prof. dr hab. Jerzy Motyl
Wydział Matematyki Informatyki i Ekonometrii
Uniwersytet Zielonogórski

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr Oskara Górniewicza p.t. "Analityczne i topologiczne metody poszukiwania równowagi Nasha w grach niekooperacyjnych"

Recenzowana rozprawa poświęcona jest badaniu istnienia i znajdowania równowagi Nasha dla pewnych klas gier losowych. W rozprawie badanych jest kilka problemów. W pierwszej części rozprawy, która ma charakter teoretyczny, udowodniono twierdzenia o istnieniu losowych punktów stałych dla odwzorowań wielowartościowych, które następnie wykorzystano do wykazania istnienia równowagi i przybliżonej równowagi Nasha w pewnych grach niekooperacyjnych. W drugiej części, aplikacyjnej, omówiono tzw. model wojen rybnych i jego modyfikacje. Udowodniono tam kilka twierdzeń dotyczących konkretnej postaci równowagi Nasha. Są to problemy z dziedziny modelowania matematycznego z nieskończonym horyzontem czasowym. Przy ich analizowaniu wykorzystano klasyczne twierdzenie o funkcji wartości dla problemu sterowania optymalnego (równanie Bellmana).

1. Szczegółowe omówienie zawartości merytorycznej rozprawy.

Rozprawa składa się ze wstępu, pięciu rozdziałów i bibliografii.

Rozdział 1 ma charakter wstępny. Zawiera on pojęcia z analizy funkcjonalnej i topologii dotyczące teorii retrakcji, odwzorowań wielowartościowych (multifunkcji) i teorii gier.

Rozdział 2 zawiera wyniki autora pochodzące z pracy [31]. Składają się na nie nowe, uproszczone dowody znanych twierdzeń o własności punktu stałego i wyniki będące uogólnieniami dotychczas znanych twierdzeń. Najważniejszymi wynikami tego rozdziału są Twierdzenia 2.2.6 i 2.3.5 mówiące, że przestrzeń, która jest Absolutnym Aproksymatywnym Retraktem ma własność punktu stałego i własność multiplikatywnego punktu stałego. Ich krótkie i zgrabne dowody przeprowadzono w oparciu o własności retrakcji i homeomorfizmów, a nie o teorię homologii jak w ich pierwotnej wersji. Do tej grupy należy też Twierdzenie 2.4.5 dotyczące Absolutnych Multi Retraktów. Na uwagę zasługuje Twierdzenie 2.5.5. pokazujące, że skończony produkt kartezjański Absolutnych Aproksymatywnych Retraktów jest też Absolutnym Aproksymatywnym Retraktem. Jest ono nowym i wartościowym wynikiem. Twierdzenia te zostały wykorzystane w Rozdziale 3 przy dowodzeniu istnienia równowagi Nasha.

W Rozdziale 3 wprowadzono pojęcie ϵ-punktów stałych i ϵ-losowych punktów stałych. Pokazane tu Twierdzenie 3.1.4 stanowi uogólnienie na przypadek wielowartościowych odwzorowań losowych wyniku J. Andresa i L. Górniewicza z pracy [3] dotyczącego istnienia mierzalnych "prawie wszędzie selekcji". Wynik ten został następnie wykorzystany do pokazania uogólnień twierdzeń o istnieniu ϵ-punktów stałych z prac [10] i [45] na przypadek zwartych losowych odwzorowań o wartościach typu R_δ. W paragrafach 3.3-3.5 autor bada gry z parametrem losowym modelowane przez odwzorowania wielowartościowe i pokazuje istnienie losowej równowagi Nasha, oraz ϵ-losowej równowagi Nasha przy założeniach, że odwzorowanie najlepszych dopuszczalnych odpowiedzi (odwzorowanie prawie najlepszej dopuszczalnej odpowiedzi, odpowiednio) jest górnie półciągłe o wartościach typu R_δ

(typu Carathéodory, odpowiednio) i ograniczeniach narzuconych na funkcję wypłaty (Twierdzenia 3.5.5 oraz 3.6.4, odpowiednio). Istotność przyjętych założeń jest zilustrowana przykładami.

Przeprowadzone dowody są poprawne, a otrzymane wyniki są ciekawe i stanowią wartościową część rozprawy.

Druga część rozprawy ma charakter aplikacyjny i oparta jest na wspólnej pracy autora i Promotora [33]. Rozpatrywany jest w niej model Fischera-Mirmana gry dynamicznej dotyczącej połowu dwóch gatunków na tym samym łowisku przez dwóch graczy, z których każdy zainteresowany jest połowem tylko jednego gatunku, a populacje obu gatunków są współzależne na zasadzie symbiozy, konkurencji lub modelu drapieżnik-ofiara. Horyzont czasowy modelu jest nieskończony, a poszukiwana jest jawna postać wzoru równowagi Nasha dla omawianej gry dynamicznej.

Rozdział 4 dotyczy klasycznego modelu Fischera-Mirmana. Jego celem jest przedstawienie pełnych dowodów tez zawartych w pracach [24] i [25]. Luka w dotychczasowych rozumowaniach polegała na braku sprawdzenia warunku końcowego, co jak zauważono w pracach [66] i [67] Pani Promotor, może prowadzić do błędnych wniosków. Autor pokazał rezultat o stabilności ekosystemu przy braku połowów (Twierdzenie 4.2.1), a następnie zajął się badaniem tezy Fischera-Mirmana mówiącej, że funkcja wartości dla zagadnienia optymalizacyjnego jest typu logarytmicznego o wszystkich współczynnikach dodatnich, co odpowiada współzależności gatunków na zasadzie symbiozy. Autor uzupełnia dowód faktu, że tak zdefiniowany profil strategii jest rzeczywiście równowagą Nasha tej gry. Uzupełnienie polega na wykazaniu odpowiedniego warunku końcowego (Twierdzenia 4.3.3, 4.3.6 i 4.3.7). Ich dowody oparte są na klasycznym twierdzeniu o funkcji wartości dla problemu sterowania optymalnego (Twierdzenie 1.7.2).

W Rozdziale 5 autor rozpatruje dwa uogólnienia problemu z Rozdziału 4. Pierwsze polega na wprowadzeniu ograniczenia przestrzeni strategii, które oznacza niemożność wyginięcia poławianych gatunków. Ponieważ to założenie jest mało realistyczne, autor nazywa je "naiwną modyfikacją". Pokazuje, że przy takim założeniu funkcje określone w Rozdziale 4 są rzeczywiście funkcjami wartości, a wprowadzony tam profil strategii jest profilem równowagi Nasha (Twierdzenie 5.1.1). Elementarny dowód polega sprawdzeniu warunku końcowego i wykorzystaniu Twierdzenia 1.7.2.
Drugie uogólnienie uwzględnia efekt Allee pochodzący z pracy [1] i polegający na wprowadzeniu minimalnego stanu populacji, poniżej którego następuje wyginięcie gatunków niezależnie od wielkości połowów. Ten model lepiej odzwierciedla rzeczywistość, jednak wprowadzenie takiego założenia prowadzi do badania nieciągłego układu dynamicznego z nieciągłą funkcją wartości. Autor pokazuje postać równowagi Nasha dla takiego modelu zarówno w przypadku drapieżnik-ofiara (Twierdzenie 5.2.8) jak i w przypadku symbiozy (Twierdzenie 5.2.9), oraz w przypadku konkurencji (Twierdzenie 5.2.13). Dowody tych wyników choć są dość długie opierają się na elementarnych metodach analizy matematycznej.
Na zakończenie tego rozdziału autor przedstawia symulacje graficzne przykładowych funkcji wartości dla wszystkich trzech badanych zagadnień bez połowów i równowagi Nasha z odłowami.

Cytowana literatura zawiera 79 pozycji i jest reprezentatywna dla omawianego tematu.

2. Uwagi dotyczące sposobu napisania rozprawy:

Rozprawa jest napisana w sposób czytelny, a dobrze przemyślane i przedstawione komentarze ułatwiają śledzenie głównych idei i myśli przewodniej prezentowanej pracy.
Wysoko oceniam wartość merytoryczną uzyskanych wyników, dotyczy to szczególnie części teoretycznej rozprawy (Rozdziały 3 i 4) i zawartych tam wyników dotyczących istnienia losowej równowagi Nasha i ϵ-losowej równowagi Nasha. Z kolei część aplikacyjna w zgrabny sposób uzupełnia braki formalne z dowodu modelu Fischera-Mirmana. Jest to istotne spostrzeżenie, gdyż często naukowcy zajmujący się badaniem problemów praktycznych, ważnych z punktu widzenia zastosowań, zapominają o zbadaniu faktu, czy proponowany model matematyczny jest adekwatny dla badanego problemu. Również drugi wariant modyfikacji uwzględniający efekt Allee i rozpatrywany w Rozdziale 5, uważam za interesujący i godny uwagi. Fakt, że dowody wyników zawartych w tych rozdziałach przeprowadzone są przy pomocy elementarnych metod analizy matematycznej w niczym nie umniejsza ich znaczenia aplikacyjnego.

W rozprawie zabrakło mi spisu treści, co utrudnia jej czytanie. Widać też małą staranność w redakcji pierwszych rozdziałów rozprawy. Mam tu na myśli Abstract (angielska wersja), Wstęp i Preliminaria. Jest tam za dużo błędów językowych i tzw "literówek". Wymienię tu jedynie kilka z nich:
str. $5_{12} - 5_{11}$, str. $7_{11} - 7_{10}$, str. $8_{18} - 8_{17}$, str $8_1 - 9^1$, str. 14_3, str. 17_{13}, str. 19^7, 19_{12}, 19_9.
Budzi to pewne zdziwienie recenzenta, tym bardziej, że pozostała część pracy jest już napisana bardzo starannie. A więc można.

Ostatnie uwagi nie obniżają ogólnej oceny rozprawy, choć warto, aby autor pamiętał o nich w trakcie przygotowywania swoich następnych publikacji.

3. Sugestie dla dalszych badań.

Modele badane w Rozdziałach 4 i 5 opierają się na dość elementarnej biologicznej regule zmian populacji bez ingerencji graczy (Definicje 4.1.2 i 4.1.6). Może warto by było w przyszłości zainteresować się różnicami pomiędzy deterministycznym, a stochastycznym modelem procesu Furry'ego-Yule'a, czy procesu urodzin-śmierci. Modele stochastyczne jednak zdecydowanie lepiej odzwierciedlają rzeczywistość, a od równań losowych do stochastycznych już nie jest daleko.

4. Konkluzja: Rozprawa doktorska pana mgra Oskara Górniewicza zawiera ciekawe wyniki, ich dowody są merytorycznie poprawne, a badana tematyka dobrze wpisuje się w nurt współczesnych zagadnień matematycznych z teorii punktów stałych multifunkcji i teorii gier. Stanowi ona oryginalne rozwiązanie problemu naukowego i wykazuje wiedzę teoretyczną i praktyczną kandydata w wymienionaj wyżej dyscyplinie naukowej. Kandydat posiada umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej.

Uważam więc, że przedstawiona rozprawa doktorska spełnia wymogi stawiane przez Ustawę o Stopniach Naukowych i Tytule Naukowym i wnioskuję o dopuszczenie pana mgra Oskara Górniewicza do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Równocześnie wnioskuję o uznanie przedstawionej rozprawy za wyróżniającą.

Jerzy Motyl

JMotyl