 (Rysunek 1) pochodzi od habilitanta.

Omówione powyżej oszacowania złożoności wyznaczania rozpiętości $L(2, 1)$ dotyczą algorytmu o wykładniczej złożoności pamięciowej. Pierwszy nietrywialny algorytm, o wielomianowej pamięci, weryfikujący czy rozpiętość $L(2, 1)$ nie przekracza k , został przedstawiony przez Haveta i innych [64] i ma złożoność $O^*((k-2)^n)$. W tej samej pracy znajduje się algorytm o złożoności $O^*((k-2.5)^n)$. Niezależnie dwa zespoły: Havet, Klazar, Kratochvíl, Kratsch, Liedloff oraz Junosza-Szaniawski i Rzażewski opracowały algorytm weryfikujący, czy rozpiętość $L(2, 1)$ nie przekracza k w czasie $O((9+\epsilon)^n)$ dla dowolnego $\epsilon > 0$. Był to pierwszy taki algorytm o wielomianowej złożoności pamięciowej i złożoności czasowej $O^*(c^n)$, gdzie c jest stałą. Idea algorytmu polega na sprawdzeniu wszystkich podziałów zbioru wierzchołków na trzy podzbiory, takich że środkowy zbiór można zaetykietować jedną etykietą, pierwszy zbiór etykietami niższymi, a trzeci etykietami wyższymi. Następnie rekurencyjnie wywołujemy algorytm dla grafów indukowanych odpowiednio przez pierwszy oraz przez trzeci zbiór. Przy łączeniu kolorowań z wywołań rekurencyjnych trzeba uwzględnić warunki etykietowania $L(2, 1)$ dla par wierzchołków z różnych zbiorów podziału. Udało nam się ten algorytm poprawić i otrzymaliśmy:

Twierdzenie 10 (R2 Theorem 1). *Rozpiętość $L(2, 1)$ grafu spójnego można wyznaczyć w czasie $O^*(7.4922^n)$ i pamięci wielomianowej.*

Główna idea algorytmu jest ta sama, czyli sprawdzenie wszystkich podziałów na trzy zbiory i rekurencyjne wywołanie dla pierwszego i trzeciego zbioru przy założeniu, że zbiór drugi może być zaetykietowany jedną etykietą (czyli jest 2-upakowaniem). Wadą takiego podejścia jest to, że w wywołaniach rekurencyjnych tracimy informacje o wspólnym sąsiedzie dwóch wierzchołków, jeśli wspólny sąsiad znalazł się w innym zbiorze podziału. W konsekwencji rozważamy etykietowania, w których oba takie wierzchołki otrzymują tę samą etykietę. Takie etykietowania jako niepoprawne są usuwane, ale dopiero w fazie łączenia rozwiązań częściowych pochodzących z wywołań rekurencyjnych. Takich niepotrzebnych wywołań (czyli nie dających poprawnego etykietowania) można uniknąć przez wprowadzanie dodatkowych krawędzi, między wierzchołkami niesąsiednimi, ale posiadającymi wspólnych sąsiadów. Dla danego grafu G tworzymy graf G' przez dodanie krawędzi, które nazywamy czerwonymi, między każdą parą wierzchołków w odległości 2. Graf G' nazywamy R -domknięciem grafu G . Wtedy etykietowanie $L(2, 1)$ grafu G sprowadza się do takiego etykietowania czerwono-czarnego grafu G' , że wierzchołki połączone czarnymi krawędziami (tzn. oryginalnymi krawędziami grafu G) muszą dostać etykiety różniące się o dwa, a wierzchołki połączone czerwoną krawędzią muszą otrzymać różne etykiety. W czerwono-czarnym grafie G' zbiór wierzchołków Y nazywamy niezależnym, jeśli żadna czarna ani czerwona krawędź nie łączy jego elementów. Zauważmy, że zbiór Y jest 2-upakowaniem w grafie G wtedy i tylko wtedy gdy jest zbiorem niezależnym w grafie G' . Nasz algorytm działa na czerwono-czarnych grafach i dla każdego podziału zbioru wierzchołków (X, Y, Z) , takiego że Y jest zbiorem niezależnym, rekurencyjnie etykietuje $G'[X]$ oraz $G'[Z]$. Wszystkim elementom zbioru Y jest przypisywana ta sama etykieta.

Zauważyliśmy, że możemy się ograniczyć do podziałów (X, Y, Z) takich, $|X| \leq \frac{n}{2}$, $|Z| \leq \frac{n}{2}$ oraz że zbiór Y jest w pewnym sensie maksymalny. To pozwala ograniczyć liczbę wywołań rekurencyjnych. Zbiór niezależny Y w czerwono-czarnym grafie nazywamy R -maksymalnym, jeśli dla każdego wierzchołka incydentnego wyłącznie z czerwonymi krawędziami albo on albo któryś z jego sąsiadów należy do Y . Poprawną parę rozłącznych zbiorów wierzchołków (X, Y) nazywamy R -maksymalną jeśli Y jest R -maksymalnym zbiorem niezależnym. W algorytmie możemy ograniczyć się do podziałów zbioru wierzchołków (X, Y, Z) takich, że para (X, Y) jest poprawną parą R -maksymalną. Aby oszacować złożoność naszego algorytmu potrzebowaliśmy oszacowania na maksymalną liczbę poprawnych par R -maksymalnych.

Twierdzenie 11 (R2 Theorem 5). *Maksymalna liczba poprawnych par R -maksymalnych w czerwono-czarnym grafie o n wierzchołkach wynosi $\Theta(\sqrt{8}^n) = \Theta(2.4023^n)$.*

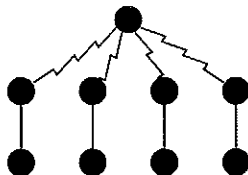
W dowodzie Twierdzenia 11 osobno zliczamy poprawne pary R -maksymalne w dwóch podgrafach: indukowanym przez wierzchołki incydentne wyłącznie z czerwonymi krawędziami oraz indukowanym przez wierzchołki incydentne z czarnymi krawędziami.

Twierdzenie 12 (R2 Theorem 5). *Jeśli w czerwono-czarnym grafie G występują wyłącznie czerwone krawędzie, to liczba poprawnych par R -maksymalnych w G nie przekracza $O(\sqrt[5]{80}^n) = O(2.4023^n)$.*

Maksymalna liczba poprawnych par R -maksymalnych w czerwonym grafie jest osiągana przez graf składający się z rozłącznych czerwonych klik rozmiaru 5.

Twierdzenie 13 (R2 Lemma 6). *Jeśli w czerwono-czarnym grafie G każdy wierzchołek jest incydentny z czarną krawędzią to liczba poprawnych par R -maksymalnych w G nie przekracza $O(\sqrt{8}^n) = O(2.8285^n)$.*

Maksymalna liczba poprawnych par R -maksymalnych w czerwono-czarnym grafie jest osiągnięta przez graf przedstawiony na Rysunku 3



Rysunek 3: Rodzina czerwono-czarnych grafów realizujący maksymalną liczbę poprawnych par R -maksymalnych. Linie oznaczone zygzakiem reprezentują czerwone krawędzie.

Bezpośrednie zastosowanie Twierdzenia 11 pozwala oszacować złożoność algorytmu przez $O((8 + \varepsilon)^n)$. Jeśli dodatkowo założymy, że graf wejściowy jest spójny (dokładniej graf indukowany przez czarne krawędzie) to możemy wykorzystać oszacowanie na liczbę poprawnych par z twierdzenia 1, co ostatecznie pozwala udowodnić Twierdzenie 2.

Dla ustalonego $k \leq 31$ zmodyfikowaliśmy algorytm [79] w taki sposób, że weryfikuje, czy rozpiętość $L(2, 1)$ grafu przekracza k w czasie mniejszym niż $O^*(7.4922^n)$. Dla $k = 6$ jest to $O^*(3.1219^n)$, dla $k = 31$ wynosi $O^*(7.4317^n)$. Natomiast dla $k = 4$ i $k = 5$ najszybsze algorytmy to algorytmy Haveta i innych [64] i mają złożoność odpowiednio $O^*(1.3006^n)$ oraz $O^*(2.4495^n)$.

Pomysł użycia czerwonych krawędzi oraz R -maksymalności, jak i strategię szacowań pochodzą od habilitanta.

B. Cyrkularne i ułamkowe kolorowanie płaszczyzny.

Jednym z obszarów, w którym kolorowanie grafów znajduje zastosowanie jest szeregowanie zadań. Jeśli mamy zbiór zadań do wykonania o jednakowym czasie wykonania (powiedzmy jednostkowym) oraz zbiór par zadań, które nie mogą być wykonywane jednocześnie, to liczba chromatyczna oznacza liczbę jednostek czasu na wykonanie wszystkich zadań. W sytuacji, gdy zadania są powtarzane cyklicznie, istnieje szansa na skrócenie średniego czasu wykonania pełnego cyklu. Szansa ta pojawia się, gdy przed końcem danego cyklu można już zacząć wykonywać zadania z kolejnego cyklu. Taką sytuację opisuje cyrkularne kolorowanie, przedstawione przez Vinca [129] pod nazwą star coloring. Funkcję c przyporządkowującą wierzchołkom liczby rzeczywiste z przedziału $[0, r)$ nazywamy cyrkularnym r -kolorowaniem, jeśli dla każdej krawędzi uv zachodzi $1 \leq |c(u) - c(v)| \leq r - 1$, a infimum zbioru takich r , dla których istnieje cyrkularne r -kolorowanie nazywamy cyrkularną liczbą chromatyczną i oznaczamy $\chi_c(G)$. Łatwo zauważyć, że dla dowolnego grafu G zachodzi $\chi_c(G) \leq \chi(G)$. Okazuje się, że cyrkularna liczba

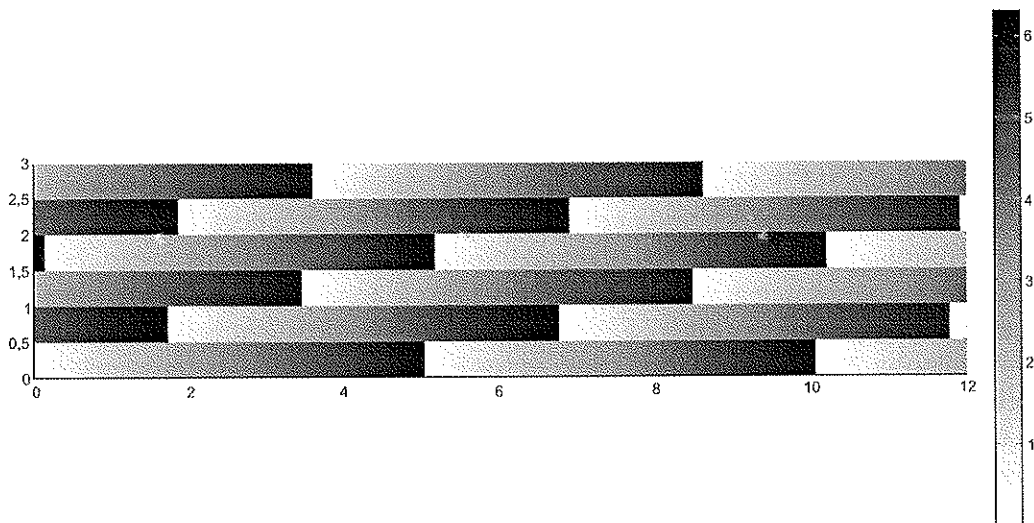
chromatyczna może być mniejsza od klasycznej mniej niż o jeden czyli $\chi(G) - 1 \leq \chi_c(G)$ dla dowolnego grafu G [129]. Odpowiedź na pytanie, czy $\chi_c(G) = \chi(G)$ jest problem NP-trudnym [59]. Więcej wyników dotyczących cyrkularnej liczby chromatycznej można znaleźć w pracy przeglądowej Zhu [135].

Innym modelem kolorowania o zastosowaniach w szeregowaniu zadań jest kolorowanie warstwowe i ułamkowe [117]. Opisują one sytuacje, gdy zadania nie muszą być wykonane w jednym ciągu, tzn. że czas na ich wykonanie można rozbić na ograniczoną liczbę części w przypadku kolorowania warstwowego lub nieograniczoną w przypadku ułamkowego. Formalnie b -warstwowym k -kolorowaniem grafu G nazywamy funkcję przypisującą każdemu wierzchołkowi b -elementowy podzbiór zbioru liczb $\{1, \dots, k\}$, taką że sąsiednie wierzchołki otrzymują rozłączne zbiory kolorów. Najmniejsze $k \in \mathbb{N}$ takie, że istnieje b -warstwowe k -kolorowanie, nazywamy b -warstwową liczbą chromatyczną i oznaczamy przez $\chi_b(G)$. Ułamkową liczbą chromatyczną nazywamy liczbę $\chi_f(G) = \inf_{b \in \mathbb{N}_+} \chi_b(G)/b$. Ułamkowa liczba chromatyczna przyjmuje wartości wymierne i dla żadnego grafu nie przekracza klasycznej liczby chromatycznej. Odpowiedź na pytanie czy $\chi_f(G) \leq r$ jest problemem NP-zupełnym dla każdego $r > 2$ [56].

Zainteresowanie badaczy budzi nie tylko kolorowanie grafów, ale również nieskończonych struktur. Do jednych z bardziej inspirujących tego typu zagadnień należy problem Hadwiger-Nelsona. Polega on na pytaniu, ile najmniej kolorów potrzeba do pokolorowania płaszczyzny tak, aby punkty w odległości euklidesowej równej jeden otrzymały różne kolory. Problem był pierwotnie postawiony przez Nelsona, opublikowany przez Hadwigera [60]. Nelson pokazał, że potrzeba co najmniej 4 kolorów, (zobacz dowód Mosera i Mosera [110]). Isbel pokazał, że 7 kolorów wystarcza [60]. Oba dowody są elementarne i dopiero niedawno de Grey przy pomocy komputera udowodnił, że potrzeba co najmniej 5 kolorów [30]. Natomiast Woodall [131] udowodnił, że jeśli dodatkowo założymy, że kolory mają być obszarami ograniczonymi przez krzywe Jordana, to 6 kolorów jest konieczne.

Powstało wiele wariantów problemu Hadwiger-Nelsona i wyników z nim związanych [124]. Exoo [37] rozważał takie kolorowania płaszczyzny, że punkty, których euklidesowa odległość jest w przedziale $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, nie mogą mieć tego samego koloru. Przez $G_{[a,b]}$ będziemy oznaczać nieskończony graf, którego zbiorem wierzchołków jest zbiór punktów płaszczyzny, a każda para punktów, których odległość euklidesowa należy do przedziału $[a, b]$, tworzy krawędź. Grafy rozważane przez Exoo to $G_{[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]}$, a pytanie o $\chi(G_{[1,1]})$ jest problemem Hadwiger-Nelsona. Exoo pokazał, że 7 kolorów jest konieczne i wystarcza dla $\varepsilon \in [0.134757, 0.138998]$ oraz że 5 kolorów jest koniecznych dla $\varepsilon > 0.008534$. Grytczuk [57] pokazał, że pięć kolorów jest niezbędnych dla dowolnego $\varepsilon > 0$ (teraz dzięki pracy de Greya [30] wiemy, że 5 jest konieczne nawet dla $\varepsilon = 0$). Okazało się że wcześniej był znany silniejszy wynik, niezależnie odkryty przez Dunfielda, Browna i Perriego [33, 34, 32] oraz Currie'ego i Eggletona [27], że sześć kolorów jest niezbędnych dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Interesującym przypadkiem ze względu na zastosowania jest graf $G_{[1,2]}$ [130]. Ivanow [73] pokazał, że dla takiego grafu wystarcza 12 kolorów (tzn. $\chi(G_{[1,2]}) \leq 12$).

Problem Hadwiger-Nelsona był również rozważany w wersji cyrkularnej. De Vos, Ebrahimi, Ghebleh, Goddyn, Mohar i Naserasr [31] udowodnili, że cyrkularna liczba chromatyczna płaszczyzny wynosi co najmniej 4. Wynik de Greya [30] implikuje, że cyrkularna liczba chromatyczna płaszczyzny jest większa niż 4. Od góry znane było jedynie ograniczenie przez klasyczną liczbę



Rysunek 4: 6.3095-cyrkularne kolorowanie płaszczyzny

chromatyczną czyli 7. Następujące twierdzenie jest pierwszym nietrywialnym ograniczeniem na cyrkularną liczbę chromatyczną płaszczyzny:

Twierdzenie 14 (R4 Theorem 1). *Cyrkularna liczba chromatyczna płaszczyzny nie przekracza $4 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 6.3095$.*

Kolorowanie r -cyrkularne płaszczyzny dla $r = 4 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$ jest przedstawione na Rysunku 4 i wyraża się wzorem

$$c(x, y) = \frac{2\sqrt{3}}{3}(x - (2 + \sqrt{3})\lfloor y \rfloor_{\frac{1}{2}})_{\ell},$$

gdzie $\lfloor y \rfloor_{\frac{1}{2}} = \lfloor 2y \rfloor \cdot \frac{1}{2}$, $(z)_{\ell} = z - \lfloor \frac{z}{\ell} \rfloor \cdot \ell$ dla $\ell = 2 + 2\sqrt{3}$ i $z \in \mathbb{R}$.

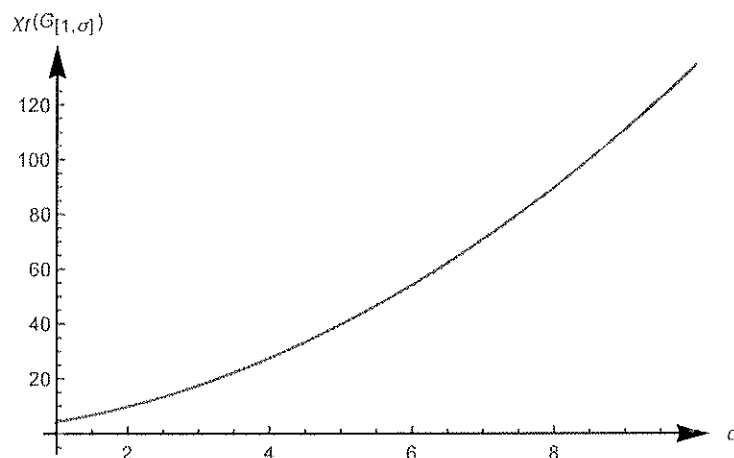
Twierdzenie 14 udało się rozszerzyć na przypadek wersji rozważanej przez Exoo [37]

Twierdzenie 15 (R4 Theorem 2). *Dla $\varepsilon \in [0, 0.0673)$ zachodzi*

$$\chi_c(G_{[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]}) \leq 3 + \frac{(4 + \sqrt{3})(1 + \varepsilon)}{\sqrt{3\varepsilon^2 - 10\varepsilon + 3}} < 7.$$

Wyniki z pracy **R4** czyli Twierdzenie 14 i 15 są samodzielnymi wynikami habilitanta.

Problem Hadwigera-Nelsona był rozważany również w wersji ułamkowej [43, 118]. Obecnie najlepsze oszacowania na ułamkową liczbę chromatyczną płaszczyzny (tzn grafu $G_{[1,1]}$) zostały wyznaczone odpowiednio przez Cranstona i Raberna [26] oraz Hochbega i O'Donnelli'ego [66] i



Rysunek 5: Ograniczenie na $\chi_f(G_{[1,\sigma]})$ z Twierdzenia 16

wynoszą $3.6190 \leq \chi_f(G_{[1,1]}) \leq 4.36$. Wraz z Joanną Sokół i Krzysztofem Węskiem zbadaliśmy ułamkowe kolorowanie płaszczyzny w wersji zdefiniowanej przez Exoo [37], tzn. grafu $G_{[1,\sigma]}$ dla $\sigma \geq 1$ otrzymując:

Twierdzenie 16 (R3 Theorem 3). Dla dowolnego $\sigma \geq 1$ zachodzi $\chi_f(G_{[1,\sigma]}) \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sigma + \sqrt{1-x^2}}{x}$ gdzie x jest pierwiastkiem równania $\sigma x = \pi/6 - \arcsin(x)$.

Ograniczenie z Twierdzenia 16 przedstawione jest na wykresie na Rysunku 5

Twierdzenie 16 dla $\sigma = 2$, czyli przypadku szczególnie interesującego w ze względu na zastosowania [130] implikuje $\chi_f(G_{[1,2]}) \leq 9.9$. Dla porównania $\chi(G_{[1,2]}) \leq 12$ [73].

Zbadaliśmy [57] również problem Hadwigera-Nelsona w wersji j -warstwowej dla „małych” j otrzymując w szczególności 2-warstwowe kolorowanie grafu $G_{[1,1]}$ na 12 kolorów ($12/2 = 6$), 3-warstwowe na 16 kolorów ($16/3 = 5\frac{1}{3}$) oraz 7-warstwowe na 37 kolorów ($37/7 = 5\frac{2}{7} \approx 5.26$). Schematy kolorowanie 2- i 3-warstwowe są przedstawione odpowiednio na rysunkach 6 i 7.

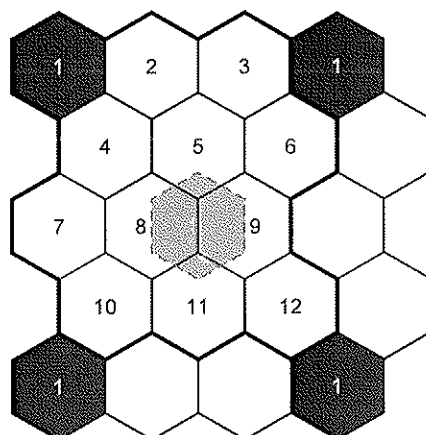
Ponadto stworzyliśmy też ogólny schemat tworzenia warstwowego kolorowania $G_{[1,\sigma]}$:

Twierdzenie 17 (R3 Theorem 6). Dla każdego $n, m \in \mathbb{N}_+$ istnieje nm -warstwowe kolorowanie $G_{[1,\sigma]}$ na $\lceil (\frac{2\sigma}{\sqrt{3}} + 1)n \rceil \lceil (\frac{2\sigma}{\sqrt{3}} + 1)m \rceil$ kolorów.

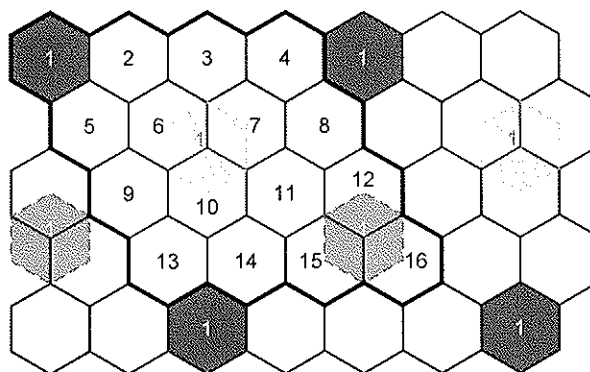
Ogólny schemat kolorowania polega na siatkach sześciokątów, kolejne warstwy są przesunięte względem siebie w poziomie i na ukos. Rysunek 8 przedstawia kolorowanie dla $n = m = 2$ i $\sigma = 1$ czyli 4-warstwowe kolorowanie na 25 kolorów.

Dla przykładu podajemy w tabeli liczbę kolorów k dla j -warstwowego kolorowania $G_{[1,2]}$, skonstruowanego przy pomocy Twierdzenie 17:

$j =$	1	6	9	84	87
$k =$	12	70	100	930	960
$k/j =$	12	11.67	11.11	11.07	11.03



Rysunek 6: 2-warstwowe kolorowanie $G_{[1,1]}$ na 12 kolorów

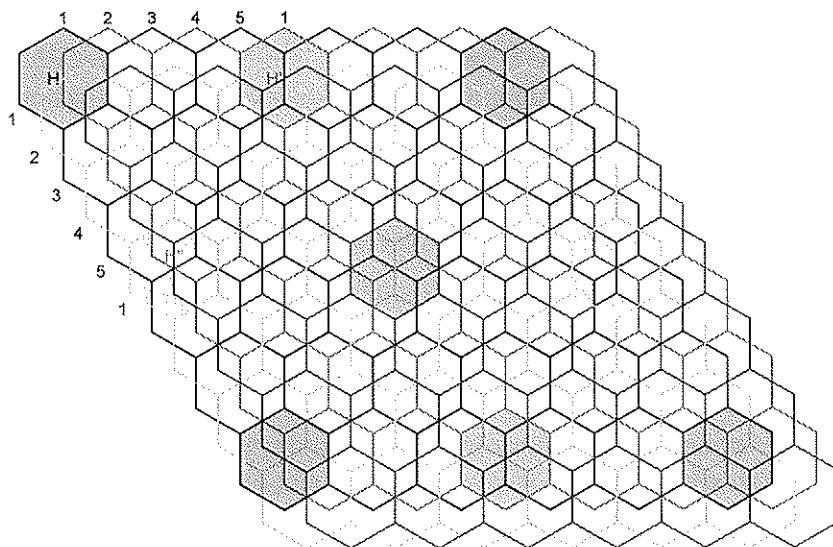


Rysunek 7: 3-warstwowe kolorowanie $G_{[1,1]}$ na 16 kolorów

Twierdzenia z artykułu [R3] dotyczące ułamkowego i warstwowego kolorowania płaszczyzny są efektem współpracy z Joanną Sokół i Krzysztofem Węskiem. Główne idee kolorowań są autorstwa habilitanta.

C. Kolorowanie i etykietowanie $L(2,1)$ grafów przecięć dysków jednostkowych

Klasy grafów przecięć obiektów geometrycznych są bardzo interesujące zarówno ze względu na teoretyczne własności jak i praktyczne zastosowania [4, 93, 95, 113, 108]. W kontekście modeli kolorowań inspirowanych zagadnieniami telekomunikacyjnymi szczególnie interesujące są grafy przecięć dysków [6, 106, 105, 130], ponieważ dość wiernie opisują grafy połączeń sieci radiowych. Sieci, w których wszystkie radiostacje mają taki sam zasięg, można modelować grafami przecięć dysków jednostkowych. Problem rozpoznania, czy graf wejściowy jest grafem przecięć dysków jednostkowych, jest problemem NP-trudnym [15]. Dla $k \geq 3$ problem k -kolorowalności pozostaje NP-trudnym w klasie grafów przecięć dysków jednostkowych (w



Rysunek 8: 4-warstwowe kolorowanie $G_{[1,1]}$ na 25 kolorów

skrótce UDG) [24, 54].

Dowolny graf UDG G można pokolorować w czasie wielomianowym na $3\omega(G) - 2$ kolorów [114], a algorytm FirstFit użyje nie więcej niż $6\omega(G) - 7$ kolorów. Zauważmy, że grafy UDG są grafami $K_{1,6}$ -wolnymi. Capponi i Pilloto [20] udowodnili że algorytm FirstFit użyje nie więcej niż $(p-1)\chi(G)$ do pokolorowania $K_{1,p}$ -wolnego grafu G , czyli co najwyżej $5\chi(G)$ kolorów, jeśli G jest grafem UDG. Shao i inni [121] udowodnili, że rozpiętość $L(2, 1)$ grafu $K_{1,t}$ -wolnego o maksymalnym stopniu Δ nie przekracza $\frac{t-2}{t-1}\Delta^2 + 2\Delta$. Zatem $L(2, 1)(G) \leq \frac{4}{5}\Delta^2(G) + 2\Delta(G)$ dla dowolnego grafu przecięć dysków jednostkowych G [121]. Fiala, Fishkin i Fomin [39] pokazali, że można znaleźć $L(2, 1)$ -etykietowanie grafu UDG G o rozpiętości nie większej niż $18\omega(G)$ pod warunkiem, że dana jest reprezentacja geometryczna G . Jeśli reprezentacja grafu nie jest znana, to wtedy można znaleźć $L(2, 1)$ -etykietowanie o rozpiętości nie przekraczającej $20\omega(G) - 8$ [39].

Kolorowanie grafów jest trudniejsze w sytuacji, gdy graf do pokolorowania nie jest dany w całości a priori, tylko jest prezentowany wierzchołek po wierzchołku wraz z krawędziami incydentnymi z poprzednio zaprezentowanymi wierzchołkami. Trudność polega na tym, że wierzchołek trzeba pokolorować w kroku, w którym jest prezentowany, zanim poznamy kolejne wierzchołki. O takim kolorowaniu mówimy online [14], w przeciwieństwie do offline, czyli gdy cały graf jest znany a priori. Dla danego algorytmu kolorującego online, definiujemy współczynnik konkurencyjności jako maksymalny iloraz liczby kolorów użytych do pokolorowania danego grafu przez liczbę chromatyczną tego grafu. Współczynnik konkurencyjności oznaczamy przez cr . Najprostszym przykładem algorytmu kolorującego online jest algorytm FirstFit. Współczynnik konkurencyjności algorytmu FirstFit na klasie UDG wynosi 5 [20]. Nietrywialny algorytm online dla grafów przecięć przedziałów przedstawili Kierstead i Trotter [92]. Algorytm ten ma współczynnik konkurencyjności równy 3, dokładniej wiadomo, że użyje najwyżej $3\omega(G) - 2$ kolorów do pokolorowania grafu G . Ograniczenie to jest osiągalne.

Etykietowanie $L(2, 1)$ można rozważać również w trybie online. Fiala, Fishkin i Fomin [39] przedstawili algorytm znajdujący etykietowanie $L(p_1, \dots, p_k)$ grafów przecięć dysków o ograniczonej średnicy w trybie online. Algorytm wykorzystuje reprezentację geometryczną grafu i opiera się na szczególnym kolorowaniu płaszczyzny zależnym od p_1, \dots, p_k , oraz maksymalnym ilorazie średnic prezentowanych kół. Płaszczyzna jest podzielona na sześciokąty średnicy jeden (odpowiednio domknięte na brzegach). W przypadku etykietowania $L(2, 1)$ i dysków jednostkowych każdy sześciokąt otrzymuje jeden z 25 kolorów w taki sposób, że

(L1) sześciokąty w kolorach następujących po sobie (jak również w kolorach 1 i 25) są w odległości co najmniej 1,

(L2) sześciokąty w tym samym kolorze są oddalone od siebie co najmniej o 2.

Wierzchołki etykietowanego grafu utożsamiamy ze środkami okręgów, które je reprezentują. Gdy wczytywany jest wierzchołek v , sprawdzany jest kolor punktu v na płaszczyźnie, nazwijmy go $\varphi(v)$. Następnie zliczane są środki okręgów w sześciokącie zawierającym v , powiedzmy że jest ich t . Wierzchołkowi v przydzielamy etykietę $\varphi(v) + 25(t - 1)$. Warunki narzucone na kolorowanie płaszczyzny gwarantują nam, że otrzymane etykietowanie jest etykietowaniem $L(2, 1)$. Współczynnik konkurencyjności tego algorytmu wynosi 25, czyli tyle, ile kolorów zostało użytych do kolorowania płaszczyzny. W pracy **R5** przedstawiliśmy algorytm online do kolorowania oraz etykietowania $L(2, 1)$ inspirowany algorytmem Fiali, Fishkina i Fomina [39]. Główna różnica polega na wykorzystaniu j -warstwowego kolorowania płaszczyzny zamiast klasycznego. Zakładamy że j -warstwowe kolorowanie φ jest dane jako j kolorowań płaszczyzny $\varphi_1, \dots, \varphi_j$ oraz, że dla każdego $i \in \{1, \dots, j\}$ każdy kolor kolorowania φ_i jest sumą rozłącznych odpowiednio oddalonych od siebie sześciokątów. Takie kolorowanie nazywamy solidnym.

Dla zadanego j -warstwowego k -kolorowania płaszczyzny $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_j)$ nasz algorytm $Color_\varphi$ działa następująco.

Dla $i = 1, \dots, n$:

1. wczytaj wierzchołek v_i ,
2. dla każdego $r = 1, \dots, j$ niech T_r oznacza sześciokąt wyznaczonych przez φ_r zawierających v_i ,
3. niech p oznacza liczbę wierzchołków w $T_1 \cap \dots \cap T_j$,
4. niech $\ell = (p \bmod j) + 1$ będzie numerem warstwy do której przydzielamy v_i ,
5. niech t oznacza liczbę wierzchołków w T_ℓ ,
6. pokoloruj v_i na kolor $\varphi_\ell(T_\ell) + k(t - 1)$.

Jeśli kolorowanie φ jest j -warstwowym kolorowaniem grafu $G_{[1,1]}$ to algorytm $Color_\varphi$ zwróci poprawne kolorowanie grafu przecięć dysków jednostkowych dla zadanego ciągu dysków. Jeśli φ spełnia dodatkowo warunki (L1) oraz (L2) to otrzymane kolorowanie będzie etykietowaniem $L(2, 1)$. Liczbę kolorów zużytych przez algorytm $Color_\varphi$ szacuje poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 18 (R5 Theorem 3.3). Niech φ będzie solidnym j -warstwowym kolorowaniem płaszczyzny na k -kolorów, a G grafem przecięć dysków. Algorytm $Color_\varphi$ do pokolorowania G użyje najwyżej $k \cdot \lfloor \frac{\omega(G)+(j-1)\gamma_\varphi}{j} \rfloor$ kolorów, gdzie γ_φ jest stałą zależną od kolorowania φ .

Korzystając z faktu, że liczba klikowa jest dolnym ograniczeniem na liczbę chromatyczną, otrzymujemy oszacowanie współczynnik konkurencyjności. Niech \mathcal{G}_ω oznacza klasę grafów przecięć dysków jednostkowych o liczbie klikowej co najmniej ω . Wtedy

Wniosek 19 (R5 Corollary 3.4). Jeżeli φ jest solidnym j -warstwowym k -kolorowaniem grafu $G_{[1,1]}$ to dla każdej $\omega \in \mathbb{N}_+$ zachodzi

$$cr(Color_\varphi(\mathcal{G}_\omega)) \leq \frac{k}{j} + O\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

Dzięki Twierdzeniu 17 z pracy **R3** potrafimy skonstruować odpowiednie odpowiednie kolorowanie na potrzeby algorytmu $Color_\varphi$. Stąd otrzymujemy

Wniosek 20 (R5 Theorem 3.5 i Corollary 3.6). Dla każdych $h, \omega \in \mathbb{N}_+$ istnieje solidne h^2 -warstwowe kolorowanie φ płaszczyzny, takie że

$$cr(color_\varphi(\mathcal{G}_\omega)) \leq \frac{\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) \cdot h\right]^2}{\omega} \cdot \left\lfloor \frac{\omega + (h^2 - 1)6h^2}{h^2} \right\rfloor = 4.65 + O\left(\frac{1}{h}\right) + O\left(\frac{h^4}{\omega}\right).$$

Zauważmy, że dla $h \geq 5$ i odpowiednio dużych ω istnieje kolorowanie φ takie, że algorytm $Color_\varphi$ ma współczynnik konkurencyjności mniejszy niż 5 w klasie grafów przecięć dysków o liczbie klikowej ω . Jest to współczynnik konkurencyjności mniejszy niż najmniejszy dotąd znany osiągany przez algorytm FirstFit [20].

Aby użyć nasz algorytm do etykietowania $L(2, 1)$ potrzebujemy odpowiednich kolorowań płaszczyzny:

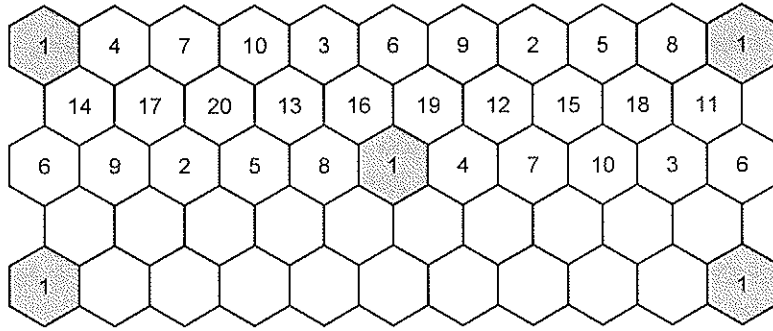
Twierdzenie 21 (bf R5 Theorem 4.4). Istnieje solidne j -warstwowe kolorowanie płaszczyzny $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{1, \dots, k\}$ spełniające warunki (L1) i (L2) dla następujących wartości parametrów:

1. $j = 1, k = 20$ i $\gamma_\varphi = 1$ (zobacz Rysunek 9),
2. $j = 2, k = 34$ i $\gamma_\varphi = 1$ (zobacz Rysunek 10),
3. $j = 3, k = 49$ i $\gamma_\varphi = 1$,
4. $j = h^2, k = 3\left[h\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) + 1\right]^2 + 1$ i $\gamma_\varphi = 6h^2$ gdzie $h \in \mathbb{N}$ jest dowolne.

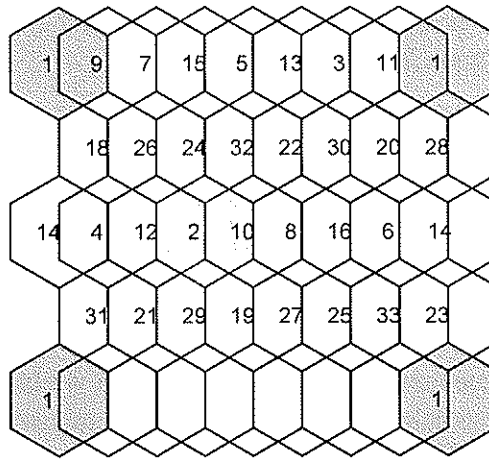
Korzystając z pokolorowań danych przez powyższe twierdzenie otrzymujemy

Wniosek 22. Istnieje solidne j -warstwowe kolorowanie płaszczyzny φ , takie że algorytm $Color_\varphi$ zwraca $L(2, 1)$ -etykietowanie oraz

1. $cr(Color_\varphi(\mathcal{G}_\omega)) \leq 10 + \frac{10}{2\omega-1}$ dla $j = 1$,



Rysunek 9: 20-kolorowanie $G_{[1,1]}$ spełniające (L1) i (L2)



Rysunek 10: 2-warstwowe 34-kolorowanie $G_{[1,1]}$ spełniające (L1) i (L2)

2. $cr(\text{Color}_\varphi(\mathcal{G}_\omega)) \leq 8.5 + \frac{76.5}{2\omega-1}$ dla $j = 2$,
3. $cr(\text{Color}_\varphi(\mathcal{G}_\omega)) \leq 8\frac{1}{6} + \frac{204\frac{1}{6}}{2\omega-1}$ dla $j = 3$,
4. $cr(\text{Color}_\varphi(\mathcal{G}_\omega)) \leq 6.97 + O\left(\frac{1}{h}\right) + O\left(\frac{h^4}{\omega}\right)$ dla $j = h^2$, $h \in \mathbb{N}$,

Zauważmy, że nasz algorytm jest lepszy od algorytmu Fiali i in. [39] nawet dla jednowarstwowego kolorowania płaszczyzny.

Idea algorytmu może być zastosowana do kolorowania i etykietowania grafów przecięć obiektów innych niż koła na płaszczyźnie.

Pomysł wykorzystania warstwowego kolorowania płaszczyzny i metoda oszacowania liczby użytych kolorów przez algorytm pochodzi od habilitanta.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

5.1. Etykietowania wierzchołków kompleksów symplecjajalnych

Publikacje wchodzące w skład rozprawy doktorskiej:

- [A1] A. Idzik, K. Junosza-Szaniawski, „Combinatorial lemmas for nonoriented pseudomanifolds” *Topological Methods in Nonlinear Analysis*. 22, (2003), 387-398. (w spisie literatury pozycja [69])
- [A2] A. Idzik, K. Junosza-Szaniawski, „Combinatorial lemmas for polyhedrons” *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 25(1-2) (2005) 95-102 (w spisie literatury pozycja [70])

Publikacje po doktoracie spoza rozprawy habilitacyjnej:

- [A3] A. Idzik, Konstanty Junosza-Szaniawski „Combinatorial lemmas for polyhedrons I” *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 26 (3) (2006) 439-448. (w spisie literatury pozycja [71])
- [A4] A. Idzik, Konstanty Junosza-Szaniawski, „Combinatorial lemmas for oriented complexes” *Topological Methods in Nonlinear Analysis* 32 No 2, (2008) 379-410. (w spisie literatury pozycja [72])

Teoria etykietowania wierzchołków kompleksów bierze swój początek w Lemacie Spernera [125]. Lemat Spernera określa warunki brzegowe etykietowania wierzchołków podziału symplecjajalnego dowolnego sympleksu $n - 1$ wymiarowego, które gwarantują istnienie sympleksu o etykietach $1, \dots, n$. Używając Lematu Spernera można w prosty sposób udowodnić lemat Knastera-Kuratowskiego-Mazurkiewicza o pokryciu sympleksu [94], a na tej podstawie twierdzenie Brouwera o punkcie stałym. Lemat Spernera doczekał się wielu uogólnień. Schapley [122] rozszerzył możliwy zbiór etykiet ze zbioru $\{1, \dots, n\}$ na zbiór wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{1, \dots, n\}$ i określił warunki brzegowe gwarantujące istnienie sympleksu zbalansowanego. Pojawiły się kolejne uogólnienia: Ichiishi rozważał zbiór wektorów jako etykiety. W tym przypadku celem było wykazanie istnienia sympleksu, którego kombinacja wypukła etykiet zawierała początek układu współrzędnych. Lovas [104] rozważał elementy matroidu jako etykiety i wykazał istnienie sympleksu zaetykietowanego elementami jego bazy.

Głównym wynikiem prac [A1] i [A4] jest zdefiniowanie struktury primoidu w zbiorze etykiet i udowodnienie przy jej pomocy wspólnego uogólnienia wcześniej znanych twierdzeń. Pierwszym z nich jest twierdzenie o związku liczb w pełni zaetykietowanych sympleksów wewnątrz kompleksu oraz na jego brzegu, które jest wspólnym uogólnieniem twierdzeń Todda, Goulda i Tollea, Loásza, Fana. To pozwoliło udowodnić twierdzenie o istnieniu sympleksu w pełni zaetykietowanego przy spełnieniu pewnych warunków brzegowych triangulacji sympleksu geometrycznego, które jest wspólnym uogólnieniem Lematów Spernera, Shapleya, Lovasa. To twierdzenie z kolei pozwoliło udowodnić twierdzenie o pokryciu sympleksu uogólniające Lemat Knastera-Kuratowskiego-Mazurkiewicza, Idzika, Shapleya.

Definicja funkcji rankingu i podprzestrzeni dla primoidów oraz sformułowanie warunków brzegowych przy użyciu tych pojęć w twierdzeniu gwarantującym istnienie sympleksu zaetykietowanego bazą primoidu, są pomysłem habilitanta.

Ponadto w pracy [A2] sformułowaliśmy warunki brzegowe dla etykietowania wierzchołków podziału sympleksalnego wielościanów gwarantujące istnienie sympleksu zbalansowanego. Szczególnym przypadkiem otrzymanego twierdzenia są twierdzenia Ichiishiego i Idzika [68]. Natomiast w pracy [A3] osłabiamy warunki brzegowe gwarantujące istnienie pożądanego sympleksu. Warunki te są wyrażone przez zabronienie kombinacji etykiet na sympleksach brzegowych, zamiast zabrania etykiet dla każdego wierzchołka z osobna. Jako wniosek otrzymujemy wyniki van der Laana, Talmana i Yanga [128].

Pomysł na słabsze warunki brzegowe, polegające na wyrażeniu zabronionych kombinacji etykiet dla sympleksów brzegowych zamiast zabrania etykiet dla każdego wierzchołka na brzegu z osobna, pochodzi od habilitanta.

5.2. Rozgrywana liczba chromatyczna

[A5] K. Junosza-Szaniawski, Ł. Rożej, Game chromatic number of graphs with locally bounded number of cycles, *Information Processing Letters* Volume 110, Issue 17, (2010) 757-760. (w spisie literatury pozycja [81])

Rozgrywana liczba chromatyczna była zdefiniowana niezależnie przez Bramsa i Bodlaendera [5, 11]. Rozważmy grę dla dwóch graczy, w której ruch każdego gracza polega na poprawnym pokolorowaniu jednego z niepokolorowanych dotąd wierzchołków. Celem pierwszego gracza jest pokolorowanie całego grafu przy pomocy dostępnego zbioru kolorów, celem drugiego jest do tego nie dopuścić. Rozgrywaną liczbą chromatyczną nazywamy najmniejszą liczbę kolorów, dla której istnieje strategia wygrywająca dla pierwszego gracza. Przez rozgrywaną liczbę chromatyczną klasy grafów rozumiemy maksymalną liczbę chromatyczną grafu z tej klasy. Faigle, Kern, Kierstead, Trotter [38] pokazali, że dla drzew wynosi ona 4. Sidorowicz [123] pokazała, że dla kaktusów jest to 5. Dla grafów zewnętrznie planarnych mieści się ona między 6 a 7 [58, 91], natomiast dla grafów planarnych pomiędzy 8 a 17 [91, 136].

Głównym wynikiem pracy [A5] jest ograniczenie $c + 4$ na rozgrywaną liczbę chromatyczną, gdzie c jest maksymalną liczbą cykli w grafie przechodzących przez jedną krawędź. Jako wniosek dla $c = 0$ otrzymujemy ograniczenie Faiglea i innych dla drzew [38], a dla $c = 1$ ograniczenie Sidorowicz dla kaktusów [123]. Dowód osiągalności ograniczenia dla kaktusów [123] wymaga analizy 20 przypadków. Pytanie o osiągalność ograniczenia $c + 4$ dla $c = 2$ pozostaje otwarte.

Cel badawczy pracy został postawiony przez habilitanta, który miał również istotny udział w tworzeniu dowodu głównego twierdzenia.

5.3. Etykietowanie $L(2, 1)$

[A6] K. Junosza-Szaniawski, P. Rzążewski, On the Complexity of Exact Algorithm for $L(2, 1)$ -labeling of Graphs, *Information Processing Letters* 111, 697-701, 2011

(DOI: 10.1016/j.ipl.2011.04.010)

wersja konferencyjna On Improved Exact Algorithms for $L(2, 1)$ -labeling of Graphs, IWOCA 2010 Proc., LNCS 6460, 34–37, 2011 (DOI: 10.1007/978-3-642-19222-7) (w spisie literatury pozycja [82])

[A7] K. Junosza-Szaniawski, P. Rzażewski, On the number of 2-packings in a connected graph, Discrete Mathematics 312, 3444–3450, 2012 (DOI: 10.1016/j.disc.2012.02.005) (w spisie literatury pozycja [83])

[A8] K. Junosza-Szaniawski, P. Rzażewski, An Exact Algorithm for the Generalized List T -Coloring Problem, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 16 Issue: 3, 77-94, (2014). (w spisie literatury pozycja [84])

Wyniki pracy [A6] zostały omówione w części A opisu rozprawy i były początkiem badań habilitanta nad etykietowaniem $L(2, 1)$, które później zaowocowały pracami [R1], [R2] i [R5]. Dotyczą one szacowania złożoności algorytmu znajdującego rozpiętość $L(2, 1)$. W konferencyjnej wersji pracy [A6] oszacowaliśmy liczbę k -elementowych 2-upakowań w n -wierzchołkowym grafie spójnym przez $\binom{n-k+1}{k}$. To oszacowanie oprócz zastosowania do wyznaczenia złożoności wspomnianego algorytmu jest interesujące samo w sobie i wpisuje się w nurt badań ekstremalnej kombinatoryki. Moon i Moser [109] wykazali, że maksymalnych zbiorów niezależnych (równoważnie maksymalnych klik) w grafie jest nie więcej niż $O(3^{n/3}) = O(1.24423^n)$, a graf osiągający tę liczbę składa się z rozłącznych trójkątów. Sagan [116] pokazał, że w drzewie maksymalnych zbiorów niezależnych może być co najwyżej $O(2^{n/2}) = O(1.4143^n)$ i scharakteryzował drzewa, które tą liczbę osiągają. Dla grafów d -regularnych Zhao [134] udowodnił, że zbiorów niezależnych (niekoniecznie maksymalnych) jest co najwyżej $(2^{d+1} - 1)^{n/2d}$ co potwierdza hipotezę Alona [1].

Naturalnym jest pytanie o maksymalną liczbę wszystkich 2-upakowań w grafie spójnym, (bez warunku na ich licznosc). Wiemy, że jest ich nie więcej niż $\sum_{k=0}^n \binom{n-k+1}{k} = O(1.6180^n)$. W pracy [A7] udało nam się poprawić to oszacowanie do $O(1.5400^n)$ przy pomocy tzw „głębokiej” rekurencji, wspomnianej w części A opisu rozprawy. Najlepsze dolne ograniczenie to $\Omega(1.4970^n)$ i jest ono osiągane w rodzinie grafów na Rysunku 2. Ponadto pokazaliśmy dolne ograniczenie na maksymalną liczbę k -elementowych 2-upakowań w grafie spójnym równe $\max\left(\binom{n-2k+2}{k}, (k+1)\binom{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{k}\right)$.

Głównym wynikiem pracy [A8] jest algorytm rozwiązujący problem uogólnionego T -kolorowania w wersji listowej. Problem ten jest jednoczesnym uogólnieniem kolorowania listowego oraz T -kolorowania, które jest ogólniejsze od problemu przydziału kanałów. Danymi wejściowymi jest graf, dla każdego wierzchołka lista dostępnych kolorów, a dla każdej krawędzi e lista $T(e)$ zabronionych różnic na jej końcach. Szukane jest kolorowanie c , czyli przypisanie wierzchołkom liczb naturalnych, każdemu wierzchołkowi liczby z jego listy dopuszczalnych kolorów (liczb), w taki sposób dla każdej krawędzi uv spełniony był warunek $|c(u) - c(v)| \notin T(e)$. Złożoność czasowa i pamięciowa naszego algorytmu wynosi $O^*((\tau+2)^n)$, gdzie $\tau = \max\{T(e) : e \in E(G)\}$. Dla zagadnienia $L(2, 1)$ -etykietowania τ wynosi 1. Algorytm działa w oparciu o metodę zaprojektowaną w pracy [R1] polegającą na generowaniu listy ciągów kodujących częściowe rozwiązanie.

Wprawdzie algorytm Cygana i Kowalika nie rozwiązuje problemu listowego T -kolorowania tylko problem węższy (problem przydziału kanałów), to jednak jesteśmy przekonani, że można go zaadaptować do tego problemu. Nasz algorytm ma tę samą złożoność czasową, co algorytm Cygana i Kowalika [28]. Zaletą naszego algorytmu, w przeciwieństwie do [28], jest to, że złożoność czasowa dla konkretnego grafu może być znacznie mniejsza niż szacowanie $O^*((\tau + 1)^n)$. W szczególności podajemy lepsze szacowania złożoności dla klas grafów o ograniczonym maksymalnym stopniu, oraz grafów $K_{1,d}$ -wolnych.

Wkład habilitanta polegał na udowodnieniu wzoru na liczbę k -elementowych 2-upakowań, głównej idei generowania odpowiednich trójek zbiorów, użytej do oszacowania algorytmu wyznaczającego rozpiętość grafu, oraz pomysł tzw „głębokiej” rekurencji czyli analizowania poddrzew średnicy 4 przy generowaniu wszystkich 2-upakowań.

5.4. Upakowania miękkich prostokątów

[A9] A. Fügenschuh, K. Junosza-Szaniawski, Z. Lonc, Exact and Approximation Algorithms for a Soft Rectangle Packing Problem, Optimization 63 Issue: 11, 1637-1663, (2014) . (w spisie literatury pozycja [48])

Problem rozważany w pracy [A9] nosi nazwę upakowania miękkich prostokątów (ang. soft rectangle packing) i jest następujący: dany jest ciąg liczb rzeczywistych dodatnich (a_1, \dots, a_k) oraz liczby w, h , takie że $w \cdot h = \sum_{i=1}^k a_i$. Szukamy podziału prostokąta o wymiarach w na h , na k prostokątów o polach odpowiednio a_1, \dots, a_k o minimalnej sumie obwodów, (wspólny bok dwóch prostokątów liczymy tylko raz do sumy obwodów). Problem jest inspirowany zagadnieniami praktycznymi takimi jak: obliczenia równoległe [7], projektowanie chipów [133], projektowanie obudowy przewodów [46].

Powstało kilka algorytmów przybliżonych rozwiązujących ten problem [7, 111]. W naszej pracy rozważamy modyfikację algorytmu opartego na zasadzie dziel i zwyciężaj [112]. Głównym wynikiem naszej pracy jest ograniczenie współczynnika jakości działania algorytmu przez $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1546$ przy założeniu, że ciąg wejściowy (a_1, \dots, a_k) spełnia warunek $a_{i+1} \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2} a_i \approx 0.36602 \cdot a_i$ dla każdego $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Ponadto pokazujemy ograniczenie na współczynnik jakości algorytmu przy założeniu, że ciąg wejściowy szybko maleje, tzn. jeśli dla każdego $i \in \{1, \dots, k-1\}$ zachodzi $a_{i+1} \leq q \cdot a_i \leq \frac{1}{2} a_i$, to współczynnik jakości nie przekracza $\frac{1}{5} \left(4 + \frac{1}{\sqrt{1-q}(1-\sqrt{q})} \right)$.

Główny pomysł na analizę algorytmu dziel i zwyciężaj przy pomocy zdefiniowanego pojęcia współczynnika wpływu każdego prostokąta (czyli ile proporcjonalnie do swojej powierzchni wnosi do sumy obwodów) należą do habilitanta.

5.5. Problem przekolorowywania grafu

- [A10] V. Garnero, K. Junosza-Szaniawski, M. Liedloff, P. Montealegre, P. Rzażewski, Fixing improper colorings of graphs, *Theoretical Computer Science*, 711, 2018, 66–78 (DOI: 10.1016/j.tcs.2017.11.013)
wersja konferencyjna K. Junosza-Szaniawski, M. Liedloff, P. Rzażewski, Fixing Improper Colorings of Graphs, *SOFSEM 2015: Theory and Practice Of Computer Science Book Series: LNCS 8939*, 266-276, (2015) . (w spisie literatury pozycja [50])

Praca dotyczy problemu przekolorowywania grafu, czyli odpowiedzi na pytanie czy można z danego niewłaściwego pokolorowania grafu na r kolorów uzyskać właściwe kolorowanie przez zamianę koloru w co najwyżej k wierzchołkach. Praca wpisuje się pomiędzy dwa nurty: reoptymalizacji [120] i transformacji rozwiązań jednych w drugie [13, 21].

Do głównych wyników pracy należy dowód NP-zupełności problemu dla $r \geq 3$, gdy k jest częścią danych oraz algorytm rozwiązujący problem w czasie $O^*(2^n)$. Ponadto pokazujemy algorytm o złożoności czasowej $O^*((2r - 2)^k)$. Dowodzimy również, że problem jest W[1]-trudny przy parametryzacji przez k oraz że problem nie ma wielomianowego jądra, przy standardowych założeniach teorii złożoności. Przedstawiamy algorytm dla grafów o ograniczonej szerokości drzewiastej. Rozważamy również nowy parametr grafowy liczby naprawczej (ang. fixing number) czyli najmniejszej liczby k takiej, że z dowolnego pokolorowania grafu można otrzymać właściwe kolorowanie przez przekolorowanie co najwyżej k wierzchołków.

Pomysł na algorytm o złożoności $O^*((2r - 2)^k)$ oraz wyniki dotyczące liczby naprawczej pochodzą głównie od habilitanta.

5.6. Maksymalne kliki w grafach przecięć wielokątów

- [A11] V.E. Brimkov, K. Junosza-Szaniawski, S. Kafer, J. Kratochvíl, M. Pergel, P. Rzażewski, M. Szczepankiewicz, J. Terhaar, Homothetic Polygons and Beyond: Maximal Cliques in Intersection Graphs, *Discrete Applied Mathematics* 247, 263-277, 2018 (DOI: 10.1016/j.dam.2018.03.046).(w spisie literatury pozycja [16])
wersja konferencyjna Beyond homothetic polygons: recognition and maximum clique, *ISAAC 2012 Proc.*, LNCS 7676, 619-628, (2012)

W pracy [A11] rozważamy maksymalne kliki w klasach grafów P -hom i $k_{DIR} - CONV$. Są to odpowiednio klasy grafów przecięć jednokładnych kopii danego wielokąta P oraz przecięć wielokątów wypukłych, których ściany są równoległe do k ustalonych kierunków. Klasa $k_{DIR} - CONV$ zawiera klasę P -hom dla k równego liczbie boków wielokąta P .

Znane są algorytmy generujące kliki w czasie $O(M)$ gdzie M jest liczba generowanych klik [126]. Jeśli w grafie liczbę maksymalnych klik można ograniczyć przez wielomian, to problem najliczniejszej (oraz najcieńszej) kliki można rozwiązać w czasie wielomianowym. Kaufmann i in. [89] wykazali, że w grafie przecięć jednokładnych kopii danego trójkąta jest co najwyżej n^3 maksymalnych klik. W klasie grafów przecięć wielokątów wypukłych klik może być wykładniczo dużo, a problem najliczniejszej kliki jest NP-zupełny [100] w tej klasie grafów. Ciekawym

przypadkiem jest klasa grafów przecięć dysków jednostkowych, ponieważ grafy z tej klasy mogą zawierać $\Omega(2^{n/2})$ maksymalnych klik, ale problem znajdowania najliczniejszej klikki jest wielomianowy [25]. Jeśli rozważymy klasę grafów przecięć odcinków równoległych do ustalonych k kierunków to grafy z tej klasy mają co najwyżej $O(n^k)$ maksymalnych klik [99] i w konsekwencji najliczniejszą można znaleźć również w czasie wielomianowym.

Główny wynik pracy [A11] mówi, że w grafie przecięć n wielokątów wypukłych, których boki są równoległe do k ustalonych kierunków, jest co najwyżej $O(n^k)$ maksymalnych klik. Ponadto w pracy podajemy dolne ograniczenie na maksymalną liczbę klik maksymalnych w klasie P -hom, dokładniej: przedstawiamy konstrukcję grafu z klasy P -hom, w przypadku gdy P jest regularnym $2k$ -kątem, o $\Omega(n^{\lfloor k/2 \rfloor (1-\varepsilon)})$ klik, gdzie ε jest dowolną dodatnią stałą.

Definicja klasy $k_{DIR}-CONV$ i spostrzeżenie, że dowód ograniczenia na maksymalną liczbę klik w klasie P -hom może być zaadaptowany dla tej szerszej klasy, jak również konstrukcja ograniczenia dolnego należą do habilitanta.

5.7. Zliczanie zbiorów niezależnych

- [A12] K. Junosza-Szaniawski, Z. Lonc, M. Tuczyński, Counting Independent Sets in Claw-Free Graphs, Graph-Theoretic Concepts in Computer Science - 37th International Workshop, WG 2011, Teplá Monastery, Czech Republic, LNCS 6986 (2011), 227-237, (w spisie literatury pozycja [80])
- [A13] K. Junosza-Szaniawski, M. Tuczyński, Counting Maximal Independent Sets in Subcubic Graphs, SOFSEM 2012: Theory and Practice of Computer Science - 38th Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science, Špindlerův Mlýn, Czech Republic, LNCS 7147(2012), 325–336 (w spisie literatury pozycja [87])

Zagadnienia zliczania zyskały zainteresowanie po pracach Valianta [127]. Głównym wynikiem pracy [A12] jest algorytm zliczający zbiory niezależne w grafach $K_{1,3}$ -wolnych. Algorytm jest rekurencyjny, a jego analiza opiera się na metodzie mierz i zwyciężaj (ang. Measure & Conquer) [44, 45]. Dowodzimy, że grafy $K_{1,3}$ -wolne o maksymalnym stopniu 3 oraz 4 mają szczególną strukturę i składają się z określonych podgrafów. Podgrafom tym przypisujemy miarę (wagi), korzystając z metody mierz i zwyciężaj dowodzimy, że nasz algorytm działa w czasie $O^*(1.0836^n)$, $O^*(1.1912^n)$ i $O^*(1.2355^n)$ odpowiednio w klasie grafów $K_{1,3}$ -wolnych o maksymalnym stopniu 3, 4 oraz dowolnym. Jest to, o ile nam wiadomo, pierwsze zastosowanie tej metody, w którym miara jest przypisana podgrafom. Jeśli nasz algorytm zastosuje się jako podprocedurę w algorytmie Björklunda i in. [10], to liczbę chromatyczną w grafie $K_{1,3}$ -wolnym można obliczyć w czasie $O^*(2.2355^n)$ i pamięci wielomianowej.

Wkład habilitanta polegał na wytyczeniu celu badawczego, współtworzenia algorytmu (redukcji, strategii doboru wierzchołka do rekurencji) oraz dowodzie twierdzenia opisującego strukturę grafu $K_{1,3}$ -wolnego o maksymalnym stopniu 4.

Gaspers, Kratsch i Liedloff [51] przedstawili algorytm zliczający maksymalne zbiory niezależne w dowolnym grafie w czasie $O^*(1.3642^n)$. W pracy [A13] przedstawiliśmy algorytm zliczający maksymalne zbiory niezależne w grafach o maksymalnym stopniu 3, w czasie $O^*(1.2570^n)$.

Algorytm jest rekurencyjny, istotnym pomysłem w algorytmie było użycie czerwonych krawędzi (o innym znaczeniu niż w części A rozprawy). Gdy w wywołaniu rekurencyjnym usuwaliśmy krawędź incydentną z wierzchołkiem stopnia trzy, dodawaliśmy czerwoną krawędź między pozostałymi sąsiadami tego wierzchołka. W dalszej części działania algorytmu generowaliśmy maksymalne zbiory niezależne, ale tylko takie, które zawierały przynajmniej jeden koniec czerwonej krawędzi. To gwarantowało nam maksymalność generowanych zbiorów w grafie wejściowym. W analizie złożoności użyliśmy metody mierz i zwycięzaj, nadając wagi wierzchołkom w zależności od gęstości grafu.

Pomysł użycia czerwonych krawędzi pochodzi od habilitanta.

5.8. Generowanie rozkładu uszeregowania

[A14] A. Fuegenschuh, K. Junosza-Szaniawski, T. Klug, S.Kwasiborski, T. Schlechte, Fastest, Average and Quantile Schedule, SOFSEM 2015: THEORY AND PRACTICE OF COMPUTER SCIENCE Book Series: LNCS 8939, 201-216, (2015). (w spisie literatury pozycja [47])

Problem, którym się zajmujemy, pochodzi z zastosowań praktycznych związanych z optymalizacją transportu szynowego [119]. Czas przejazdu określonego zbioru pociągów zależy od ich uszeregowania. Chcemy wiedzieć, nie tylko ile czasu zajmie przejazd, w najlepszym i w najgorszym przypadku, ale poznać cały rozkład czasów przejazdów. Głównym wynikiem pracy jest algorytm który generuje listę wszystkich możliwych czasów, wraz z liczbą przez ile rozkładów jest realizowany. Główna idea algorytmu polega na sprowadzeniu problemu do generowania multigrafów o ustalonym ciągu stopni. W szczególności pokazujemy, że takich multigrafów o m krawędziach i n wierzchołkach jest co najwyżej $O(m^{n^2-1})$.

Pomysł sprowadzenia zagadnienia do problemu generowania multigrafów o zadanym ciągu stopni pochodzi od habilitanta.

6. Dane parametryczne:

- Sumaryczny *impact factor* według listy Journal Citation Reports (JCR) zgodnie z rokiem opublikowania: **8.599**
(Do wyznaczenia wskaźnika dla pracy opublikowanych w 2018 roku, wykorzystano dane z 2017 roku.)
- Liczba cytowań publikacji według bazy Web of Science (WoS):
 - liczba cytowań: **42**
 - liczba cytowań bez autocytowań: **23**
- Indeks Hirscha według bazy Web of Science (WoS): **4**

7. Opieka naukowa nad doktorantami w charakterze opiekuna naukowego lub promotora pomocniczego:

1. Promotor pomocniczy rozprawy doktorskiej Pawła Rzążewskiego, *Exact algorithms for graph-theoretic frequency assignment problems. (Algorytmy dokładne dla teoriografowych problemów przydziału częstotliwości)*, doktorat nadany 2015-06-18 na MiMUW.
2. Promotor pomocniczy w przewodzie doktorskim Krzysztofa Węska, *Colorings of the plane avoiding discrete collinear structures*, przewód otwarty 08-06-2017 na MiNI PW,
3. Promotor pomocniczy w przewodzie doktorskim Joanny Sokół, *Colorings of geometric intersection graphs*, przewód otwarty 08-06-2017 na MiNI PW.

Literatura

- [1] N. Alon, *Independent sets in regular graphs and sum-free subsets of finite groups*, Israel Journal of Mathematics **73** (1991), no. 2, 247–256.
- [2] K. Appel and W. Haken, *Every planar map is four colorable. part i: Discharging*, Illinois J. Math. **21** (1977), no. 3, 429–490.
- [3] K. Appel, W. Haken, and J. Koch, *Every planar map is four colorable. part ii: Reducibility*, Illinois J. Math. **21** (1977), no. 3, 491–567.
- [4] E. Asplund and B. Grünbaum, *On a coloring problem.*, MATHEMATICA SCANDINAVICA **8** (1960), 181–188.
- [5] T. Bartnicki, J. Grytczuk, H. A. Kierstead, and X. Zhu, *The map-coloring game*, The American Mathematical Monthly **114** (2007), no. 9, 793–803.
- [6] R. Battiti, A. A. Bertossi, and M. A. Bonuccelli, *Assigning codes in wireless networks: bounds and scaling properties*, Wireless Networks **5** (1999), no. 3, 195–209.
- [7] O. Beaumont, V. Boudet, F. Rastello, and Y. Robert, *Matrix-matrix multiplication on heterogeneous platforms*, Proceedings of the 2000 International Conference on Parallel Processing, ICPP 2000, Toronto, Canada, August 21-24, 2000, 2000, pp. 289–298.
- [8] R. Beigel and D. Eppstein, *3coloring in time $o(1.3289n)$* , J. Algorithms **54** (2005), no. 2, 168–204.
- [9] A. Björklund, T. Husfeldt, P. Kaski, and M. Koivisto, *Trimmed moebius inversion and graphs of bounded degree*, Theory Comput. Syst. **47** (2010), no. 3, 637–654.
- [10] A. Björklund, T. Husfeldt, and M. Koivisto, *Set partitioning via inclusion-exclusion*, SIAM J. Comput. **39** (2009), no. 2, 546–563.
- [11] H. L. Bodlaender, *On the complexity of some coloring games*, International Journal of Foundations of Computer Science **02** (1991), no. 02, 133–147.

- [12] H. L. Bodlaender and D. Kratsch, *An exact algorithm for graph coloring with polynomial memory*, Technical Report UU-CS-2006-015, Department of Information and Computing Sciences, Utrecht University, 2006.
- [13] P. Bonsma and L. Cereceda, *Finding paths between graph colourings: Pspace-completeness and superpolynomial distances*, Mathematical Foundations of Computer Science 2007 (Berlin, Heidelberg) (Luděk Kučera and Antonín Kučera, eds.), Springer Berlin Heidelberg, 2007, pp. 738–749.
- [14] A. Borodin and R. El-Yaniv, *Online computation and competitive analysis*, Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1998.
- [15] H. Breu and D. G. Kirkpatrick, *Unit disk graph recognition is NP-hard*, Computational Geometry **9** (1998), no. 1, 3 – 24.
- [16] V. E. Brimkov, K. Junosza-Szaniawski, S. Kafer, J. Kratochvíl, M. Pergel, P. Rzażewski, M. Szczepankiewicz, and J. Terhaar, *Homothetic polygons and beyond: Maximal cliques in intersection graphs*, Discrete Applied Mathematics **247** (2018), 263–277.
- [17] J. M. Byskov, *Enumerating maximal independent sets with applications to graph colouring*, Oper. Res. Lett. **32** (2004), no. 6, 547–556.
- [18] T. Calamoneri, *The L(h, k)-labelling problem: A survey and annotated bibliography*, Comput. J. **49** (2006), no. 5, 585–608.
- [19] T. Calamoneri, *The L(h, k)-labelling problem: An updated survey and annotated bibliography*, Comput. J. **54** (2011), no. 8, 1344–1371.
- [20] A. Capponi and C. Pilloto, *On-line coloring and on-line partitioning of graphs*, 2003.
- [21] L. Cereceda, J. van den Heuvel, and M. Johnson, *Finding paths between 3-colorings*, Journal of Graph Theory **67** (2011), no. 1, 69–82.
- [22] G. J. Chang and D. Kuo, *The $l(2, 1)$ -labeling problem on graphs*, SIAM J. Discrete Math. **9** (1996), no. 2, 309–316.
- [23] N. Christofides, *Graph theory: An algorithmic approach (computer science and applied mathematics)*, Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA, 1975.
- [24] B. N. Clark, C. J. Colbourn, and D. S. Johnson, *Unit disk graphs*, Discrete Mathematics **86** (1990), no. 1-3, 165–177.
- [25] ———, *Unit disk graphs*, Discrete Mathematics **86** (1990), no. 1, 165 – 177.
- [26] D. W. Cranston and L. Rabern, *The fractional chromatic number of the plane*, Combinatorica **37** (2017), no. 5, 837–861.
- [27] J. D. Currie and R. B. Eggleton, *Chromatic properties of the euclidean plane.*, preprint.
- [28] M. Cygan and Ł. Kowalik, *Channel assignment via fast zeta transform*, Information Processing Letters **111** (2011), no. 15, 727 – 730.

- [29] D. P. Dailey, *Uniqueness of colorability and colorability of planar 4-regular graphs are np-complete*, *Discrete Mathematics* **30** (1980), no. 3, 289 – 293.
- [30] A. D. N. J. de Grey, *The chromatic number of the plane is at least 5*, arXiv e-prints (2018), arXiv:1804.02385.
- [31] M. DeVos, J. Ebrahimi, M. Ghebleh, L. Goddyn, B. Mohar, and R. Naserasr, *Circular coloring the plane*, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **21** (2007), no. 2, 461–465.
- [32] N. Dunfield, N. Brown, and G. Perry, *Colorings of the plane iii.*, *Geombinatorics* **III** (1994), 110–114.
- [33] N. Dunfield, N. Brown and G. Perry, *Colorings of the plane i.*, *Geombinatorics* **III** (1993), 24–31.
- [34] ———, *Colorings of the plane ii.*, *Geombinatorics* **III** (1994), 64–74.
- [35] D. Eppstein, *Improved algorithms for 3-coloring, 3-edge-coloring, and constraint satisfaction*, *Proceedings of the Twelfth Annual Symposium on Discrete Algorithms*, January 7-9, 2001, Washington, DC, USA., 2001, pp. 329–337.
- [36] ———, *Small maximal independent sets and faster exact graph coloring*, *J. Graph Algorithms Appl.* **7** (2003), no. 2, 131–140.
- [37] G. Exoo, *epsilon-unit distance graphs*, *Discrete & Computational Geometry* **33** (2005), no. 1, 117–123.
- [38] U. Faigle, W. Kern, H. Kierstead, and W.T. Trotter, *On the game chromatic number of some classes of graphs*, *Ars combinatoria* **35** (1993), 143–150 (Undefined).
- [39] J. Fiala, A. V. Fishkin, and F. V. Fomin, *On distance constrained labeling of disk graphs*, *Theor. Comput. Sci.* **326** (2004), no. 1-3, 261–292.
- [40] J. Fiala, P. A. Golovach, and J. Kratochvíl, *Distance constrained labelings of graphs of bounded treewidth*, *Automata, Languages and Programming, 32nd International Colloquium, ICALP 2005, Lisbon, Portugal, July 11-15, 2005, Proceedings, 2005*, pp. 360–372.
- [41] J. Fiala, T. Kloks, and J. Kratochvíl, *Fixed-parameter complexity of lambda-labelings*, *Discrete Applied Mathematics* **113** (2001), no. 1, 59–72.
- [42] J. Fiala and J. Kratochvíl, *Locally constrained graph homomorphisms - structure, complexity, and applications*, *Computer Science Review* **2** (2008), no. 2, 97–111.
- [43] D. Fisher and D. Ullman, *The fractional chromatic number of the plane.*, *Geombinatorics* **2** (1992), no. 1, 8–12 (English).
- [44] F. V. Fomin, F. Grandoni, and D. Kratsch, *Measure and conquer: Domination - A case study*, *Automata, Languages and Programming, 32nd International Colloquium, ICALP 2005, Lisbon, Portugal, July 11-15, 2005, Proceedings, 2005*, pp. 191–203.
- [45] F. V. Fomin and D. Kratsch, *Exact exponential algorithms*, *Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series*, Springer, 2010.

- [46] A. Fügenschuh and M. Fügenschuh, *Integer linear programming models for topology optimization in sheet metal design*, Math. Meth. of OR **68** (2008), no. 2, 313–331.
- [47] A. Fügenschuh, K. Junosza-Szaniawski, T. Klug, S. Kwasiborski, and T. Schlechte, *Fastest, average and quantile schedule*, SOFSEM 2015: Theory and Practice of Computer Science - 41st International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science, Pec pod Sněžkou, Czech Republic, January 24-29, 2015. Proceedings, 2015, pp. 201–216.
- [48] A. Fügenschuh, K. Junosza-Szaniawski, and Z. Lonc, *Exact and approximation algorithms for a soft rectangle packing problem*, Optimization **63** (2014), no. 11, 1637–1663.
- [49] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and intractability; a guide to the theory of np-completeness*, W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1990.
- [50] V. Garnero, K. Junosza-Szaniawski, M. Liedloff, P. Montealegre, and P. Rzażewski, *Fixing improper colorings of graphs*, Theor. Comput. Sci. **711** (2018), 66–78.
- [51] S. Gaspers, D. Kratsch, and M. Liedloff, *On independent sets and bicliques in graphs*, Algorithmica **62** (2012), no. 3-4, 637–658.
- [52] S. Gaspers and E. J. Lee, *Faster graph coloring in polynomial space*, Computing and Combinatorics - 23rd International Conference, COCOON 2017, Hong Kong, China, August 3-5, 2017, Proceedings, 2017, pp. 371–383.
- [53] D. Gonçalves, *On the $L(p, 1)$ -labelling of graphs*, Discrete Mathematics **308** (2008), no. 8, 1405 – 1414.
- [54] A. Gräf, M. Stumpf, and G. Weißenfels, *On coloring unit disk graphs*, Algorithmica **20** (1998), no. 3, 277–293.
- [55] J. R. Griggs and R. K. Yeh, *Labelling graphs with a condition at distance 2*, SIAM J. Discrete Math. **5** (1992), no. 4, 586–595.
- [56] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver, *The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization*, Combinatorica **1** (1981), no. 2, 169–197 (English).
- [57] J. Grytczuk, K. Junosza-Szaniawski, J. Sokół, and K. Wesek, *Fractional and j -fold coloring of the plane*, Discrete & Computational Geometry **55** (2016), no. 3, 594–609.
- [58] D. J. Guan and X. Zhu, *Game chromatic number of outerplanar graphs*, Journal of Graph Theory **30** (1999), no. 1, 67–70.
- [59] D. R. Guichard, *Acyclic graph coloring and the complexity of the star chromatic number*, Journal of Graph Theory **17** (1993), no. 2, 129–134.
- [60] H. Hadwiger, *Ungelöste probleme.*, Elemente der Mathematik **16** (1961), 103–106.
- [61] W. K. Hale, *Frequency assignment: Theory and applications*, Proceedings of IEEE **68** (1980), 1497–1514.
- [62] M. M. Halldórsson, *A still better performance guarantee for approximate graph coloring*, Information Processing Letters **45** (1993), no. 1, 19 – 23.

- [63] T. Hasunuma, T. Ishii, H. Ono, and Y. Uno, *A linear time algorithm for $l(2, 1)$ -labeling of trees*, *Algorithmica* **66** (2013), no. 3, 654–681.
- [64] F. Havet, M. Klazar, D. Kratsch, M. Liedloff, and J. Kratochvíl, *Exact Algorithms for $L(2,1)$ -Labeling of Graphs*, *Algorithmica* **59** (2009), no. 2, 169–194.
- [65] F. Havet, B. Reed, and J. S. Sereni, *$L(2,1)$ -labelling of graphs*, Proceedings of the Nineteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (Philadelphia, PA, USA), SODA '08, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008, pp. 621–630.
- [66] R. Hochberg and P. O'Donnell, *A large independent set in the unit distance graph.*, *Geombinatorics* **2** (1993), no. 4, 83–84 (English).
- [67] A. J. Hoffman and R. R. Singleton, *On moore graphs with diameters 2 and 3*, pp. 377–384.
- [68] T. Ichiishi and A. Idzik, *Closed covers of compact convex polyhedra.*, *Int. J. Game Theory* **20** (1991), no. 2, 161–169 (English).
- [69] A. Idzik and K. Junosza-Szaniawski, *Combinatorial lemmas for nonoriented pseudomanifolds*, *Topological Methods in Nonlinear Analysis* **22** (2003), 387–398.
- [70] ———, *Combinatorial lemmas for polyhedrons*, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **25** (2005), no. 1-2, 95–102.
- [71] ———, *Combinatorial lemmas for polyhedrons I*, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **26** (2006), no. 3, 439–448.
- [72] ———, *Combinatorial lemmas for oriented complexes*, *Topological Methods in Nonlinear Analysis* **32** (2008), no. 2, 379–410.
- [73] L.L. Ivanov, *On the chromatic numbers of r_2 and r_3 with intervals of forbidden distances*, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **29** (2007), 159 – 162, European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications.
- [74] T. R. Jensen and B. Toft, *Graph coloring problems*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley & Sons Inc., New York, 1995, A Wiley-Interscience Publication. MR 1304254 (95h:05067)
- [75] K. Junosza-Szaniawski, *Upper bound on the circular chromatic number of the plane*, *Electr. J. Comb.* **25** (2018), no. 1, P1.53.
- [76] K. Junosza-Szaniawski, J. Kratochvíl, M. Liedloff, P. Rossmanith, and P. Rzażewski, *Fast exact algorithm for $l(2, 1)$ -labeling of graphs*, *Theor. Comput. Sci.* **505** (2013), 42–54.
- [77] K. Junosza-Szaniawski, J. Kratochvíl, M. Liedloff, P. Rossmanith, and P. Rzażewski, *Fast exact algorithm for $l(2,1)$ -labeling of graphs*, *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)* **6648 LNCS** (2011), 82–93.
- [78] K. Junosza-Szaniawski, J. Kratochvíl, M. Liedloff, and P. Rzażewski, *Determining the $l(2,1)$ -span in polynomial space*, *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)* **7551 LNCS** (2012), 126–137.

- [79] K. Junosza-Szaniawski, J. Kratochvíl, M. Liedloff, and P. Rzażewski, *Determining the $L(2, 1)l(2, 1)$ -span in polynomial space*, *Discrete Applied Mathematics* **161** (2013), no. 13-14, 2052–2061.
- [80] K. Junosza-Szaniawski, Z. Lonc, and M. Tuczynski, *Counting independent sets in claw-free graphs*, *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science - 37th International Workshop, WG 2011, Teplá Monastery, Czech Republic, June 21-24, 2011. Revised Papers, 2011*, pp. 227–237.
- [81] K. Junosza-Szaniawski and L. Rozej, *Game chromatic number of graphs with locally bounded number of cycles*, *Inf. Process. Lett.* **110** (2010), no. 17, 757–760.
- [82] K. Junosza-Szaniawski and P. Rzażewski, *On the complexity of exact algorithm for $l(2, 1)$ -labeling of graphs*, *Inf. Process. Lett.* **111** (2011), no. 14, 697–701.
- [83] ———, *On the number of 2-packings in a connected graph*, *Discrete Mathematics* **312** (2012), no. 23, 3444–3450.
- [84] K. Junosza-Szaniawski and P. Rzażewski, *An exact algorithm for the generalized list t -coloring problem*, *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* **16** (2014), no. 3, 77–94.
- [85] K. Junosza-Szaniawski, P. Rzażewski, J. Sokól, and K. Wesek, *Online coloring and $l(2, 1)$ -labeling of unit disk intersection graphs*, *SIAM J. Discrete Math.* **32** (2018), no. 2, 1335–1350.
- [86] K. Junosza-Szaniawski and P. Rzażewski, *On improved exact algorithms for $l(2, 1)$ -labeling of graphs*, *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)* **6460 LNCS** (2011), 34–37.
- [87] K. Junosza-Szaniawski and M. Tuczynski, *Counting maximal independent sets in subcubic graphs*, *SOFSEM 2012: Theory and Practice of Computer Science - 38th Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science, Špindlerův Mlýn, Czech Republic, January 21-27, 2012. Proceedings, 2012*, pp. 325–336.
- [88] R. Karp, *Reducibility among combinatorial problems*, *Complexity of Computer Computations* (R. Miller and J. Thatcher, eds.), Plenum Press, 1972, pp. 85–103.
- [89] M. Kaufmann, J. Kratochvíl, K. A. Lehmann, and A. R. Subramanian, *Max-tolerance graphs as intersection graphs: Cliques, cycles, and recognition*, *Proceedings of the Seventeenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithm (Philadelphia, PA, USA), SODA '06, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006*, pp. 832–841.
- [90] A.B. Kempe, *On the geographical problem of four colors*, *Amer. J. Math.* (1879), no. 2, 193–200.
- [91] H. Kierstead and Z. Tuza, *Game coloring numbers and treewidth*, manuscript.
- [92] H. A. Kierstead and W. T. Trotter, *An extremal problem in recursive combinatorics*, *Congr. Numer.* **33** (1981), 143–153.
- [93] S. J. Kim, A. V. Kostochka, and K. Nakprasit, *On the chromatic number of intersection graphs of convex sets in the plane*, *Electr. J. Comb.* **11** (2004), no. 1.
- [94] B. Knaster, K. Kuratowski, and S. Mazurkiewicz, *Ein beweis des fixpunktsatzes für n -dimensionale simplexe*, *Fundamenta Mathematicae* **14** (1929), no. 1, 132–137 (ger).

- [95] A. Kostochka, *Coloring intersection graphs of geometric figures with a given clique number*, *Contemp. Math.*, vol. 342, pp. 127–138, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004 (English (US)).
- [96] Ł. Kowalik and A. Socała, *Assigning Channels Via the Meet-in-the-Middle Approach*, *Algorithmica* **74** (2016), no. 4, 1435–1452.
- [97] D. Král, *An exact algorithm for the channel assignment problem*, *Discrete Applied Mathematics* **145** (2005), no. 2, 326–331.
- [98] D. Král and R. Škrekovski, *A theorem about the channel assignment problem*, *SIAM J. Discrete Math.* **16** (2003), no. 3, 426–437.
- [99] J. Kratochvíl and J. Matousek, *Intersection graphs of segments*, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **62** (1994), no. 2, 289 – 315.
- [100] J. Kratochvíl and A. Kuběna, *On intersection representations of co-planar graphs*, *Discrete Mathematics* **178** (1998), no. 1, 251 – 255.
- [101] M. Kubale, *Graph colorings*, *Contemporary mathematics v. 352*, American Mathematical Society, 2004.
- [102] E.L. Lawler, *A note on the complexity of the chromatic number problem*, *Information Processing Letters* **5** (1976), no. 3, 66 – 67.
- [103] R.M. R. Lewis, *A guide to graph colouring: Algorithms and applications*, 1st ed., Springer Publishing Company, Incorporated, 2015.
- [104] L. Lovász, *Matroids and sperner's lemma*, *European Journal of Combinatorics* **1** (1980), no. 1, 65 – 66.
- [105] E. Malesińska, *Graph theoretical models for frequency assignment problems*, Ph.D. thesis, Technische Universität Berlin, 1997.
- [106] E. Malesińska, S. Piskorz, and Gerhard Weißenfels, *On the chromatic number of disk graphs*, *Networks* **32** (1998), no. 1, 13–22.
- [107] C McDiarmid and B. Reed, *Channel assignment on graphs of bounded treewidth*, *Discrete Mathematics* **273** (2003), no. 1, 183 – 192, EuroComb'01.
- [108] T. McKee and F. McMorris, *Topics in intersection graph theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- [109] J. W. Moon and L. Moser, *On cliques in graphs*, *Israel Journal of Mathematics* **3** (1965), no. 1, 23–28.
- [110] W. Moser, L. Moser, *Solution for problem 10.*, *Can. Bull. Math.* **4** (1961), 187–189.
- [111] H. Nagamochi, *Packing soft rectangles*, *Int. J. Found. Comput. Sci.* **17** (2006), no. 5, 1165–1178.
- [112] H. Nagamochi and Y. Abe, *An approximation algorithm for dissecting a rectangle into rectangles with specified areas*, *Discrete Applied Mathematics* **155** (2007), no. 4, 523–537.

- [113] A. Pawlik, J. Kozik, T. Krawczyk, M. Lason, P. Micek, W. T. Trotter, and B. Walczak, *Triangle-free geometric intersection graphs with large chromatic number*, *Discrete & Computational Geometry* **50** (2013), no. 3, 714–726.
- [114] R. Peeters, *On coloring j -unit sphere graph*, Technical Report, Department of Economics, Tilburg University (1991).
- [115] N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour, and R. Thomas, *The four-colour theorem*, *J. Comb. Theory, Ser. B* **70** (1997), no. 1, 2–44.
- [116] B. E. Sagan, *A note on independent sets in trees*, *SIAM J. Discret. Math.* **1** (1988), no. 1, 105–108.
- [117] E. R. Scheinerman and D. H. Ullman, *Fractional Graph Theory A Rational Approach to the Theory of Graphs*, Notes (1997), 211.
- [118] E. R. Scheinerman and D. H. Ullman, *Fractional graph theory.*, Wiley: John Wiley & Sons, 208 (English).
- [119] T. Schlechte, R. Borndörfer, B. Erol, T. Graffagnino, and E. Swarat, *Micro–macro transformation of railway networks*, *Journal of Rail Transport Planning & Management* **1** (2011), no. 1, 38 – 48, Robust Modelling of Capacity, Delays and Rescheduling in Regional Networks.
- [120] H. Shachnai, G. Tamir, and T. Tamir, *A theory and algorithms for combinatorial reoptimization*, LATIN 2012: Theoretical Informatics (Berlin, Heidelberg) (David Fernández-Baca, ed.), Springer Berlin Heidelberg, 2012, pp. 618–630.
- [121] Z. Shao, R. K. Yeh, K. K. Poon, and W. C. Shiu, *The $L(2, 1)$ -labeling of $K_{1,n}$ -free graphs and its applications*, *Appl. Math. Lett.* **21** (2008), no. 11, 1188–1193.
- [122] L. S. Shapley, *On balanced games without side payments.*, *Mathematical Programming, Proc. advanced Seminar, Univ. Wisconsin, Madison 1972*, 261-290 (1973)., 1973.
- [123] E. Sidorowicz, *The game chromatic number and the game colouring number of cactuses*, *Inf. Process. Lett.* **102** (2007), no. 4, 147–151.
- [124] A Soifer, *The mathematical coloring book*, Springer, New York, 2008.
- [125] E. Sperner, *Neuer beweis für die invarianz der dimensionszahl und des gebietes*, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* **6** (1928), no. 1, 265–272.
- [126] S. Tsukiyama, M. Ide, H. Ariyoshi, and I. Shirakawa, *A new algorithm for generating all the maximal independent sets*, *SIAM Journal on Computing* **6** (1977), no. 3, 505–517.
- [127] L.G. Valiant, *The complexity of computing the permanent*, *Theoretical Computer Science* **8** (1979), no. 2, 189 – 201.
- [128] G. van der Laan, D. Talman, and Z. Yang, *Existence of balanced simplices on polytopes.*, *J. Comb. Theory, Ser. A* **96** (2001), no. 2, 288–302 (English).
- [129] A. Vince, *Star chromatic number*, *Journal of Graph Theory* **12** (1988), no. 4, 551–559.

- [130] Z. Walczak and J. Wojciechowski, *Transmission scheduling in packet radio networks using graph coloring algorithm*, Proceedings of the Second International Conference on Wireless and Mobile Communications (ICWMC'06), Bucharest, Romania, July 29-31, 2006, 2006, p. 46.
- [131] D.R. Woodall, *Distances realized by sets covering the plane*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **14** (1973), no. 2, 187 – 200.
- [132] R. K. Yeh, *A survey on labeling graphs with a condition at distance two*, Discrete Mathematics **306** (2006), no. 12, 1217–1231.
- [133] E. F. Y. Young, C. C. N. Chu, W. S. Luk, and Y. C. Wong, *Handling soft modules in general nonslicing floorplan using lagrangian relaxation*, IEEE Trans. on CAD of Integrated Circuits and Systems **20** (2001), no. 5, 687–692.
- [134] Y. Zhao, *The number of independent sets in a regular graph*, Combinatorics, Probability and Computing **19** (2010), no. 2, 315–320.
- [135] X. Zhu, *Circular chromatic number: a survey*, Discrete Mathematics **229** (2001), no. 1-3, 371–410.
- [136] ———, *Refined activation strategy for the marking game*, J. Comb. Theory, Ser. B **98** (2008), no. 1, 1–18.
- [137] D. Zuckerman, *Linear degree extractors and the inapproximability of max clique and chromatic number*, Theory of Computing **3** (2007), no. 6, 103–128.

