dr hab. Sławomir Plaskacz
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Toruń, 6 września 2019

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Oskara Górniewicza pt. Analityczne i topologiczne metody poszukiwania równowagi Nasha w grach niekooperacyjnych

Jednym z centralnych problemów teorii gier jest wyznaczanie równowagi Nasha. Część klasycznych wyników polega na udowodnieniu istnienia równowagi Nasha jako punktu stałego odwzorowania wielowartościowego przyporządkowującego każdemu profilowi strategi zbiór najlepszych odpowiedzi. Zbiór najlepszych odpowiedzi jest zazwyczaj zbiorem wypukłym. Wykorzystuje się zazwyczaj uogólnienia twierdzenia o punkcie stałym typu Kakutaniego, w których odwzorowania mają wypukłe wartości. W rozprawie ta metoda wyznaczania równowagi Nasha jest uogólniana na takie przypadki, w których odwzorowanie najlepszych odpowiedzi ma wartości typu R_δ, które nie muszą być wypukłe. W grach dynamicznych znana jest metoda wyznaczania (a nie tylko dowodu istnienia) równowag Nasha opierająca się na Zasadzie Programowania Dynamicznego. W grach o sumie niezerowej Zasada Programowania Dynamicznego prowadzi do układów równań, które w modelach z czasem ciągłym prowadzą do układów równań różniczkowych cząstkowych o bardzo złych własnościach. W modelach z czasem dyskretnym w niektórych bardzo szczególnych sytuacjach daje się efektywnie wyznaczyć funkcje wartości spełniające równania Bellmana i odpowiadające im profile strategii. Wyznaczenie funkcji wartości opiera się na przewidywaniu jej postaci i przypomina metodę nieoznaczonych współczynników stosowaną do rozwiązywania równań różniczkowych liniowych. W literaturze (zwłaszcza ekonomicznej) jest sporo prac, w których autorzy traktują otrzymane w ten sposób profile strategii jako równowagi Nasha. Równanie Bellmana jest jedynie warunkiem koniecznym i staje się warunkiem dostatecznym po dodaniu odpowiedniego warunku końcowego. Autor rozprawy posłużył się w rozważanych modelach warunkiem końcowym wprowadzonym przez Wiszniewską-Matyszkiel.

Praca składa się z dwóch całkowicie rozłącznych części. Pierwszą część stanowią rozdziały 2. i 3. Drugą część stanowią rozdziały 4. i 5. W części pierwszej autor dowodzi i stosuje kilka twierdzeń o istnieniu punktów stałych. Część wyników dotyczących istnienia punktów stałych była znana wcześniej, a wkładem autora było przedstawienia ich dowodów bez wykorzystania zaawansowanych metod topologii algebraicznej. W szczególności podany jest elementarny dowód faktu stanowiącego, że zwarte Absolutne Aproksymatywne Retrakty mają własność punktu stałego dla odwzorowań wielowartościowych górnie półciagłych o wartościach typu R_δ. Następnie rozważane są ε losowe punkty stałe odwzorowań

losowych. Odwzorowanie mierzalne $\eta : \Omega \to X$ jest ε losowym punktem stałym odwzorowania wielowartościowego $\varphi : \Omega \times X \multimap X$ jeżeli $dist(\eta(x), F(t,x)) < \varepsilon$ dla prawie wszystkich ω. Korzystając z Twierdzenia Aumanna o selektorze autor przenosi wyniki o istnieniu punktów stałych na wyniki o istnieniu ε losowych punktów stałych. Następnie dla rodzin gier w postaci normalnej parametryzowanych zbiorem Ω dowodzi istnienia losowej równowagii Nasha. Aby móc zastosować twierdzenie o istnieniu punktów stałych dla odwzorowań wielowartościowych z wartościami typu R_δ wprowadza się pojęcie gry dozwolonej, czyli takiej, dla której zbiory najlepszych odpowiedzi mają wartości typu R_δ.
W drugiej części pracy autor wyznacza równowagii Nasha dla gry dynamicznej z czasem dyskretnym, nieskończonym horyzontem modelującej problem wspólnej eksploatacji zasobów. Zasobem są dwa gatunki ryb. Każdy z graczy łowi tylko jeden gatunek, ale między gatunkami występują interakcje typu: symbioza, konkurencja lub drapieżnik-ofiara. Rozważany model wywodzi się z prac Fischera-Mirmana i pod tą nazwą występuje w pracy. Podstawowym narzędziem do wyznaczania strategii równowagi jest zasada programowania dynamicznego w postaci równania Bellmana dla problemu sterowania optymalnego. W zagadnieniach ze skończonym horyzontem równanie Bellmana w połaczeniu z warunkiem końcowym wyrażonym za pomocą kosztu końcowego pozwala wyznaczyć jednoznacznie funkcje wartości i pośrednio - optymalne sterowanie. W zagadnieniach z nieskończonym horyzontem warunek końcowy zazwyczaj stosowany wersji klasycznej, która mówi, że granica zdyskontowanej funkcji wartości wzdłuż trajektorii jest równa zero. W rozważanym modelu Fischera-Mirmana nie udaje się zastosować wersji klasycznej warunku końcowego. Wielu autorów przy wyznaczaniu równowagi posiłkowało się tylko równaniem Bellmana. Zatem ich wyniki miały niekompletne dowody. Autor sięgnął do warunku końcowego wprowadzonego dla szerokiej klasy problemów sterowania optymalnego przez Wiszniewską-Matyszkiel. Dla modelu Fischera-Mirmana przeprowadził kompletny dowód, że wyznaczony za pomocą równania Bellmana profil strategii jest równowagą Nasha. Wynik ten udało się uzyskać w przypadku, gdy rozważane gatunki żyją w symbiozie. Aby otrzymać analogiczny wynik w pozostałych przypadkach dokonał na dwa sposoby modyfikacji modelu. Pierwsza modyfikacja nazywana przez autora naiwną polega na przyjęcia ograniczenia w zbiorze strategii - gracz nie może wyłowić w danym etapie więcej niż $(1-\varepsilon)100\%$ populacji ryb. W tym modelu otrzymany wynik przenosi się na wszystkie przypadki interakcji między gatunkami. Druga modyfikacja polega na zmianie dynamiki układu poprzez wprowadzenie stanów minimalnych. Zakłada się, że jeżeli populacji spadnie poniżej stanu minimalnego, to populacja w kilku etapach ginie. Autor nazywa to efektem Allee. Wyznaczenie równowagi w tak zmodyfikowanym modelu wymaga dodatkowych technicznych założeń oraz znacznie bardziej złożonych dowodów.

W rozdziale 1 autor dokonuje przeglądu pojęć i wyników z obszaru teorii retraktów, odwzorowań wielowartościowych i teorii gier, które stosuje w dalszej części pracy. Poza klasycznymi wynikami jak twierdzenie Schaudera o punkcie stałym oraz twierdzenie Aumanna o selektorze mierzalnym, w podrozdziale 1.7 jako Twierdzenie 1.7.2 sformułowana jest pewna wersja zasady programowania dynamicznego w zagadnieniach sterowania z nieskończonym horyzontem i dyskretnym czasem pochodząca od Wiszniewskiej-Matyszkiel. W podrozdziale 1.5 pojawiają się gry uogólnione z ograniczeniami. Są to gry w postaci normalnej, w których funkcje wypłaty są zastąpione relacjami preferencji każdego z graczy określonymi na zbiorze profili strategii i dodatkowo zadane są ograniczenia za pomocą odwzorowań wielowartościowych. Gry z ograniczeniami są w późniejszych rozdziałach podstawowym kierunkiem uogólniania wyników o istnieniu równowagii Nasha. Przytoczone są dwa przykłady sytuacji, w których autor widzi możliwość zastosowania modelu gier z ograniczeniami. Jednym z nich są sytuacje takie jak w problemie podziału tortu. Druga sytuacja jest opisana w Uwadze 1.5.4. Szkoda, że Uwaga 1.5.4 nie została poparta konkretnym przykładem, który byłby silną motywacją do zajmowania się grami z ograniczeniami. W rozprawie nie znalazłem informacji bibliograficznych dotyczących gier z ograniczeniami w rozumieniu Definicji 1.5.1.

Celem autora w rozdziale 2 było zaprezentowanie wyników z teorii punktów stałych wraz z możliwie elementarnymi dowodami, które w szczególności nie wymagają stosowania metod topologii algebraicznej. W podrozdziale 2.2 przeprowadzony jest elementarny dowód Twierdzenia 2.2.6 o istnieniu punktu stałego odwzorowań ciągłych przestrzeni będących Absolutnym Aproksymatywnym Retraktem (AAR). Krótki i elementarny dowód opiera się na twierdzeniu Brouwera, twierdzeniu Schaudera o aproksymacji skończenie wymiarowej odwzorowań zwartych oraz własnościach kostki Hilberta. W podrozdziale 2.3, Twierdzenie 2.2.6 jest uogólnione na przypadek odwzorowań wielowartościowych o wartościach typu R_δ. Wynik ten zawarty w Twierdzeniu 2.3.5 jest dowodzony analogicznie do Twierdzenia 2.2.6 z tą różnicą, że stosuje się twierdzenie o aproksymacji na wykresie dla odwzorowań usc o wartościach typu R_δ. W podrozdziale 2.4 przeprowadzony jest prosty dowód twierdzenia o istnieniu punktów stałych odwzorowań ciągłych przestrzeni metrycznych zwartych, które są absolutnymi multiretraktami. W ostatnim podrozdziale 2.5 udowodniono, że iloczyn kartezjański skończonej ilości przestrzeni będących Absolutnymi Aproksymacyjnymi Retraktami jest także przestrzenią tego typu. W dowodzie wykorzystywana jest własność aproksymatywnego przedłużania odwzorowań. Główny wynik z punktu widzenia zastosowań to Twierdzenie 2.3.5.

W rozdziale 3 rozważane są uogólnione gry w postaci normalnej z parametrem losowym, które można traktować jako rodziny gier w postaci normalnej zależne od parametru ω przebiegającego przestrzeń Ω z miarą zupełną. W największej ogólności model rozważanej gry jest zadany w podrozdziale 3.3. Zakłada się, że zbiory akcji graczy są Absolutnymi Aproksymatywnymi Retraktami. Zbiory ograniczające możliwe strategie gracza są zadane przez odwzorowanie wielowarto-

ściowe F_i zależne od parametru ω oraz profilu strategii x. Relacja preferencji jest zastąpiona odwzorowaniem lepszych odpowiedzi G_i. Gry w takiej ogólności są wykorzystywane jedynie jako pewien aparat do dowodów. Jednakże wyniki prezentowane w dalszych rozdziałach dotyczą gier, w których odwzorowania lepszych odpowiedzi G_i są zadane tradycyjnymi funkcjami wypłaty. W twierdzeniu 3.5.5 istnienie losowych równowag Nasha, to znaczy równowag Nasha, które w sposób mierzalny zależą od parametru ω uzyskano dla gier dozwolonych opisanych w Definicji 3.5.1. Gry dozwolone są zadane poprzez dozwolone funkcje wypłaty, to znaczy takie funkcje wypłaty dla których odwzorowanie najlepszych dopuszczalnych odpowiedzi jest odwzorowaniem o wartościach typu R_δ. W warunku (b) Definicji 3.5.1 zakłada się, że odwzorowanie to jest usc jako odwzorowanie kompleksu zmiennych (ω, x). Moim zdaniem wystarczyłaby górna półciągłość ze względu na zmienną x oraz mierzalność ze względu na kompleks zmiennych. Pojawia się naturalne pytanie o warunki dostateczne na to, aby funkcja wypłaty była dozwolona. Uogólnienie polegające na zastąpieniu założeń o wypukłości wartości odwzorowania w Twierdzeniu o istnieniu punktu stałego założeniem o wartościach typu R_δ jest z całą pewnością istotne. Szkoda, że autor nie podaje przykładów, w których dla istnienia równowagi Nasha konieczne byłoby zastosowanie takiego uogólnienia. W przykładach 3.5.7 i 3.5.8 odwzorowania najlepszych odpowiedzi są jednoelementowe. W dowodzie Twierdzenia 3.5.5 wykorzystuje się schemat stworzony w podrozdziale 3.1 do dowodu istnienia mierzalnej selekcji ε punktów stałych operatora losowego. W dowodzie Twierdzenia 3.5.5 sformułowanie „operator BD spełnia założenia Twierdzenia 2.3.5" jest dużym skrótem myślowym. Tym niemniej Twierdzenie 3.5.5 o istnieniu losowych równowag Nasha dla gier dozwolonych jest znaczącym uogólnieniem znanych wyników. W podrozdziale 3.6 rozważane są ε-losowe równowagi Nasha gier z parametrem losowym bez ograniczeń. Są to profile strategii, przy których żaden z graczy nie może poprawić swojej wypłaty o więcej niż ε unilateralnie zmieniając strategię. ε-losowa równowaga Nasha jest w pracy zdefiniowana jako punkt stały odwzorowania BD^ε. Podany jest przykład gry, która dla każdego $\varepsilon > 0$ posiada *varepsilon*-równowagę, a nie posiada równowagi Nasha. Przykład 3.6.2 razem z przykładem odwzorowania posiadającego ε-punkt stały dla każdego $\varepsilon >$ i nie posiadającego punktu stałego (Przykład 3.1.7) są elementarnym i przekonywującym argumentem do zajmowania się ε-równowagami. Twierdzenie 3.6.4 jest powieleniem Twierdzenia 3.5.5. Tym razem zakłada się, że odwzorowanie ε-najlepszych odpowiedzi jest operatorem losowym o wartościach typu R_δ. W Twierdzeniu 3.6.5 istnienie ε-losowej równowagi Nasha dostaje się z zakładając, że dla każdego $\delta > 0$ odwzorowanie BD^ε ma δ punkt stały.
Wyniki z rozdziału 3 mają charakter bardzo teoretyczny. Brakuje realnych przykładów gier , w których wyniki te można by zastosować. Odnoszę wrażenie, że autor trochę na siłę chciał zastosować prezentowane w rozdziale 2 twierdzenia o istnieniu punktów stałych w teorii gier. Odwzorowania wielowartościowe o war-

tościach R_δ pojawiają się w naturalny sposób przy rozważaniu równań różniczkowych. W szczególności zbiór rozwiązań równania różniczkowego zwyczajnego z zadanym warunkiem początkowym jest typu R_δ, co jest interesujące w szczególności, gdy problem nie ma jednoznacznego rozwiązania. Dlatego poszukiwałbym bym raczej zastosowania prezentowanych w rozdziale 2 wyników w obszarze gier różniczkowych.

W rozdziale 4. rozważany jest model Fischera-Mirmana, w którym zakłada się, że dwóch graczy eksploatuje zasoby składające się z dwóch gatunków ryb. Każdy z graczy poławia tylko jeden gatunek ryb. Jednakże ze względu na zakładany wzajemny wpływ wielkości populacji gatunków na siebie wyrażony biologiczną regułą wzrostu, wypłata każdego z graczy zależy od strategii połowów obu graczy. W zależności od znaku współczynników β_i, $i = 1, 2$ wyróżnione są trzy możliwe interakcje między gatunkami: symbioza, konkurencja, drapieżnik-ofiara. Zakłada się, że gracz podejmując decyzję o wielkości połowu w kolejnym etapie zna jedynie aktualny stan układu, czyli ilość ryb obu gatunków. Rozważane strategie są zatem strategiami typu sprzężenie zwrotne. Wypłaty bieżące graczy są postaci logarytmicznej. Rozważany model ma nieskończony horyzont czasowy. Wypłaty są dyskontowane i każdy z graczy ma własny współczynnik dyskontowania. W podrozdziale 4.2 podane są założenia przy których układ zbiega do stanu (1.1) przy założeniu zerowych połowów. Założenia w Twierdzeniu 4.2.1 nie są ponumerowane. Jeżeli wprowadzić oznaczenia
(a) $0 < |\beta_i| \leq \alpha_i < 1$ dla $i = 1, 2$,
(b) $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$,
(c) $\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 < 1$,
to założenie (c) jest konsekwencją założeń (a) i (b). Istotnie

$$(a) \Rightarrow |\beta_1\beta_2| \leq \alpha_1\alpha_2 \Rightarrow -\alpha_1\alpha_2 \leq -\beta_1\beta_2 \leq \alpha_1\alpha_2 \Rightarrow 0 \leq \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 \leq 2\alpha_1\alpha_2$$

oraz

$$(b) \Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2)^2 < 1 \Rightarrow 2\alpha_1\alpha_2 < 1.$$

Stąd

$$(a) + (b) \Rightarrow (c).$$

Tym niemniej, założenia obowiązujące w dalszej części rozdziału i wymienione jako Założenie 4.2.2 są niezależne i w istocie mocniejsze od założeń w Twierdzeniu 4.2.1. Główny wynik tego rozdziału jest zawarty w Twierdzeniach 4.3.3 oraz 4.3.6. Dla rozważanej gry wyznaczone są Twierdzeniu 4.3.3 strategie spełniające równanie Bellmana będace warunkiem koniecznym optymalności. Jest to możliwe dzięki przewidywaniu postaci funkcji wartości (4.12). Ta część wyniku jest częściowym powtórzeniem wyniku Fishera i Mirmana. Aby udowodnić, że otrzymany profil strategii jest równowagą Nasha autor odwołuje się do wyniku Wiszniewskiej-Matyszkiel (Twierdzenie 1.7.2), w którym są podane uogólnione warunki końcowe będące wraz równaniem Bellmana warunkiem dostatecznym optymalności sterowania. Przy dodatkowym założeniu o interakcji między gatunkami w rozważanej grze - symbiozie miedzy gatunkami poławianych ryb przeprowadzony jest dowód, że otrzymany profil strategii jest równowagą Nasha. Ponadto pokazano w Twierdzeniu 4.3.7, że w przypadku symbiozy wszystkie trajektorie odpowiadające profilowi strategii będącej wyznaczoną równowagą Nasha są zbieżne do konkretnie wskazanego punktu stacjonarnego. Autor ocenia, że przeniesienie w rozważanym modelu wyniku na pozostałe przypadki interakcji miedzy gatunkami jest bardzo trudne i dlatego w następnym rozdziale rozważa dwie modyfikacje modelu Fischera-Mirmana.

W rozdziale 6 rozważane są dwie modyfikacje modelu Fischera-Mirmana. Pierwszą z modyfikcji autor określa mianem „naiwna". Polega ona na tym, zbiór możliwych akcji każdego z graczy jest ograniczony do przedziału $[0, 1-\varepsilon)$. Oznacza to, że w żadnym z etapów gry gracz nie może wyłowić więcej jak $(1-\varepsilon)*100\%$ populacji danego gatunku. Przy tym założeniu w Twierdzeniu 5.1.1 dowodzi się, że otrzymane w poprzednim rozdziale strategie są równowagami Nasha. Dowodzi się, że warunek 2 z Twierdzenia 1.7.2 jest spełniony. Przyznam, że pomimo krytycznego stosunku autora, do tak zmodyfikowanego modelu, wynik ten podoba mi się. Także model wydaje się całkiem realistyczny. Wyłowienie 100% populacji danego gatunku jest moim zdaniem technicznie niemożliwe i ekonomicznie absurdalne, w obliczu założenia, że połowy są (i w przyszłości mają być) jedynym źródłem dochodu gracza.
Druga modyfikacja modelu Fischera-Mirmana polega na zmianie dynamiki układu w sposób odzwierciedlający efekt Allee, który polega na tym, że jeżeli liczebność populacji spada poniżej pewnego granicznego poziomu, to gatunek wymiera w skończonym czasie. Modyfikacja opiera się na wprowadzeniu dla każdego gatunku wartości progowych, poniżej których liczebność w skończonej liczbie kroków w sposób malejący spada do zera w skończonej ilości kroków. Spadek populacji danego gatunku oddziaływuje także na dynamikę drugiego gatunku. A mianowicie przyjmuje się w równaniach opisujących dynamikę drugiego gatunku, że liczebność ginącego gatunku jest na poziomie granicznym, a poziom połowów ginącego gatunku jest zerowy. W Twierdzeniu 5.2.4 autor dowodzi, że w tym modelu wszystkie trajektorie są ograniczone przez stałą zależną od warunku początkowego oraz stałych opisujących minimalny stan przeżywalności. W serii kilku twierdzeń opisane są profile równowagii Nasha dla tak zmodyfikowanego modelu Fischera-Milmana. Przy technicznych założeniach wyrażonych za pomocą stałych opisujących model dowodzi się , że strategie otrzymane w Twierdzeniu 4.3.3 pokrywają się z równowagami w modelu zmodyfikowanym w obszarze stanów układu powyżej poziomu przeżywalności. Wynik tego typu otrzymano w przypadku symbiozy miedzy gatunkami (Twierdzenia 5.2.7 i 5.2.9) oraz dla modelu drapieżnik-ofiara (Twierdzenie 5.2.8). W przypadku konkurencji między gatunkami wynik analogiczny do Twierdzenia 5.2.9 uzyskano przy dodatkowym założeniu (ii), które wydaje mi się trudne do zweryfikowania.

W mojej ocenie najbardziej interesujące są wyniki zaprezentowane w części drugiej pracy. Przeprowadzono kompletne dowody wyników, które funkcjonawały w literaturze z niepoprawnymi, bądź niekompletnymi dowodami. Staranne sprawdzenie warunków końcowych w wersji Wiszniewskiej-Matyszkiel pozwoliło autorowi wskazać przypadki, w których wyznaczony profil strategii w modelu Fischera-Mirmana jest faktycznie równowagą Nasha. Analiza modeli zmodyfikowanych w rozdziale 6 wymagała dużej pomysłowości i staranności. Sądzę, że autor nabrał pewnej intuicji analizując przykłady numerycznie, czego efekty są widocznie w postaci załączonych rysunków. Z wyników prezentowanych w części pierwszej pracy doceniam elementarne i eleganckie dowody Twierdzeń o istnieniu punktu stałego odwzorowań jedno- i wielowartościowych przestrzeni będących Absolutnymi Aproksymacyjnymi Retraktami. Natomiast zastosowanie prezentowanych w pracy twierdzeń o punkcie stałym w grach dozwolonych nie jest poparte żadnymi przykładami.

Praca zredagowana jest starannie, choć można wskazać kilku usterek (na przykład: w (5.13) słabe nierówności powinny być w drugą stronę, w drugim zdaniu Twierdzenia 5.2.7 brakuje słowa „Wówczas", na stronie 68 w czwartej linijce od góry powinno być $Z(t)$). Dowody także mogłyby być czasami poprowadzone w sposób bardziej przyjazny dla czytelnika zwłaszcza w ostatnim rozdziale. Walorem pracy są dołączone do ostatniego rozdziału ilustracje graficzne nieciągłych funkcji wartości oraz przykładowych trajektorii układu wykonane w programie Mathematica.

Reasumując, stwierdzam, że recenzowana praca spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim. W związku z tym wnoszę o dopuszczenie mgr Oskara Górniewicza do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Sławomir Plaskacz