Recenzja rozprawy doktorskiej
Pani mgr Urszuli Pastwy
pt. *Uogólnienia problemu unikania repetycji w słowach*

Przedmiotem rozprawy doktorskiej mgr Urszuli Pastwy są repetycje w *słowach*, czyli ciągach zbudowanych nad danym skończonym alfabetem A. Przez r-*repetycję* rozumiemy tu pewien skończony podciąg złożony z r kolejnych identycznych bloków. Przypuśćmy, iż dla ustalonego $r \geqslant 2$ chcemy stworzyć nieskończony ciąg bez jakiejkolwiek r-repetycji realizowanej przez jego podciąg. Przy użyciu skończonej liczby symboli nie da się tego dokonać, chyba że przykładowo ograniczymy maksymalną różnicę między indeksami następujących po sobie elementów analizowanych podciągów, gdzie ominięcie pewnej liczby kolejnych wyrazów oryginalnego ciągu nazywamy *przeskokiem*. Już w roku 1906 A. Thue podał konstrukcję nieskończonego słowa w nad alfabetem 3-literowym, które unika wszystkich repetycji realizowanych przez jego *podsłowa*, tj. skończone podciągi złożone z kolejnych elementów słowa w. Różne uogólnienia tego zagadnienia są szeroko badane od końcówki XX wieku. Zasadniczą tematyką rozprawy są rozważania nad potencjalną liczbą symboli umożliwiających uniknięcie repetycji z przeskokami o ograniczonej długości w słowach, a także w pewnych bogatszych strukturach, jak np. pokolorowana przestrzeń $\mathbb{R}^n$, gdzie każdemu punktowi z $\mathbb{R}^n$ jest przyporządkowany jeden z dostępnych symboli alfabetu – kolor, co możemy też utożsamić z podziałem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ na adekwatne podzbiory.

Oprócz wstępnego rozdziału 1, rozprawa zawiera cztery rozdziały z oryginalnymi wynikami. Wprowadzają one czytelny podział odpowiadający naturalnym kierunkom badawczym uogólniającym podjętą tematykę bazową oraz siebie nawzajem. Zaprezentowane w nich wyniki oparte są na dwóch pracach współautorskich oraz istotnym wkładzie własnym autorki w postaci szeregu dotąd nieopublikowanych rezultatów.

Rozdział 2 poświęcony jest analizie istnienia nieskończonych ciągów (słów) nad skończonym alfabetem s-literowym, które unikają r-repetycji realizowanych przez podciągi z regularnymi k-przeskokami, tzn. podciągi, których indeksy tworzą ciągi arytmetyczne o różnicy d nieprzekraczającej k. Okazuje się, że dla dowolnie ustalonych $k \geqslant 1$ i $r \geqslant 2$ takie ciągi zawsze istnieją. Najmniejszą niezbędną do ich zbudowania moc alfabetu (s) oznaczamy przez $\pi_k(r)$. Wkład autorki otwiera przypadek $r = 2$, analizowany już uprzednio w kilku pracach renomowanych naukowców. Pierwszym wynikiem rozdziału 2 jest twierdzenie 2.2.3 implikujące ograniczenie górne $\pi_k(2) \leqslant k + 11$. Jego dowód opiera się na klasycznym w tej dziedzinie wykorzystaniu morfizmów, tj. pewnego typu podstawień, zastosowanym do oryginalnego ciągu Thuego. Jest on jednak ciekawy oraz pomysłowy, i co bardzo istotne ograniczenie z twierdzenia 2.2.3 jest niemal optymalne (lub optymalne) – różni się jedynie o stałą od postulowanego w hipotezie Grytczuka, Kozika i Witkowskiego potencjalnego optimum. Wszystkie uprzednio znane ograniczenia były rzędowo gorsze. Dziwi fakt, że tak istotny w tej tematyce rezultat nie został opublikowany. W przedstawionej formie dowód tego twierdzenia zawiera pewne usterki redakcyjne (które bardzo łatwo można wyeliminować).

Dla przypadku $r \geqslant 3$, który nie był uprzednio szerzej rozważany w literaturze, zaprezentowane są dwa ograniczenia górne. Pierwsze z nich jest rezultatem zastosowania analogicznego podejścia jak w dowodzie twierdzenia 2.2.3, wykorzystującego morfizmy. Pozwoliło ono na udowodnienie, iż $\pi_k(r) \leqslant \max\{7, \lceil \frac{k}{r-1} \rceil\}$, tj. twierdzenia 2.3.1. W kolejnej części rozdziału 2 autorka wykorzystuje z kolei podejście probabilistyczne, w szczególności ważony wariant lokalnego lematu Lovásza. W rezultacie dowodzi, iż $\pi_k(r) \leqslant s$ dla wszystkich s, dla których $k \leqslant \frac{(s^{r-1}-2)^2}{4r^2 s^{r-1}}$ (oraz $s^{r-1} \geqslant 4$). Jest to lepsze ograniczenie (niż to z twierdzenia 2.3.1) dla większych wartości r i k. Inną zaletą tego rezultatu jest fakt, iż implikuje on, że dla każdego $k \geqslant 2$ istnieje nieskończony ciąg unikający r-repetycji z regularnymi k-przeskokami przy użyciu dowolnie krótkiego alfabetu (o przynajmniej dwóch literach), pod warunkiem, że r jest dostatecznie duże. Szczegółowa analiza i porównanie obu wyników zaprezentowane jest pod koniec podrozdziału 2.4.

Kolejny podrozdział porusza tematykę dolnego ograniczenia na $\pi_k(r)$ oraz związku tego zagadnienia z liczbami van der Waerdena. Niestety druga część tej analizy zawiera kilka nieścisłości, które wymagają poprawek i wyjaśnienia. Ograniczenie to jest w każdym razie rzędowo znacznie gorsze niż podane ograniczenia górne.

W ostatniej części rozdziału 2 zaprezentowane zostało zastosowanie twierdzenia 2.2.3 w problemie kolorowania punktów kratowych $\mathbb{Z}^d$ unikającego repetycji na pewnych prostych – uzyskany w ten sposób rezultat jest niemal optymalny.

Rozdział 3 poświęcony jest przypadkowi unikania repetycji realizowanych przez podciągi danego ciągu z k-przeskokami, tzn. takie podciągi, których kolejne elementy odpowiadają wyrazom oryginalnego ciągu o indeksach różniących się o nie więcej niż k. Najmniejsze s, o ile istnieje, dla którego można skonstruować nieskończony ciąg nad alfabetem s-literowym unikający r-repetycji z k-przeskokami oznaczamy przez $\pi'_k(r)$. Autorka wyznacza najpierw wartość tego parametru dla $k = 2$ i dla prawie wszystkich wartości r (poza $r = 5$). Jest to konsekwencja kilku lematów z jej wspólnej publikacji z M. Dębskim i K. Węskiem (oraz jednego zacytowanego wyniku z innej pracy). Kluczowe pośród nich oparte są o zastosowania klasycznych morfizmów, podobnie jak wszystkie pozostałe ograniczenia górne zaprezentowane

J.

w tym rozdziale, jak np. $\pi'_k(2) \leqslant 3k$, czy $\pi'_k(r) \leqslant 2\lceil \frac{k}{r-1} \rceil + 1$ dla $r \geqslant 3$. Ostatnie dwie nierówności uzyskane zostały wspólnie z M. Dębskim, B. Nayar, J. Sokół i K. Węskiem, wraz z uzasadnieniem ich rzędowej optymalności, wynikającej z przedstawionych ograniczeń dolnych: $\pi'_k(2) \geqslant 2k$ oraz $\pi'_k(r) > \frac{k}{r-1}$ dla $r \geqslant 3$. Autorka konkluduje rozdział samodzielnym rezultatem implikującym, iż dla każdej liczby naturalnej k istnieje (dostatecznie duże) r takie, że $\pi'_k(r) = 2$. Istotnym walorem tej części rozprawy jest samo wykazanie określoności parametru $\pi'_k(r)$ dla wszystkich k i r.

Rozdział 4 dotyczy przypadku w pewnym sensie pośredniego, choć zdecydowanie bliżej rozważań dotyczących podciągów arytmetycznych, gdzie unikamy repetycji na podciągach z quasiregularnymi k-przeskokami, tj. przeskokami indukowanymi przez wybraną liczbę rzeczywistą $d \in [1, k]$ (w rezultacie, w wyniku zaokrąglania w dół, dany podciąg ma co najwyżej dwie długości przeskoków). Choć na pierwszy rzut oka ten problem wydaje się mniej naturalny, ma mocną motywację osadzoną w zastosowaniach o charakterze geometrycznym – do unikania repetycji w nieskończonych grafach jednostkowych poprzez kolorowania (podziały) przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Odpowiedni parametr jest tu oznaczany przez $\pi^*_k(r)$ i jest to najmniejsza liczba symboli niezbędna do skonstruowania nieskończonego słowa unikającego r-repetycji realizowanych przez podciągi z quasiregularnymi k-przeskokami.

Najpierw w podrozdziale 4.2 autorka prezentuje oryginalne ograniczenie: $\pi^*_k(r) \leqslant \max\{13, \lceil \frac{k}{r-1} \rceil\}$ dla $r \geqslant 3$, oparte, podobnie jak pierwsze wyniki rozprawy, o zastosowanie odpowiednich podstawień w miejsce symboli (tj. morfizmu) ciągu Thuego. Argument zawiera jednak pewne drobne usterki – wydaje się w szczególności, iż po ich usunięciu, otrzymuje się rezultat odrobinę słabszy, tj. $\pi^*_k(r) \leqslant \max\{14, \lceil \frac{k}{r-1} \rceil\}$.

W kolejnym podrozdziale autorka prezentuje ograniczenie górne na $\pi^*_k(r)$ lepsze od powyższego w przypadku większych wartości k i r. Wynik ten jest efektem wykorzystania metody probabilistycznej. Implikuje on między innymi, iż dla dowolnych $s \geqslant 2$ i $k > 1$, mamy $\pi^*_k(r) \leqslant s$ dla dostatecznie dużych wartości r. W szczególności nawet dwa symbole wystarczają by uniknąć r-repetycji z quasiregularnymi k-przeskokami dla dowolnego $k > 1$, pod warunkiem, że naszym celem jest ustrzeżenie się jedynie przed repetycjami z odpowiednio dużą liczbą jednakowych bloków. W tym fragmencie, poza kilkoma uwagami, brakuje nieco pełniejszej dyskusji oraz porównania rzędów znanych górnych i dolnych ograniczeń na wartość parametru $\pi^*_k(r)$.

Ostatnia część rozdziału 4 poświęcona jest zagadnieniu kolorowania przestrzeni $\mathbb{R}^n$ w taki sposób, by uniknąć r-repetycji na wszystkich ciągach złożonych ze współliniowych punktów wśród których każde dwa kolejne są w odległości 1 od siebie – można taki ciąg interpretować jako ścieżkę w nieskończonym grafie jednostkowym przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (gdzie dowolne dwa punkty w odległości 1 połączone są krawędzią) – nazywane są one w rozprawie *ścieżkami prostoliniowymi*. Autorka omawia najpierw w tym kontekście bardzo naturalną, jak się okazuje, ideę wykorzystania ciągów unikających r-repetycji z quasiregularnymi przeskokami do generowania takich kolorowań przestrzeni $\mathbb{R}^n$, po czym prezentuje koncepcję zastosowania w badaniach nad tym zagadnieniem podejścia probabilistycznego, opartego o lokalny lemat Lovásza, dopełnionego finałowym akcentem w postaci lematu Königa. Przeanalizowany jest następnie zgodnie z tą metodologią osobno przypadek kolorowań płaszczyzny oraz kolorowań przestrzeni wyższego wymiaru. Z uzyskanych ograniczeń na liczbę niezbędnych w obu przypadkach kolorów wynika m.in., że istnieje kolorowanie płaszczyzny za pomocą 2 kolorów unikające 43-repetycji na scieżkach prostoliniowych, oraz za pomocą 3 kolorów – unikające 24-repetycji na takich scieżkach. Ponadto, dla każdego n istnieje (dostatecznie duże) r, dla którego można skonstruować kolorowanie przestrzeni $\mathbb{R}^n$ za pomocą 2 kolorów, które unika r-repetycji na wszystkich ścieżkach prostoliniowych. Rezultaty te pochodzą z pracy wspólnej autorki z M. Dębskim, J. Grytczukiem, B. Nayar, J. Sokół, M. Tuczyńskim, P. Wenusem i K. Węskiem.

Ostatni rozdział pracy dotyczy pojęcia ogólniejszego niż r-repetycje, tzw. wzorców, gdzie przez *wzorzec* p rozumiemy pewne skończone słowo (ciąg) nad danym alfabetem B, a naszym celem jest zbudowanie nieskończenie długiego słowa nad alfabetem A, które unika owego wzorca na pewnych podciągach w, co oznacza, że nie istnieje (podstawienie) morfizm $f : B^* \to A^*$ taki, że $f(p) = w$. Jest to problematyka, która jest w swojej bazowej wersji (tj. gdy skupiamy się jedynie na podciągach spójnych) dosyć dobrze przebadana, ale wciąż obfita w złożone problemy otwarte. Przedmiotem pierwszej części rozdziału jest indeks unikalności wzorca p z k-przeskokami, $\pi'_k(p)$, do badań nad którym zaadoptowana została metoda zwana *kompresją entropii*, rozwijana w ostatnich latach w powiązaniu z rozważaniami nad konstrukcyjną wersją lokalnego lematu Lovásza. Ze względu na swoją specyfikę kompresja entropii wydaje się być odpowiednim i naturalnym narzędziem do analizy wzorców bezjednostkowych p, tj. takich, w których każda zmienna powtarza się przynajmniej dwukrotnie. Dla takich p przedstawione zostało ograniczenie górne $\pi'_k(p) \leqslant 2^{2k+1}k^2 + 1$. Nieco lepszy wynik został następnie zaprezentowany w przypadku, gdy wzorzec p jest dostatecznie długi względem liczby zmiennych w p – ograniczenie to jest jednak ciągle wykładnicze ze względu na k. Ostatni wynik bazujący na wykorzystaniu kompresji entropii, tj. twierdzenie 5.5.4, zapewnia w końcu ogranicznie górne rzędu k na badany parametr w przypadku dostatecznie długich wzorców nad alfabetem 2-elementowym ($|B| = 2$). Wyniki te są uogólnieniem rezultatów uzyskanych wcześniej dla $k = 2$ z M. Dębskim i K. Węskiem, redagując które autorka nie ustrzegła się jednak pewnych nieścisłości i usterek (np. w dowodzie faktu 5.3.2, czy lematu 5.5.1).

Dalsze wzmocnienie powyższych wyników zawarte jest w podrozdziale 5.6 w mniej restrykcyjnym przypadku, gdy unikamy wzorców jedynie na podciągach z quasiregularnymi przeskokami. Twierdzenie 5.6.2 implikuje bowiem, iż dla dowolnego k już przy użyciu jedynie 2 symboli można skonstruować nieskończony ciąg unikający danego wzorca p z quasiregularnymi k-przeskokami, pod warunkiem, że wzorzec p jest dostatecznie długi w stosunku do k i liczby jego zmiennych ($|B|$). Probabilistyczny dowód tego faktu bazuje na lokalnym lemacie Lovásza. Podobne podejście zastosowane zostało następnie w ostatnim podrozdziale, by wykazać, iż jeżeli tylko dany wzorzec p jest dostatecznie długi w porównaniu do liczby jego zmiennych, wówczas można go uniknąć na ścieżkach prostoliniowych płaszczyzny przy użyciu jedynie dwóch kolorów – wynik ten został opublikowany we wspólnej pracy z M. Dębskim, J. Grytczukiem, B. Nayar, J. Sokół, M. Tuczyńskim, P. Wenusem i K. Węskiem. Oba dowody probabilistyczne z ostatnich dwóch podrozdziałów zawierają podobnego typu drobne błędy (które nietrudno skorygować).

Podsumowując, rozprawa doktorska mgr Urszuli Pastwy zawiera bardzo szerokie spektrum interesujących wyników. Mogę tu wyróżnić mi.in. twierdzenie 2.2.3, które znacznie poprawia szereg wcześniejszych rezultatów i zapewnia wynik bliski optymalnemu – po raz kolejny wyrażę zdziwienie, iż nie został on (jeszcze) przez autorkę opublikowany. Ciekawe jest też zastosowanie twierdzenia 2.2.3 w podrozdziale 2.6 w problemie nierepetytywnego parkietażu punktów kratowych $\mathbb{Z}^d$. Mocną stroną rozdziału 3 jest twierdzenie 3.2.1, determinujące dokładną wartość parametru $\pi'_k(r)$ dla $k = 2$ i prawie wszystkich r. Dla pozostałych k i r wyznaczony jest ponadto rząd wielkości tego parametru. Ciekawe i nieintuicyjne wyniki zawiera też rozdział 4, jak np. twierdzenia 4.3.2 i 4.4.6, redukujące liczbę symboli niezbędnych do uniknięcia r-repetycji w badanych podciągach, czy, odpowiednio, pokolorowanej (tymi symbolami) przestrzeni $\mathbb{R}^n$, do jedynie dwóch, pod warunkiem, że r jest dostatecznie duże. Na uwagę zasługuje ponadto wykorzystanie adekwatnej metody, tj. kompresji entropii, w badaniach z pierwszej części rozdziału 5, w którym jednak najciekawsze wydaje mi się twierdzenie 5.6.2, udowodnione w oparciu o podejście probabilistyczne z zastosowaniem lokalnego lematu Lovásza. Wygląda na to, iż ten rezultat także nie doczekał się opublikowania. Obok wspomnianych głównych wyników, emanujących różnorodnością technik dowodowych, moją uwagę zwróciły też kompaktowe i eleganckie uzasadnienia drobnych obserwacji, jak dowód twierdzenia 3.5.2, a w szczególności lematu 4.3.1.

Rozważania ujęte w rozprawie stanowią spójne i dogłębne studium podjętej tematyki. Są one dobrze osadzone i skorelowane z istniejącym stanem wiedzy oraz dostarczają kompletnej analizy tej ciekawej problematyki w wielu naturalnych i nieodchodzących zbyt daleko od meritum kierunkach, inspirując jednocześnie do dalszych przemyśleń – bardzo ciekawy w tym kontekście jest np. problem otwarty 5.5.5. Jednym słowem jest to materiał na bardzo dobrą rozprawę doktorską. W ocenianej przeze mnie formie pozostawia ona jednak wiele do życzenia w warstwie redakcyjnej. Po pierwszym zapoznaniu się z otrzymanym tekstem niejasną pozostawała dla mnie kwestia autorstwa i współautorstwa większości prezentowanych w nim rezultatów, a lista publikacji autorki, zamykająca się na jednej pracy z dwoma współautorami oraz artykule firmowanym przez osiem osób (oba opublikowane w renomowanych czasopismach z listy JCR) budziła pewne wątpliwości i niedosyt. Dopiero bardziej drobiazgowa analiza utwierdziła mnie w przekonaniu, iż obok wyników wspólnych, rozprawa zawiera szereg ciekawych i cennych rezultatów samodzielnych autorki. Otwartym pozostaje pytanie, czemu nie doczekały się one opublikowania. Największe zastrzeżenia mam jednak do licznych usterek, w które obfituje praca. Są to często drobne błędy i niestaranności, które nie zmieniają kierunku rozumowań ani nie wpływają zasadniczo na poprawność idei dowodów czy samych rezultatów (poza marginalnymi przypadkami). Utrudniają one jednak nierzadko pracę z tekstem, a dodatkowo złe wrażenie pozostawia ich nagromadzenie oraz pewna niczym niezaburzona regularność. Listę mankamentów redakcyjnych pracy uzupełniają sporadyczne drobne nieścisłości lub nieprecyzyjne sformułowania, których znaczenia trzeba się domyślać z kontekstu. Czasem razi też zwięzłość lub brak dokładniejszych objaśnień, jak i okazjonalne niezręczności językowe, czy niezgrabne sformułowania. Ogólnie oczekiwałbym większej staranności przy redagowaniu tekstu podsumowującego wysiłek kilkuletnich badań.

Obszerną listę anonsowanych usterek i uwag o charakterze edytorskim zamieściłem poniżej. Biorąc pod uwagę jej skalę, rozważałem złożenie wniosku dotyczącego poprawy rozprawy. Ostateczna decyzja w tej kwestii pozostaje w kompetencji Rady Naukowej Dyscypliny Matematyka Politechniki Warszawskiej. Wartość zgromadzonego materiału i zaprezentowanych przez mgr Pastwę rezultatów z zapasem zaspokaja jednak moje oczekiwania względem pełnowartościowej rozprawy doktorskiej. Drobiazgowa powtórna analiza poniższego zestawienia uwag krytycznych uzmysłowiła mi, iż niemal bez wyjątku dotyczą one drobnych usterek, podczas gdy rozprawa jest ogólnie napisana w sposób przemyślany i zrozumiały. Osobiście uważam zatem, iż podjęcie przez doktorantkę trudu jej poprawy nie zaskutkuje ujawnieniem istotnych dla procesu dalszej ewaluacji kompetencji, gdyż zasadniczo sprowadzi się do niemal mechanicznych działań zgodnych z listą załączonych sugestii.

Konkludując uważam, że praca doktorska mgr Urszuli Pastwy spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim i uzasadnia nadanie jej stopnia naukowego doktora nauk matematycznych.

Lista błędów, usterek i nieścisłości
(gdzie n^k, n_k oznaczają linię nr k od góry lub, odp., od dołu, na stronie n):
5_{14}: Zamiast „górnego" powinno być „dolnego".
12_1: Zamiast „$d \leqslant k$" powinno być „$1 \leqslant d \leqslant k$".
14^{13}: Zamiast „płaszczyzny" powinno raczej (ogólniej) być „$\mathbb{R}^d$".
14^{15}: Tu raczej też bardziej ogólnie chodzi o „r-repetycje", a nie tylko „repetycje".
14^{16}: Czym jest „p" w „$\left(\pi^*_{\sqrt{d}}(p)\right)^d$"? Zamiast p powinno raczej być r (co miałoby sens w kontekście powyższej uwagi oraz twierdzenia 4.4.2).
17^{15}: Zamiast „k" powinno być „$k+1$" (i podobnie w linijce poniżej).
17_{7-6}: W twierdzeniu 2.2.2 powinno być: „Dla każdej liczby naturalnej $k \geqslant 2$..." (brakuje też użycia znaków specjalnych w nazwiskach autorów).
18^2: Zamiast „morfizm $f : \{0,1,2\} \to \{A_1, A_2, \ldots, A_{l+5}, B_1, B_2, \ldots, B_{l+5}\}$" powinno być: „morfizm $f : \{0,1,2\}^* \to \{A_1, A_2, \ldots, A_{l+5}, B_1, B_2, \ldots, B_{l+5}\}^*$". Warto też zaznaczyć, czym są A_i oraz B_j (skoro wcześniej takie oznaczenia się nie pojawiły) – to pojedyncze litery, słowa...? Podobny problem się powtarza, np. w dowodzie twierdzenia 2.3.1, lematu 3.2.2, lematu 3.2.5,...
18_1: Wszystkie znaki w ostatniej tabeli na stronie 18 są przeciwne niż powinny być zgodnie z definicjami analizowanych funkcji. Być może funkcje typu $(b_1, b_2) \to \phi_A(b_2) - \phi_A(b_1)$ miały mieć przeciwne znaki (w odwrotnej konfiguracji są one np. analizowane w drugiej linijce kolejnej strony, po czym znowu jak pierwotnie w linijce piątej tej samej strony).
19^{18}: Zamiast „literę A_1 lub B_1, a b_2 – typ bloku zawierającego A_2 i B_2" powinno być: „literę A_i lub B_i, a b_2 – typ bloku zawierającego A_j lub, odpowiednio, B_j".
22_{12-11}: Zamiast „zdarzenie E_i jest niezależne od zdarzeń..." powinno być „zdarzenie E_i jest niezależne od **rodziny** zdarzeń..." – po angielsku: ***mutually*** *indpendent* (nie np. niezależne z każdym ze zdarzeń z jakiejś rodziny); „$\mathcal{E} - (\mathcal{D}_i \cup E_i)$" $\to$ „$\mathcal{E} - (\mathcal{D}_i \cup \{E_i\})$".
23^2: Dodać „niezależnie" przed „z jednakowym prawdopodobieństwem".
23_{7-6}: Zamiast „żaden podciąg arytmetyczny ciągu (x_n) nie jest realizacją r-repetycji" powinno być: „żaden podciąg arytmetyczny ciągu (x_n) **o różnicy nieprzekraczającej** k nie jest realizacją r-repetycji".
26^6: Zamiast „$\lceil \frac{W(s,r)-1}{r-1} \rceil$" powinno być „$\lfloor \frac{W(s,r)-1}{r-1} \rfloor$" (inaczej dowód nie jest poprawny).
26^{11-12}: „Jest to wynik nieco słabszy niż znane z [24] oszacowanie na liczby van der Waerdena $W(s,r) > (\frac{\sqrt{6}-2}{4})\frac{s^{r-1}}{r \ln r}(1 - \frac{1}{r})$" – mam kilka komentarzy dotyczących tego stwierdzenia:
- wynik z wniosku 2.5.4 nie wydaje się być w ogólności słabszy niż podane ograniczenie, wręcz przeciwnie;

- jakkolwiek mam problem z odnalezieniem takiego wyniku w pracy [24]; jest ona jednak napisana w języku rosyjskim (jak przypuszczam), którym nie władam, nie mam zatem co do tego 100% pewności.
- W [24] jest podane inne ograniczenie (o ile dobrze zgaduję obcojęzyczną treść), które już w istocie jest nieco lepsze niż to we wniosku 2.5.4.
- W pracy *Multipass greedy coloring of simple uniform hypergraphs* J. Kozika (Random Structures and Algorithms 48 (2016) 125–146) jest ograniczenie jeszcze lepsze oraz informacja, iż we wspomnianej pracy [24] anonsowany jest rezultat lepszy od wszystkich powyższych... sprawa ta wymaga wyjaśnienia.

26_{13-11}: „rozbieżność pomiędzy górnym i dolnym oszacowaniem na parametr $\pi_k(r)$... Ograniczenie górne w tym przypadku jest równe $\log_s 4k + (2+\varepsilon)\log_s \log_s 4k$." – to stwierdzenie jest całkowicie nieprawdziwe; przytoczone ograniczenie dotyczyło parametru r, a nie niezmiennika $\pi_k(r)$ (który odpowiada s).

26_{10-8}: „przy obecnie znanych ograniczeniach górnych na liczby van der Waerdena ... $2^{2^{s^{2^{2^r}}}} \leqslant k(r-1)+1$." – nie jest podany artykuł, z którego pochodzi to ograniczenie; czy chodzi o pracę: T. Gowers, *A new proof of Szemerédi's theorem*, Geom. Funct. Anal. 11 (3) 465–588? Znajduje się tam nieco słabsze niż podane ograniczenie, a mianowicie: $2^{2^{s^{2^{2^{r+9}}}}}$.

26_7: „To sprawia, że nie znamy nawet rzędu wielkości $\pi_k(r)$" – warto było oszacować i podać explicite rząd ograniczenia dolnego i górnego na $\pi_k(r)$, zwłaszcza, że nie jest to skomplikowane; podane powyżej nierówności, z których wynikałyby takie oszacowania są ponadto (jak pisałem w powyższych dwóch uwagach) błędne (przy czym drugi z owych potencjalnych błędów można uznać za drobny, a co do pierwszego, to w pracy znajduje się poprawna nierówność, do której wystarczy się odwołać).

27^3: Autorka wspomina linijkę wyżej o punktach kratowych na **płaszczyźnie**, więc zamiast „$\mathbb{Z}^d$" powinno raczej być „$\mathbb{Z}^2$" (podobnie w następnej linii).

27_6: Zamiast „$c = \sum_{j=1}^{d} 2^{j-1}x^{(j-1)}$" powinno być „$c = \sum_{j=1}^{d} 2^{j-1}x^{(j)}$" (tak jak w pracy źródłowej).

29_{10}: W twierdzeniu 3.2.1 zamiast „r" powinno być „$r \geqslant 2$".

30^1: Zamiast „$\pi_2(r)$" powinno być „$\pi_2'(r)$".

30^4: Zamiast „$\{A, B\}$" powinno być „$\{A, B\}^*$".

31^7: Zamiast „$\{A, B, C\}$" powinno być „$\{A, B, C\}^*$".

31_5: „w takim razie $v = AuA$" $\longrightarrow$ „w takim razie w przypadku (2), $v = AuA$".

36^{10}: Przypadek $k = 1$ powinien zostać skomentowany oddzielnie.

36_{12}: Zamiast „i_1, i_1" powinno być „i_1, i_2".

37^5: Zamiast „$r \geqslant \frac{k}{s-2} + 1$" powinno być „$r \geqslant \frac{2k}{s-3} + 1$", co można jeszcze

/ i.

nieznacznie obniżyć, ale tak czy owak prawa strona nierówności powinna być mniej więcej dwukrotnie większa niż w rozprawie.
37_{4-3}: Przedstawiony argument nie pokrywa przypadku $(k, r) = (1, 3)$, który można skomentować osobno lub w ogólnym przypadku zamiast „$(v_1v_2 \dots v_{l-1}$ $(v_lv_0))^{r-1}$" wykorzystać „$(v_1v_2 \dots v_{l-1}(v_lv_0))^{r-1}v_1v_2 \dots v_{l-1}$" oraz własności słowa Morse'a.
39^{12}: W dowodzie twierdzenia 4.2.1 powinno być założenie, że $k \geqslant 1$ (oraz np. komentarz, że dla $k < 1$, mamy $\pi_k^*(r) = 1$ wprost z definicji).
39_{11-9}: Definicja funkcji ϕ jest niepoprawna. Zamiast $\phi(b) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad b = 0 \\ 1 & \text{dla} \quad b = 2 \\ 3 & \text{dla} \quad b = 6 \end{cases}$
powinno być: $\phi(b) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad b = 0 \\ 2 & \text{dla} \quad b = 1 \\ 6 & \text{dla} \quad b = 2 \end{cases}$.
40^3: ‘„rozpoznać" typy bloków b_1 i b_2’ – aby to była zawsze prawda, powinno być $l \geqslant 14$; dla $l = 13$ możemy bowiem mieć np. $x_{\lfloor t \rfloor}x_{\lfloor t+d \rfloor} = A_iA_j = A_{12}A_0$, gdzie $\lfloor d \rfloor = 7$, $\lfloor d + 1 \rfloor = 8$ i nie jesteśmy w stanie określić typu bloków, do których należą A_{12} i A_0, bo mamy przynajmniej dwie możliwości:
a) $A_{12} \in$ 0-blok, $A_0 \in$ 2-blok, $j - i \equiv 1 \equiv 8 - 0 + 6 = \lfloor d + 1 \rfloor - \phi(0) + \phi(2)$ (mod 13), lub:
b) $A_{12} \in$ 2-blok, $A_0 \in$ 0-blok, $j - i \equiv 1 \equiv 7 - 6 + 0 = \lfloor d \rfloor - \phi(2) + \phi(0)$ (mod 13).
W konsekwencji, ograniczenie w twierdzeniu 4.2.1 powinno być postaci: $\pi_k^*(r) \leqslant \max\{14, \lceil \frac{k}{r-1} \rceil\}$.
$41^{6,8}$: Zamiast „13" powinno być „14" (konsekwencja wcześniej wspomnianej usterki w dowodzie twierdzenia 4.2.1).
41_{7-5}: Cały dowód lematu 4.3.1 powinien być prowadzony przy założeniu: $a < b$ (trywialne przypadki: $b < a$ i $b = a$ powinny być skomentowane na początku dowodu); założenie, iż $a < b$ jest istotne np. dla stwierdzenia, że $f : (m, d) \to (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ jest bijekcją na $[0, 1)^2$.
42_6: Dodać „niezależnie i" przed „z jednakowym prawdopodobieństwem".
42_2: Zamiast „$d \leqslant k$" powinno być „$1 \leqslant d \leqslant k$".
43^9: Dodać na końcu linii „z $d' \geqslant 1$".
43^{12-13}: Stwierdzenie „liczba $m' + (rl' - 1)d'$ należy do przedziału $[i_j + (rl' - 1), i_j + (rl' - 1)k + 1]$" jest prawdziwe, nie implikuje natomiast automatycznie wniosku z następnej linii – aby tak było, należy zmienić podany przedział na prawostronnie otwarty, albo lepiej zamienić cały fragment na (formę adekwatniej korespondującą z lematem 4.3.1, który chcemy potem zastosować): „liczba $\lfloor m' + (rl' - 1)d' \rfloor$ należy do przedziału $[i_j + (rl' - 1), i_j + (rl' - 1)k]$".
44^{1-2}. Sformułowanie wniosku 4.3.3 jest bardzo niefortunne i nie do końca po-

Ji.

prawne. Po pierwsze powinno być „$s \geqslant 2$”, po drugie „dla dowolnego $\varepsilon > 0$” należałoby przenieść na sam początek wniosku, po trzecie, skoro jest napisane „r... równe”, to wyrażenie „$\log_s$...” powinno być liczbą całkowitą, więc należy w nim dodać np. „sufit” – nie załatwia tu sprawy „$o(1)$”, przy którym (po czwarte) też warto skomentować ze względu na który z kilku parametrów stosujemy ów symbol.

47_{14-13}: Zamiast „podzbiór S przestrzeni $\mathbb{R}^d$ zawierający skończoną liczbę hiperkostek” powinno być „podzbiór S przestrzeni $\mathbb{R}^d$ **składający się** ze skończonej liczby hiperkostek” – jest to ważne np. linijkę niżej przy definicji $\mathcal{E}'_d$ (zgodnie z oryginalnym oznaczeniem z pracy, mogłyby istnieć ścieżki prostoliniowe danej długości, które są zawate w S, ale ich bazowe hiperkostki nie są w całości zawarte w S...).

48^{11}: Zamiast „S_1 zawiera jedną hiperkostkę” powinno być „S_1 **składa się** z jednej hiperkostki”.

48^{12}: „które są S_{i-1}” $\rightarrow$ „które są w S_{i-1}”; ponadto, co oznacza „sąsiadują” (nie ma to dużego znaczenia pod kątem poprawności dowodu, gdyż każda rozsądna definicja będzie odpowiednia, ale powinna ona być jakoś ustalona i sprecyzowana)?

48_{13-11}: Zdanie „Drzewo T... długości i.” ma jak rozumiem zawierać uzasadnienie, że T jest drzewem. Jeżeli tak, to nie powinno się zaczynać od słowa „drzewo”, a ponadto brakuje wyjaśnienia faktu, że w T nie ma cykli.

$50_{3,2}$: „k” $\rightarrow$ „$k \geqslant 2$”, „r” $\rightarrow$ „$r \geqslant 3$”.

54^7: Zamiast „Jeśli pewien sufiks r słowa w jest realizacją wzorca p z k-przeskokami” powinno raczej być „Jeśli pewien sufiks r słowa w **zawiera** realizację wzorca p z k-przeskokami”; ponadto sufiks r powinien być bardziej precyzyjnie opisany i zdeterminowany, m.in. uwzględniając potencjalną sytuację, gdy pojawia się więcej niż jeden taki sufiks naraz (podobna uwaga tyczy się linijki 55^8).

55^{10-11}: Brak wyjaśnienia czym są $f(\alpha_i)$ (trzeba się tego domyślić).

55^{17-20}: Ten fragment jest bardzo źle opisany; w szczególności znowu trzeba się domyślać, co znaczy „odwrócić opisany powyżej zapis” (i w tym przypadku wymaga to kilkukrotnego przestudiowania tekstu) i czym są w' i LOG' – te oznaczenia można rozszyfrować dopiero skończywszy czytać ten fragment; ponadto w 55^{19} powinno raczej być „$LOG' = LOG_i$” zamiast „$L' = L$”.

56^1: Zamiast „bijekcja” powinno być „iniekcja”.

56^{10-11}: Uzasadnienie faktu 5.3.2, a dokładniej jego drugie zdanie nie jest poprawne. Można zamiast tego rozważyć (rosnący) ciąg liczb: $l_1, l_1 + l_2, l_1 + l_2 + l_3$ i zinterpretować go jako jeden z możliwych podzbiorów odpowiedniego zbioru.

57_8: Zamiast „$1,46^{2k}$” powinno być „$1,47^{2k}$”.

58^3: Przedstawione tu oszacowanie nie jest do końca poprawne: mianowicie, jeżeli wstawimy $\gamma_8 = (8e)^{\frac{1}{8}}$ (korzystając z ograniczenia z faktu 5.3.1 – innym nie dysponujemy), wówczas nierówność z tej linii nie jest prawdziwa dla pewnych (małych) k, np. $k = 1$, ze względu na „$\lfloor \ldots \rfloor$" (podłogę) w przyjętej wartości $|\mathcal{A}|$. Aby sobie z tym poradzić, można jednak zauważyć (pokazać), że istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla każdego $k \geqslant 1$ mamy: $2k^2\gamma_8^{2k} < 2k^2(1,47)^{2k} - \varepsilon < \lfloor 2k^2(1,47)^2k \rfloor + 1 - \varepsilon = |A| - \varepsilon$, a to wystarczy do naszych celów.
58^7: Zamiast „Claim 1" powinno być „Claim 3".
58_{7-6}: Zamiast „niech c będzie... stałą" powinno być „niech c będzie... stałą **całkowitą**" (by nierówność z linii 58_3 była spełniona).
61^{13-14}: Zamiast „odległości pomiędzy kolejnymi wystąpieniami każdej zmiennej we wzorcu p są mniejsze niż $f_k(m-1)$" możemy jedynie stwierdzić, że „odległości pomiędzy kolejnymi wystąpieniami każdej zmiennej we wzorcu p są **niewiększe** niż $f_k(m-1)$"; w konsekwencji zmienić należy w kolejnej linii ograniczenie dolne „$r_i \geqslant \frac{l}{f_k(m-1)}$" na „$r_i \geqslant \lfloor \frac{l}{f_k(m-1)} \rfloor$", lub lepiej od razu na „$r_i \geqslant \frac{l}{f_k(m-1)} - 1$", co powoduje konieczność dokonania szeregu zmian w dalszych nierównościach (m.in. w $62^{12}, 62^{14}, 63_{11}, 63_6, 63_5$).
61_{12}: Konflikt oznaczeń – symbol „m" jest już używany jako argument funkcji f_k i względem tego m prowadzone jest całe rozumowanie indukcyjne (ten problem powtarza się następnie w kilku fragmentach dowodu).
61_{10}: Zdarzenia $E(\mathbf{i}; d_1, d_2, \ldots, d_m)$ powinny być definiowane jedynie dla d_j spełniających odpowiedni warunek konieczny (tj. $\sum_{j=1}^m r_j d_j = n$) – ma to pewne znaczenie dla poprawności niektórych dalszych nierówności.
62^{12}: Kolejny konflikt oznaczeń w tym samym dowodzie: „p" odpowiada już wzorcowi, który badamy – ten problem się powtarza, staje się on szczególnie wyrazisty, gdy dochodzimy do ostatniej linii strony 63.
62_{2-1}: Ostatnia nierówność na stronie 62 jest nieprawdziwa (jakkolwiek postulowana nierówność pomiędzy liniami 62_3 i 62_1 jest spełniona); wynika to z faktu, iż w zbiorze $\{E \in \mathcal{D}_{E'} : n(E) = \sum_{i=1}^m r_i d_i\}$ ten sam ciąg (mający jakiś jeden konkretny wyraz wspólny z ciągiem odpowiadającym E') może generować kilka zdarzeń E (o różnych wartościach $d_i(E)$ spełniających $n(E) = \sum_{i=1}^m r_i d_i$), podczas gdy w „$n(E') \cdot D^*(\sum_{i=1}^m r_i d_i)$" każdy taki ciąg wliczany jest „za 1". Aby to poprawić, zamiast „$\{E \in \mathcal{D}_{E'} : n(E) = \sum_{i=1}^m r_i d_i\}$" powinno być „$\{\mathbf{i}(E) : E \in \mathcal{D}_{E'}, n(E) = \sum_{i=1}^m r_i d_i\}$", gdzie „$\mathbf{i}(E)$" oznacza ciąg odpowiadający zdarzeniu E.
63_{11}: Zamiast „$f(m-1)$" powinno być „$f_k(m-1)$" (i podobnie w $63_6, 63_5$).
65^3: „większa od" $\to$ „większa od bądź równa".
65^{8-9}: Podobnie jak w przypadku dowodu twierdzenia 5.6.2, zamiast „odległości pomiędzy kolejnymi wystąpieniami każdej zmiennej we wzorcu p są

mniejsze niż $f(m-1)$" możemy jedynie stwierdzić, że „odległości pomiędzy kolejnymi wystąpieniami każdej zmiennej we wzorcu p są **niewiększe** niż $f(m-1)$"; w konsekwencji zmienić należy w kolejnej linii ograniczenie dolne „$r_i \geqslant \frac{l}{f_k(m-1)}$" na „$r_i \geqslant \lfloor \frac{l}{f(m-1)} \rfloor$", lub lepiej od razu na „$r_i \geqslant \frac{l}{f(m-1)} - 1$", co powoduje konieczność przedefiniowania „$a(l)$" z „$a(l) = \frac{l}{f(m-1)}$" na „$a(l) = \frac{l}{f(m-1)} - 1$" oraz dokonania kilku zmian w dalszej części dowodu (m.in. w $66_1, 67^7, 67^8$).
65^{16}: Zdarzenia $E(H_1, \ldots, H_n; d_1, \ldots, d_m)$ powinny być definiowane jedynie dla d_j spełniających odpowiedni warunek konieczny (tj. $\sum_{j=1}^{m} r_j d_j = n$) – ma to pewne znaczenie dla poprawności niektórych dalszych nierówności.
65^{17}: Zamiast „nie zawiera żadnej realizacji p" powinno być „zawiera realizację p".
65_{11}: Zamiast „zawierający skończenie wiele kwadratów" powinno być „złożony ze skończenie wielu kwadratów".
65_3: Konflikt oznaczeń: „p" odpowiada już wzorcowi, który badamy – ten problem się powtarza, jest on uwydatniony np. gdy dochodzimy do 67_6.
66^7: Nierówność pomiędzy liniami 7 i 8 nie jest prawdziwa (analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 5.6.2). Zamiast „$\{E \in \mathcal{D}_{E'} : n(E) = \sum_{i=1}^{m} r_i d_i\}$" powinno być „$\{(H_1, \ldots, H_n)(E) : E \in \mathcal{D}_{E'}, n(E) = \sum_{i=1}^{m} r_i d_i\}$", gdzie $(H_1, \ldots, H_n)(E)$ oznacza ścieżkowalny ciąg kwadratów odpowiadający zdarzeniu E.
66_5: Zamiast „$\mathcal{E}_{E'}$" powinno być „$\mathcal{D}_{E'}$".
67^5: Zamiast „Stąd wyrażenie $\binom{s-1}{m-1} lD^*(ls)$" powinno być „Wyrażenie $\binom{s-1}{m-1} l12\pi ls(ls-1)(\frac{(ls-1)(ls-2)}{2}+1)^2$".
67_4: Zamiast „zawierającego skończenie wiele kwadratów" powinno być „złożonego ze skończenie wielu kwadratów".
68_{3-2} (Bibliografia): Zamiast „European Journal of Combinatorics" powinno być „Electronic Journal of Combinatorics".

Uwagi redakcyjne:

5^2: „podciąg" $\longrightarrow$ „taki podciąg". 6^2: „Let consider infinite sequence" $\longrightarrow$ „Let us consider an infinite sequence". 6^4: „In the other words" $\longrightarrow$ „In other words". 6^{4-5}: „Over a century ago... has considered" $\longrightarrow$ „Over a century ago... considered". 6^5: Usunąć przecinek (podobnie w 6_4). 6^{11}: „the others" $\longrightarrow$ „other". 6^{12}: „lower and upper bound" $\longrightarrow$ „lower and upper bounds". 6^{13}: „avoid repetition" $\longrightarrow$ „avoid repetitions" / „avoid a repetition". 6^{14}: „For some part of proofs" $\longrightarrow$ „Within some proofs"; „infinite sequence" $\longrightarrow$ „an infinite sequence". 6^{15}: „upper bounds of number" $\longrightarrow$ „upper bounds on the number". 6^{15-16}: „presenting algorithm" $\longrightarrow$ „present an algorithm". 6^{17}: „repetition-free sequence" $\longrightarrow$ „a repetition-free sequence". 6^{18}: „conec-

JL

tion between problem" → „connection between the problem". 6_6: „patterns" → „a pattern"; „Presented proofs uses method of entropy compression" → „Proofs presented there are based on the entropy compression method". 6_5: „presented" → „formerly presented". 6_3: „repetition" → „a repetition". 11_{13}: „Thue'go" → „Thuego" (podobnie np. na stronie 12). 12^{14}: „która zachęca" → „które zachęcają". 13_{13}: „wykorzystanie" → „zastosowanie". 15^1: „trudny" → „trudne". 16^{10-11}: „tego ciągu arytmetycznego" → „analizowanych podciągów arytmetycznych". 16_{13}: „powyższym twierdzeniu" → „powyższej definicji". 17^{15}: „realizację repetycję" → „realizację repetycji". 18^{10}: „maksymalne podsłowa $f(w)$" → „maksymalne podsłowa słowa $f(w)$". 20^4: „kolejne" → „kolejna". 20^9: „spójnego podsłowa" → „podsłowa"; „podsłowo w" → „podsłowo słowa w" (podobnie w 22^3 i 40_1). 22_{10}: „rzeczywiste" → „rzeczywista". 23_8: „żadno" → „żadne". 27^{2-3}: „paramter" → „parametr". 32^8: „podsłowem w" → „podsłowem słowa w". 35_6: „podsłowami v" → „podsłowami słowa v". 42^{11}: „indukcję po n" → „indukcję względem n". 43_7: „żadno" → „żadne". 44_7: „doczekać się" → „doczekał się". 47_8: „kostką" → „hiperkostkę". 48^8: „Lematu Königa" → „lematu Königa" (wielokrotnie). 53^9: „liczbę" → „liczbą". 56^4: „podzbiorów $[m]$" → „podzbiorów zbioru $[m]$"; „podzbiorów" → „podzbiorów zbioru $[m]$". 57_{10}: „Stwierdzenia 3.3.1" → „stwierdzenia 3.3.1" (podobna uwaga ma zastosowanie wielokrotnie w rozprawie). 64_{13}: „konstrukcję" → „konstrukcją".

10^{9-10}: Definicja 1.1.3. Uważam, że pojęcie „występowania realizacji r-repetycji" w ciągu powinno być rozszerzone do „występowania realizacji r-repetycji **jako podsłowa**". W podrozdziale 1.3 pojawiają się bowiem nowe pojęcia „występowania realizacji r-repetycji jako...". Zgodnie z przyjętymi w rozprawie definicjami, jeżeli w danym słowie występuje realizacja r-repetycji jako np. podciąg z 2-przeskokami, nie oznacza to, że (w ogóle) występuje w tym słowie (jakakolwiek) r-repetycja – jest to dosyć nieintuicyjne i mylące. Podobnie powinna być zmodyfikowana kolejna definicja 1.1.4. Ogólnie rzecz biorąc oczekiwałbym też bardziej wyrazistego zaakcentowania różnic pomiędzy pewnymi pojęciami we wstępnym rozdziale 1 pracy, np. różnicy między *podciągiem* a *podsłowem*. Brak wyeksponowania tego typu niuansów pojęciowych powoduje pewną dezorientację odbiorcy, zwłaszcza przy pierwszym czytaniu rozprawy, utrudniając pracę nad tekstem.

11^8: Jakich warunków dotyczy „równoważność trzech warunków" – warto tu doać słowo „pewnych" lub (lepiej) odwołać się do poniższej uwagi 1.1.8.

11^{11-16}: Warto by było poświęcić parę słów komentarza tej uwadze i dodać odwołanie do literatury.

11_{4-3}: Nawiązując do wcześniejszego komentarza, nie jest np. w pełni jasne, co oznacza stwierdzenie „ciąg nie zawiera żadnego słowa postaci $uxuxu$". Nie zawiera jako podsłowa, podciągu,...? Może lepiej napisać „nie zawiera pod-

słowa postaci $uxuxu$" (pomijając już fakt, że wcześniej rozważaliśmy „występowanie realizacji", a nie „zawieranie").
12^{14}: Sformułowanie „ich liczne wykorzystania" jest co najmniej niefortunne. Może lepiej napisać „aplikacje" zamiast „wykorzystania" lub przeformułować całe zdanie.
13^{7}: Nie jest całkowicie jasne, kto jest autorem dowodu górnego ograniczenia $\pi_k(2) \leqslant k + 11$ i skąd wynik pochodzi. Tego typu niejasności powtarzają się wielokrotnie w rozprawie. Zastanawiające jest też dlaczego taki istotny wynik nie został opublikowany (podobne pytanie nasuwa się też w stosunku do wielu innych rezultatów, np. wspomnianego w 13_1).
13^{13}: Autorka pisze „przedstawiam", a np. dziewięć linijek niżej: „przedstawiamy"...
13_5: Czy ten wynik pochodzi z jakiejś opublikowanej pracy?
$14^{5,7}$: Nie jest całkiem jasne, kto jest autorem (potencjalnym współautorem) tych wyników...
14_8 W „spójnych podsłowach" słowo „spójnych" jest zbędne – podsłowa są spójne z definicji.
15^{6}: Czy to oznacza, że pozostałe (czyli jakie) wyniki z rozdziału 5 są samodzielne? Czy zostały opublikowane?
21_{12}: Warto dodać tu po kropce komentarz: „Te bloki są kolejnymi blokami w słowie $f(w)$, bo długość każdego z nich wynosi przynajmniej k, więc na podstawie własności ciągu Thuego są to bloki różnego typu".
24^{2}: Warto tu dodać, że pisząc „$o(1)$" mamy na myśli „$o(1)$" względem „k" (a nie np. „s", czy innego parametru), tzn. „dla $k \to \infty$".
26^{1}: „Powyższe ograniczenie wydaje się dalekie od optymalnego" – warto było przed tym stwierdzeniem przytoczyć jakieś ograniczenia dotyczące liczb van der Waerdena.
27_5: „W połączeniu z twierdzeniem 2.2.3 daje to następujący wynik..." – to wynikanie nie jest całkiem bezpośrednie; należałoby jeszcze skomentować, np. wykorzystując lemat Königa, dlaczego na podstawie twierdzenia 2.2.3 istnieje **obustronnie** nieskończony ciąg o pożądanych własnościach.
30^{11}: Warto dodać, że v_k lub v_0 mogą być puste; ponadto, zapis typu $(A+A^2)$ nie był wyjaśniony – lepiej może napisać, zgodnie z w cześniejszymi ozncze-niami, np. $\{A, A^2\}^1$...
30^{12}: „przed każdym" $\to$ „na początku każdego".
31_{10}: Przydałoby się tu dodatkowo wyjaśnić dlaczego możemy przyjąć $v' = C^2u$, np., że wynika to z faktu, iż litery C występują w słowie $f(w)$ w parach (C^2) i zawsze przed A^2, jak i przed B^2, występuje C^2, które możemy dołączyć częściowo lub w całości do...
34^{2}: Dlaczego „i_m", a nie po prostu „i_1"?
34_4: Podobnie jak w kilku innych przypadkach, warto napisać, czym są A_i,

Jl.

B_i, C, oraz że są parami różne.
35_6: „Pominięte fragmenty są rozłącznymi podsłowami v" – słowo „fragmenty" zostało 4 linijki wyżej użyte (i w pewnym sensie zarezerwowane) w innym konkretnym znaczeniu; poza tym warto było dodatkowo skomentować kwestię wspomnianej „rozłączności", która jest dosyć subtelna (i wynika np. z faktu, że w każdym v musi być litera A_n, dla pewnego n).
38_5: „dodatniego" – niepotrzebne.
40_{15}: Warto tu dodać komentarz: „Te bloki są kolejnymi blokami w słowie $f(w)$, bo długość każdego z nich wynosi przynajmniej k, więc na podstawie własności ciągu Thuego są to bloki różnego typu".
43_{4-2}: Stwierdzenie „Warunek... jest dość skomplikowany i został przedstawiony w takiej postaci przede wszystkim ze względu na możliwość komputerowego sprawdzenia dla konkretnych wartości s, r, k" jest dla mnie nieprzekonujące. Przy innej (czytaj 'mniej skomplikowanej') postaci nie dałoby się użyć komputera?
46^2: „Nasz dowód" – tzn. który i czyj?
46_{4-3}: Warto dodać komentarz, że dwa punkty z jednej ścieżki prostoliniowej nie mogą należeć do jednej hiperkostki.
47^{11}: Nieco dezorientująca i utrudniająca czytanie jest nagła zmiana konwencji oznaczania parametrów – przez większość pracy, liczbę kolorów oznaczaliśmy przerz s (a przez k – maksymalną długość przeskoku), w twierdzeniu 4.4.3, k oznacza liczbę kolorów (a s długość bloku repetycji)...
49^{8-10}: Wynikanie z lematu 4.3.1 powinno być dokładniej opisane (z uwzględnieniem komentarza do przypadku, gdy odpowiednie współrzędne maleją...).
50^{8-9}: „pozostaje sprawdzenie, że nierówności zachodzą dla... $(r, k) = (43, 2)$ oraz $(r, k) = (24, 3)$" – gdzie zatem jest to sprawdzenie...?
$51^{3,5}$: Oczekiwałbym dokładniejszego rozpisania przekształceń oraz nieco więcej komentarzy do przyjętych oszacowań (zaznaczając przy tym, iż są poprawne).
$56^{3,6}$: Powinien być skomentowany przypadek, gdy $\frac{m}{c}$ nie jest liczbą całkowitą.
62^{11}: Dwukrotnie powtórzone „z E".
63_8: Przydałby się jakiś komentarz (lub źródło) do własności (5.6.4) (która jest prawdziwa).

Jakub Przybyło

dr hab. Jakub Przybyło
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

17.07.2020