Warszawa,20 Lipca 2020

prof. dr hab. Wojciech Rytter
Wydział, Matematyki, Informatyki
i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego
e-mail: rytter@mimuw.edu.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Urszuli Pastwy pt. "Uogólnienia problemu unikania repetycji w słowach "

Kombinatoryka słów (ciągów, sekwencji) jest ważną częścia matematyki dyskretnej. W dziedzinie tej szczególne miejsce zajmuje problematyka regularności słów, w szczególności potórzeń (repetycji). Najprostszym rodzajem repetycji są kwadraty (słowa postaci xx). Ogólnie r-repetycją jest słowo postaci x^r, gdzie x jest niepustym słowem, czyli kwadrat jest 2-repetycją.

Klasycznym wynikiem jest tutaj pokazanie przez Thue'ego ponad sto lat temu, że istnieją nieskończone słowa ternarne nie zawierające kwadratów oraz nieskończone słowa binarne nie zawierające 3-repetycji. k-repetycje są szczególnym przypadkiem ogólnego wzorca, gdzie przez wzorzec rozumiemy słowo złożone ze zmiennych na które mogą być podstawione konkretne niepuste słowa w ustalonym skończonym alfabecie rozmiaru s, na przykład wzorcem jest xyx oraz xx. Dane słowo w unika wzorca jeśli przy żadnej realizacji zmiennych otrzymane słowo nie występuje w słowie w.

Głównym problemem jest tutaj wskazanie najmniejszego s dla którego istnieje nieskończenie wiele słów w alfabecie rozmiaru s unikających dany wzorzec. W szczególności słowa unikające r-repetycji nazwijmy r-unikającymi.

W ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat dziesiątki publikacji naukowych poświęcono różnego rodzaju wersjom unikania repetycji i ogólnych wzorców w słowach jak również w innych strukturach.

Rozprawa dotyczy nowego otwarcia w tej dziedzinie - rozważa się nie tylko spójne fragmenty słowa ale również fragmenty odpowiadające ciągowi symboli na pozycjach $i_1, i_2, ..., i_m$, gdzie podciąg ten spełnia naturalne ograniczenia następujących trzech typów ze względu na skoki (przeskoki) $i_2 - i_1, i_3 - i_2, ..., i_m - i_{m-1}$

- regularne k-skoki, gdy $i_1, i_2, ...i_m$ jest postępem arytmetycznym o różnicy co najwyżej k;
- k-skoki, gdy $i_{j+1} - i_j \in \{1, .., k\}$ dla każdego $j < m$;

- quasi regularne k-skoki, gdy różnica (pomiędzy jeden i k) postępu arytmetycznego jest niekoniecznie liczbą całkowitą. Wymaga to brania dolnej części całkowitej. Takie skoki są czymś pośrednim między k-skokami i regularnymi skokami. Motywowane są zastosowaniem w unikaniu na ścieżkach prostoliniowych w przetrzeni.

Przez $\pi_k(r), \pi'_k(r), \pi^*(r)$ oznaczamy minimalną liczbę symboli w alfabecie tak by można było otrzymać nieskończenie wiele słow (w tym alfabecie) nie zawierających r-repetycji z odpowiednio k-skokami, regularnymi k-skokami i quasi regularnymi k-skokami.

Główne wyniki pracy to górne i dolne ograniczenia na liczby $\pi_k(r), \pi'_k(r), \pi^*(r)$.

- W 1-szym rozdziale autorka przedstawia wiele faktów związanych z powtórzeniami oraz ze specjalnymi słowami. Wiele tych faktów jest folklorem i dowody są tutaj zbyteczne, nie wiem po co są w pracy.

- W drugim rozdziale pokazano, że

$$\pi_k(2) \leq k + 11 \text{ oraz dla } r \geq 3 \ \pi_k(r) \leq \max\,(7, \lceil \frac{k}{r-1} \rceil)$$

  Ponadto rozważono pewne oszacowania dla małych alfabetów, oraz związki z liczbami van der Vardena.

- Trzeci rozdział jest według mnie najciekawszy, dotyczy on dowolnych k-skoków. Rozważono w nim przypadek dotyczący 2-skoków. Podano następujące dokladne wzory

$$\pi'_2(r) = \begin{cases} 2 & \text{dla } \ r \geq 6 \\ 3 & \text{dla } 3 \leq r \leq 4 \\ 6 & \text{dla } r = 2 \end{cases}$$

  Według mnie jest to najważniejszy wynik w pracy. Niestety nie jest to pełna charakteryzacja $\pi_k(2)$, ponieważ pomija przypadek $r = 5$.

- Czwarty rozdział jest poświęcony unikaniu repetycji z quasi regularnym skokami. Udowodnion, że $\pi^*_k(r) \leq \max\,(13, \lceil \frac{k}{r-1} \rceil$ dla $r \geq 3$. Z oszacowań na $\pi^*_k(r)$ wynikają pewne oszacowania na unikalność repetycji na ścieżkach prostoliniowych w przestrzeni.

- Piąty rozdział wychodzi poza tematykę repetycji i rozważa ogólne wersje wzorca. W szczególności r-repetycja jest wzorcem $p = x^r$. Podobnie jak dla repetycji definiuje się dla wzorca p liczby $\pi_k(p), \pi'_k(p), \pi^*(p)$. Badane są wzorce ze względu na długość $|p|$, oraz liczbę zmiennych l. Szczególną klasą są tzw. wzorce *bezjednostkowe* (każda zmienna występuje co najmniej dwa razy, o ile w ogóle występuje). Dla wzorców p tego typu udowodniono, że $\pi'_k(p) \leq 2^{2k+1}k^2 + 1$.

  Korzystając z wyników i technik dla wzorców bezjednostkowych dla dowolnych wzorców udowodniono:

  $|p| \geq 2^l \Rightarrow \pi'_k(p) \leq \lceil 2k^2 \cdot l.\,1.47^{2k} \rceil + 1$,

  oraz $l = 2 \ \& \ |p| \geq c(k) \Rightarrow \pi'_k(p) \leq 2 \cdot \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$, dla pewnej funcji $c(k)$.

Na końcu niektórych rozdziałów wykorzystano dyskretne wyniki zaprezentowane wcześniej do zbadania problemów geometrycznych kolorowania grafu jednostkowego w d-wymiarowej przestrzeni R^d i przestrzeni punktów całkowitych Z^d w taki sposób, by na pewnych ustalonych prostych nie istniała realizacja repetycji.

Praca w dużym stopniu ma charakter konstruktywny (w pewnym sensie algorytmiczny, choć dotyczy często nieskończonych ciągów). Podstawą wielu dowodów jest przedstawienie konstrukcji nieskończonego ciągu unikającego danego typu repetycji lub wskazanie algorytmu na znalezienie realizacji repetycji.

Z reguły konstrukcje są bardzo podobnego typu, jest to odpowiednia modyfikacja (przekodowanie za pomocą bardzo nietrywailnych morfizmów) ciągu Morse'a lub ciągu Thue'go. Wyjątkiem ieedzy innymi jest konstrukcja z części 5-tej rozprawy za pomocą techniki zliczania (zwanej w pracy kompresją entropii). W niektórych sytuacjach dowody mają charakter probabilistyczny.

Autorka pokazuje ponadto dosyć skomplikowane związki problemu unikania repetycji z regularnymi przeskokami z bardzo dużymi liczbami van der Waerdena.

Mgr Pastwa wykazała się w swojej rozprawie doktorskiej świetną znajomoscią matematyki dyskretnej. Wykazała sie też dużą oryginalnością i pomysłowością w rozwiązywaniu bardzo skomplikowanych technicznie problemów.

Jej rozprawa doktorska jest podsumowaniem trzech publikacji w międzynarodowych czasopismach naukowych.

Rozprawa chociaż jest pod względem formalnym technicznie dobrze napisana, to jednak brak w niej nieformalnych opisów wyrabiających intuicje o co chodzi, jak również większej liczby ilustracji (w całej pracy są tylko dwa rysunki) jak również większej liczby ciekawych przykładów. Trudno zainteresować czytelnika takim bardzo technicznym tekstem.

Konkluzja.

Moja ocena rozprawy jest wysoka, gdyż rozwiązano w sposób nietrywialny bardzo trudne i ciekawe kombinatoryczne problemy natury czysto teoretycznej.

Stwierdzam, że rozprawa magister Urszuli Pastwy spełnia wszystkie ustawowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim.

Wojciech Rytter

Wojciech Rytter