

dr hab. inż. Dariusz Dereniowski  
Katedra Algorytmów i Modelowania Systemów  
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki  
Politechnika Gdańska

## Recenzja rozprawy doktorskiej

Tytuł rozprawy: **Zakorzenione upakowania grafów i ich zastosowania**

Autor rozprawy: **mgr Nataliya Petryshyn**

### 1. Tematyka rozprawy.

W szerszym kontekście, praca dotyczy zagadnień upakowania grafów i związanych problemów pokrewnych, jak dekompozycje grafu i faktory. Dokładniej, głównym problemem analizowanym w rozprawie są tzw. zakorzenione upakowania zdefiniowane dla zakorzenionych grafów będących parami  $(G, S)$ , gdzie  $S$  jest podzbiorem wierzchołków grafu  $G$  nazywanych korzeniami. (Według mojej wiedzy, rozprawa wraz z towarzyszącą publikacją [24] definiuje ten problem jako nowy w literaturze przedmiotu.) Wówczas zakorzenione  $(H, T)$ -upakowanie w zakorzeniony graf  $(G, S)$  to zbiór złożony z zakorzenionych podgrafów  $(H_i, T_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ , grafu  $(G, S)$  izomorficznych z  $(H, T)$  o parami rozłącznych zbiorach krawędzi oraz parami rozłącznych zbiorach  $T_i$ . (Izomorfizm oraz zawieranie dla zakorzenionych grafów definiowane jest tak, aby naturalnie zachowywało obraz wyróżnionych korzeni.) Upakowanie jest zakorzenioną dekompozycją jeśli  $\bigcup_i E(H_i) = E(G)$ , oraz zakorzenionym faktorem gdy  $\bigcup_i T_i = S$ .

Tak postawiony problem szukania najliczniejszego zakorzenionego upakowania jest bardzo nietrywialnym zagadnieniem. Wynika to przede wszystkim z faktu, że przez odpowiedni dobór podgrafu  $(H, T)$  można zdefiniować szereg znanych kombinatorycznych problemów. Na przykład, już tak prosty przypadek jak  $H$  będącym izolowaną krawędzią, a  $T$  zawierającym oba wierzchołki  $H$  stanowi reformulację problemu najliczniejszego skojarzenia. Praca podaje więcej takich przykładów, włączając istnienie pewnych orientacji grafu. Stąd zasadne w mojej opinii jest skupienie się na konkretnych wyborach grafu  $H$ , co jest czynione w rozprawie. W szczególności, większa część pracy (rozdział 1) poświęcona jest szukaniu najliczniejszego upakowania gdy  $H$  jest gwiazdą.

Następnie (rozdział 2) praca analizuje problem  $\{2K_2, H\}$ -dekompozycji grafu rozumianej jako dekomponowanie grafu na krawędziowo rozłączne podgrafy izomorficzne z  $2K_2$  lub z  $H$ . Zasadność analizy takiego problemu w ramach tej pracy wynika z faktu, że okazuje się on mieć silne związki zakorzenionymi dekompozycjami. To

w dość ciekawy sposób dopełnia pracę, gdyż pokazuje sposoby wykorzystania metodologii związanej z zakorzenionymi upakowaniami do uzyskania ciekawych wyników poza tym obszarem.

## 2. Uzyskane wyniki oraz ocena dorobku.

Praca zawiera dwa główne wyniki.

- Klasyfikacja łatwych i trudnych obliczeniowo przypadków problemu szukania najliczniejszego zakorzenionego  $(H, T)$ -upakowania gdy podgraf  $H$  jest gwiazdą. Klasyfikacja tego przypadku jest pełna. Ponadto pokazano częściowo kompletne charakteryzacje dla problemów zakorzenionej  $H$ -dekompozycji oraz zakorzenionego  $H$ -faktora w przypadkach gdy  $H$  jest gwiazdą, a zbiór korzeni grafu dla którego rozwiązujemy dany problem jest równy jego zbiorowi wierzchołków. Wyniki te przedstawione są w rozdziale 1. Rozdział składa się z kolekcji wielu faktów, które przeprowadzają czytelnika przez kolejne podprzypadki, których liczba wynika głównie z szeregu możliwości wyboru korzeni w grafie będącym gwiazdą. Wiele z tych podprzypadków zostało rozstrzygniętych przez analizę własności upakowań lub wskazanie odpowiednich algorytmów tam gdzie przypadek jest wielomianowy. Jako ciekawsze wyniki, co rozumiem jako będące niezależnie interesującymi faktami od całej charakteryzacji, uznałbym twierdzenia 1.1.6 oraz 1.1.9. Twierdzenie 1.1.6 podaje formułę na najliczniejsze zakorzenione upakowanie dla przypadku gdy  $H$  jest gwiazdą o trzech wierzchołkach, której centrum jest korzeniem. Twierdzenie 1.1.9 natomiast charakteryzuje najliczniejsze zakorzenione upakowanie dla takich gwiazd  $H$  w języku pewnych zabronionych struktur.
- Pokazanie szeregu związków pomiędzy szukaniem maksymalnych zakorzenionych upakowań (a także dekompozycji i faktorów), a problemem istnienia  $\{2K_2, H\}$ -dekompozycji grafu. Związki te pozwalają na podanie charakteryzacji ze względu na złożoność obliczeniową tego ostatniego problemu w pewnych szczególnych przypadkach (gdy  $H$  jest podwójną gwiazdą). Największą wartość tego rozdziału stanowi taki nietrywialny przykład zastosowania zakorzenionych upakowań.

W mojej opinii, problem postawiony w pracy jest dobrze umotywowany i stanowi naturalne uogólnienie klasycznych teoriografowych pojęć. Rozprawa jako dzieło, które wprowadza nowy problem kombinatoryczny zasadnie go motywuje głównie poprzez pokazane zastosowania. Fakt, że studiowane są bardzo szczególne przypadki (gwiazdy) jest zrozumiałe ze względu na to jakie trudności w ogólnej analizie możemy się spodziewać przy tego typu uogólnieniu.

Praca jest napisana bardzo starannie i posiada dobrze przemyślaną strukturę. Kwestią gustu może być sposób prezentacji niektórych argumentów w dowodzie, przez co mam na myśli przede wszystkim sformułowania algorytmów: wyodrębnienie niektórych algorytmów w postaci pseudo-kodu pozwoliłoby na łatwiejszą identyfikację w jaki sposób rozwiązujemy dany podproblem. Przy tego typu monografii warto byłoby także dodać nieco bardziej rozbudowany przegląd literatury, co pozwoliłoby

ocenić szerszą orientację Autorki w problematyce pokrewnej, której praca dotyczy. W szczególności, interesujące byłoby zaprezentowanie nie tylko znanych faktów, ale także pewien przegląd technik uzyskiwania wyników w problemach dekompozycji i faktorów.

### 3. Konkluzja.

Problem badawczy jest dobrze postawiony, praca jest spójna tematycznie i zawiera wyniki wnoszące wartościowy wkład w teorii grafów. Odnosząc się do kwestii zastosowań uzyskanych wyników, to czy problem posiada potencjalne zastosowania praktyczne nie jest poruszane w pracy. (Dodam, że takie zastosowania niewątpliwie istnieją co wynika z faktu, że problem uogólnia szereg klasycznych problemów w teorii grafów, natomiast trudno jest ocenić istnienie zastosowań specyficznych dla zakorzenionych upakowań.) Natomiast praca argumentuje istnienie szereg zastosowań "teoretycznych", przez które rozumiem uzyskanie pewnych teorio-grafowych rezultatów poprzez analizę zakorzenionych upakowań. Pierwszy rozdział rozprawy znajduje swoje odzwierciedlenie w publikacji w renomowanym piśmie *Journal of Graph Theory*, co stanowi potwierdzenie faktu, że uzyskane wyniki wpisują się w światowy nurt badań.

Podsumowując, w mojej opinii rozprawa spełnia warunki określone w *Ustawie*. W związku z tym, wnioskuję o dopuszczenie Autorki do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

  
.....  
Dariusz Dereniowski