POLITECHNIKA WARSZAWSKA

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

Rozprawa doktorska

mgr Oskar Górniewicz

Analityczne i topologiczne metody poszukiwania równowagi Nasha w grach niekooperacyjnych

Promotor
dr hab. Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel

WARSZAWA 2019

Streszczenie

Teoria gier jest matematycznym narzędziem, które służy do opisu sytuacji, w której jednostki (zwane graczami) podejmują decyzje i każdy z nich dąży do własnego celu, ale jego ostateczny wynik jest zależny od decyzji pozostałych graczy. Jednym z najważniejszych pojęć niekooperacyjnej teorii gier, będącym przedmiotem zainteresowania niniejszej rozprawy, jest pojęcie równowagi Nasha. Równowaga Nasha to taki profil strategii, zgodnie z którym każdy z graczy maksymalizuje własną wypłatę przy ustalonych strategiach pozostałych graczy. Zatem problem znalezienia równowagi Nasha wymaga rozwiązania układu zagadnień optymalizacyjnych powiązanych przez punkt stały w przestrzeni profili strategii.

W rozprawie przedstawione zostały dwa podejścia do teorii gier. Jedno z nich polega na wykazaniu istnienia równowagi Nasha dla pewnych klas gier, natomiast drugie na wyliczeniu równowagi Nasha.

W drugim rozdziale przedstawione zostały nowe, uproszczone dowody znanych twierdzeń o punktach stałych będących, w przypadku jednowartościowym, uogólnieniem twierdzenia Brouwera, a w przypadku wielowartościowym, uogólnieniem twierdzenia Kakutaniego.

W trzecim rozdziale znajdują się twierdzenia dotyczące uogólnień pojęcia punktu stałego. Twierdzenia te są warunkami dostatecznymi istnienia losowych punktów stałych, ϵ-punktów stałych i ϵ-losowych punktów stałych.

Ponadto w tym rozdziale sformułowane zostały dwie różne gry, a następnie w oparciu o twierdzenia udowodnione w pracy zostało wykazane istnienie równowagi Nasha w odpowiedniej postaci dla pewnej podklasy rozważanych gier.

W czwartym rozdziale rozprawy opisany i zweryfikowany został model wojen rybnych – gry dynamicznej eksploatacji wspólnego łowiska z dwoma gatunkami ryb zaproponowany przez Fischera i Mirmana. Model ten jest grą dynamiczną z nieskończonym horyzontem czasowym. Weryfikacja polega na wskazaniu problemów z niezdefiniowaną dynamiką systemu, znalezieniu warunków na stabilność układu bez ingerencji graczy oraz uzupełnieniu dowodu dotyczącego postaci równowagi Nasha, co jest możliwe tylko w jednym z trzech przypadków interakcji pomiędzy gatunkami.

W ostatnim rozdziale zaproponowane zostały dwie modyfikacje modelu Fischera-Mirmana. Pierwsza z nich sprowadza się do ograniczenia zbioru decyzji. Modyfikacja ta nie pozwala graczom na doprowadzenia do wymarcia żadnej z dwóch populacji ryb ani nawet zbieżności do zerowej biomasy. Druga z zaproponowanych modyfikacji jest związana z wprowadzeniem stanu minimalnego populacji. W literaturze fachowej analizowane zjawisko nazywane jest efektem Allee. Ten termin oznacza, że istnieje stan minimalny liczebności gatunku, poniżej którego populacja wymiera w skończonym czasie niezależnie od późniejszych zachowań graczy. Poszukiwanie równowagi Nasha w tak zmodyfikowanej grze prowadzi do skomplikowanej postaci równania Bellmana, ponieważ usunięcie wpływu jednej z populacji na dynamikę drugiej powoduje między innymi nieciągłość funkcji wartości, co istotnie komplikuje wyznaczenie maksimum prawej strony równania Bellmana. Dla tych dwóch modyfikacji zostało udowodnione kilka twierdzeń dotyczących postaci równowagi Nasha oraz funkcji wartości.

Słowa kluczowe: teoria gier, gry dynamiczne, równowaga Nasha, uogólnienia równowagi Nasha, uogólnienia punktów stałych, równanie Bellmana, warunek dostateczny.

Abstract

Game theory is a mathematical tool that is used to describe situations in which individuals (called players) make decisions, each of them in order to attain his own aim, whenever decisions made by the others may influence his objective. The main concept of noncooperative game theory, which is the main focal point of this thesis, is the Nash equilibrium. A Nash equilibrium is such a profile of strategies that each of players maximizes his payoff given strategies of the others. So, it is a set of optimization problems coupled by a fixed point in the space of strategy profiles.

This thesis includes two different approaches to game theory. One of them is devoted to proving existence of a Nash equilibrium in some classes of games, while the other one is concentrated on calculating a Nash equilibrium.

In the second chapter, simplified proofs of known theorems about fixed points have been shown, both in single-valued and multi-valued cases. The presented single-valued theorem is a generalization of the Brouwer theorem, while multi-valued theorem is a generalization of the Kakutani theorem.

In the next chapter, theorems connected with generalizations of fixed points have been proven. Those theorems state sufficient conditions for existence of random fixed points, ϵ-fixed points and ϵ-random fixed points.

Moreover, proven results have been applied in order to prove the existence of an equilibrium in an adequate form of games. Obviously, not every game has an equilibrium. So, existence theorems which we can apply to games provide conditions sufficient to obtain existence of an equilibrium in games.

In the fourth chapter of this thesis, a model of fish wars—a dynamic game modelling fishing in a common fishery with two species proposed by Fischer and Mirman has been introduced and verified. This model is a dynamic game with the infinite time horizon. This verification consists of indicating problems with undefined system dynamics, finding conditions for the stability of the system without the interference of players and the proof the profile proposed by Fischer and Mirman actually constitutes a Nash equilibrium, which is possible in one special case only.

In the last chapter, two modifications of the Fischer-Mirman model have been proposed. The first one is by bounding the set of decisions. This modification does not allow players to cause the extinction of any of the two fish populations or even to make it converge to the zero biomass. The second of the proposed modifications is connected with the introduction of the minimum sustainable population state. In professional literature, this phenomenon is called the Allee effect. This term denotes that there exists a minimal biomass of the species below which the population is going to get extinct in a finite time. Searching for the Nash equilibrium in such a modified game leads to a complicated form of the Bellman equation, because removing the influence of one of the species on the dynamic of the other species causes, among other things, discontinuity of the value function, which

makes finding the maximum of the right hand side of the Bellman equation substantially more complicated. For those two modifications, several theorems have been formulated stating the form of the Nash equilibrium and the value functions.

Keywords: game theory, dynamic games, Nash equilibrium, generalizations of Nash equilibria, generalizations of fixed points, Bellman equation, sufficient conditions.