

dr hab. Michał Jasiczak, Prof. UAM                      Poznań, 30 marca 2022  
Wydział Matematyki i Informatyki  
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ PANA MGR. TOMASZA  
ŁUKASZA ŻYNDY PT. 'SELECTED REPRODUCING KERNELS:  
ADMISSIBLE WEIGHTS AND DEPENDENCE ON PARAMETERS'.

Pan mgr Tomasz Łukasz Żynda przedstawił rozprawę doktorską pod tytułem 'Selected Reproducing Kernels: Admissible Weights and Dependence on Parameters'. Rozprawa liczy 76 stron. Składa się ona z wprowadzenia, trzech rozdziałów oraz bibliografii. Praca napisana jest w języku angielskim. Wyniki przedstawione w rozprawie ukazały się w trzech artykułach opublikowanych w *Annales Mathematicae Silesianae* [3], *Geometric Methods in Physics* [4] oraz *Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)* [5]. Pan mgr Żynda jest także współautorem razem z profesorem Pasternakiem-Winiarskim, promotorem rozprawy, rozdziału w książce *Geometric Methods in Physics XXXV* [2].

Rozpocznę od omówienia zawartości pracy. Rozdział pierwszy zawiera definicję przestrzeni Hilberta z jądrem reprodukującym. Sformułowana jest także ważna dla pracy własność minimum unormowanych jąder reprodukujących. Rozdział drugi zatytułowany jest *Kernels of Malyshev type*. Dotyczy on jąder reprodukujących przestrzeni Hilberta rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych (jednostajnie) eliptycznych. Jest pokazane, że odpowiednie jądra istnieją. Dowód wykorzystuje regularność równań eliptycznych oraz metody teorii przestrzeni Sobolewa. W rozdziale tym badana jest zależność jąder od wagi definiującej normę przestrzeni. Wynik ten uogólnia poprzedni rezultat Pasternaka-Winiarskiego [1]. Badana jest także zależność jąder reprodukujących w przypadku rosnącego ciągu obszarów. Uzyskane wyniki uogólniają klasyczny wynik Ramadanova z 1967 roku. Autor dyskutuje także szczególny przypadek przestrzeni funkcji harmonicznych, podaje przykład przestrzeni, w której jądro reprodukujące nie istnieje.

Rozdział trzeci dotyczy teorii jąder analogicznych do jąder Szegö. Badany jest przypadek przestrzeni ważonych. Rozważana jest sytuacja ogólniejsza niż pojawiająca się w literaturze – wagi nie muszą być ciągłe. W omawianym rozdziale podane są warunki gwarantujące istnienie jąder typu Szegö, omówiony jest przypadek wagi, dla której jądro reprodukujące nie istnieje. Wreszcie badana jest zależność jąder i odpowiednich przestrzeni od wag.

Podstawową zaletą recenzowanej pracy jest naturalność badanego problemu. Muszę przyznać, że było dla mnie sporym zaskoczeniem, że wyniki uzyskane przez mgra Żyndę nie były poprzednio znane. Nie tylko rozważane zagadnienie, ale także uzyskane wyniki są bardzo naturalne i dlatego ważne. Podobała mi się analiza przypadku rosnącego ciągu obszarów. **Niestety Pan mgr Żynda nie ustrzegł się pewnych usterek.** Niektóre z nich zostały poprawione w listach, które otrzymałem. Jednak nie wszystkie. Na przykład w Twierdzeniu 2.11 Autor rozważa przypadek malejącego ciągu obszarów  $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ . W ogólności przekrój malejącego ciągu zbiorów otwartych nie jest zbiorem otwartym. Na przykład wtedy, gdy  $U_1 \supset \bar{U}_2 \supset U_2 \supset \dots$  część wspólna będzie zbiorem domkniętym. Nie jest więc dla mnie jasne, jaką sytuację opisuje omawiane twierdzenie.

Mam także zastrzeżenia do języka pracy. Pan mgr Żynda zupełnie ignoruje zasady użycia przedimków w języku agnielskim.

Moja ogólna konkluzja jest jednak pozytywna. Uważam, że recenzowana rozprawa doktorska prezentuje wystarczającą wiedzę teoretyczną kandydata oraz pokazuje umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. Pan mgr Żynda samodzielnie rozwiązał problemy pojawiające się w teorii przestrzeni Hilberta z jądrami reprodukującymi. Rozważane zagadnienia są naturalne, podobnie jak udowodnione twierdzenia. Rozprawa doktorska mgra Żyndy spełnia w stopniu wystarczającym wymagania stawiane dysertacjom doktorskim.

#### LITERATURA

- [1] Z. Pasternak-Winiarski, On the dependence of the reproducing kernel on the weight of integration, *J. Funct. Anal.* **94** (1990), 110–134.
- [2] Z. Pasternak-Winiarski, T. Ł. Żynda, Weighted Szegő kernels. Geometric methods in physics XXXV, 145–151, *Trends Math.*, Birkhäuser/Springer, Cham, 2018.
- [3] T. Ł. Żynda, Reproducing kernels of square-summable sequences Hilbert spaces, *Annales Mathematicae Silesianae* **33** (2019), 298–305.
- [4] T. Ł. Żynda, Weighted generalization of the Szegő kernel and how it can be used to prove general theorems of complex analysis. Geometric methods in physics XXXVII, 212–218, *Trends Math.*, Birkhäuser/Springer, Cham, 2019.
- [5] T. Ł. Żynda, On weights which admit reproducing kernel of Szegő type. *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat.* 55 (2020), no. 5, 51–61; reprinted in *J. Contemp. Math. Anal.* 55 (2020), no. 5, 320–327.