



21 maja 2018

Prof. dr Włodzimierz Bryc
Tel: (513) 556 4098
email: brycwz@ucmail.uc.edu

McMicken College of Arts & Sciences
Department of Mathematical Sciences

University of Cincinnati
P O Box 210025
Cincinnati OH 45221-0025

Phone: (513) 556-4050
Fax: (513) 556-3417
Email: office@math.uc.edu

Recenzja rozprawy doktorskiej pana mgr Marcina Świecy pt.
Grupa Heisenberga, pary Gelfanda i związane z nimi klasyczne procesy Markowa

Zawartość rozprawy. Rozprawa bada klasyczne procesy markowskie, które powstają z odpowiednio wybranych przemiennych podgrup w C^* -algebrze grupowej grupy lokalnie zwartej. Tematyka ta wymaga dużej dojrzałości matematycznej: znajomości par Gelfanda związanych z grupą Heisenberga, półgrup kontrakcji na C^* algebrze grupy ilorazowej, a przede wszystkim teorii algebr Jordana i ich funkcji sferycznych.

Rozprawa składa się ze wstępu i czterech rozdziałów. Rozdział pierwszy zawiera wiadomości wstępne z literatury. Jest to rozdział obszerny, bo rozprawa używa wielu pojęć i wyników zebranych z kilku monografii oraz z wielu publikacji z lat 1987-2007. Ale nawet w materiałach pochodzących z monografii pojawiają się nowości, takie jak nietrywialne wyliczenie stałej c_0 w twierdzeniu 1.2.46 za pomocą całki Selberga. W rozdziale tym udowodnione jest też ważne i nietrywialne Twierdzenie 1.4.2, które utożsamia zbiór funkcji U -sferycznych z podzbiorem \mathbb{R}^{r+1} . To utożsamienie odgrywa podstawową rolę w pozostałej części rozprawy.

W rozdziale drugim rozprawy badane są kwantowe procesy Bessela związane z algebrami Jordana. Procesy te są wielowymiarowymi uogólnieniami procesów wprowadzonych przez P. Biane w 1996 r. Głównym wynikiem rozdziału jest jawny opis półgrupy jąder markowskich na wachlarzu Heisenberga podany w Twierdzeniu 2.1.1. Dowód poprzedzony jest kilkoma uwagami, które podają intuicyjny opis procesu. Sam dowód jest nietrywialny i wymaga kilku dodatkowych lematów, które dla przejrzystości prezentacji są słusznie przeniesione do pod-rozdziału 2.4. W dalszej części rozdziału badany jest związek wielowymiarowego procesu Bessela z tzw. kwadratowymi harnessami. Twierdzenie 2.2.1 pokazuje jak z procesu Bessela można otrzymać kwadratowy harness i jest to nowy wynik również w przypadku jednowymiarowym ($r = 1$) badanym przez P. Biane. Kwadratowe harnessy są blisko związane z wielomianami martyngałowymi jednej zmiennej,

ale dość nieoczekiwanie okazuje się, że można znaleźć wielomiany wielu zmiennych, które dają martyngały względem kwantowego procesu Bessela. Twierdzenie 2.3.8 podaje konstrukcję takich wielomianów, używając uogólnionych wielomianów Meixnera skonstruowanych przez Shibukawę w 2016 r. W Twierdzeniu 2.3.9 autor dowodzi, że tak skonstruowane wielomiany są również ortogonalne. Rozdział kończy seria lematów, które potrzebne były w dowodach. Są tu również ciekawe wzory, jak na przykład identyczność typu splotowego dla uogólnionych współczynników dwumianowych z Wniosku 2.4.8, którą autor później zresztą wykorzystuje w dowodach w rozdziale 4.

Rozdział trzeci rozszerza wyniki z rozdziału drugiego na przypadek grupy Heisenberga opartej na macierzach prostokątnych. W tym przypadku funkcje U -sferyczne są znane z prac Faraut z 2010 r. oraz z nieopublikowanego preprintu Faraut i Wakayamy z 2013 r. Twierdzenia 3.01, 3.02, 3.03, 3.06 i 3.07 są odpowiednikami twierdzeń 1.4.2, 2.1.1, 2.2.1, 2.3.8 i 2.3.9. Dowody są słusznie tylko naszkicowane lub zupełnie pominięte ze względu na ich podobieństwo do dowodów analogicznych twierdzeń w rozdziale drugim.

Rozdział czwarty bada procesy markowskie na partycjach z intensywnościami przejścia zadanymi jako uogólnione współczynniki dwumianowe prostej euklidesowej algebry Jordana. Twierdzenie 4.1.1 podaje rozwiązanie równania retrospektywnego Kołmogorowa dla czystego procesu śmierci na partycjach, a Twierdzenie 4.1.2 podaje rozwiązanie równania prospektywnego Kołmogorowa dla czystego procesu urodzin na partycjach. Indukcyjne dowody korzystają z identyczności dla partycji wyprowadzonych w rozdziale drugim.

Podrozdział 4.2 wyjaśnia jak wyniki w tej części rozprawy powiązane są z procesami markowskimi badanymi w pracy P. Biane z 1998 r. Okazuje się, że korzystając z probabilistycznych intuicji i języka uogólnionych współczynników dwumianowych autor rozprawy podał kompletne wzory na intensywności przejścia, które P. Biane wyznaczył tylko w szczególnym przypadku. To jest bardzo ładny wynik!

Rozprawę kończą jawne przykłady uogólnionych współczynników dwumianowych dla algebry Jordana macierzy hermitowskich i dla stożka Lorentza. Wzory podane w Przykładzie 4.3.2. uogólniają wyżej wymieniony wzór z pracy Biane na dowolne $n \geq 2$.

Ocena wyników. Podjęta tematyka badań wymaga imponującej erudycji matematycznej i znajomości literatury. Autor wykazał głęboką znajomość teorii funkcji sferycznych w algebrach Jordana, z pomocą których uzyskał w rozpra-

wie szereg ciekawych i trudnych wyników, i jest już specjalistą w tej tematyce na poziomie światowym. Wyniki uzyskane w rozdziale drugim są niezwykle imponujące i wymagają pełnej operacyjnej znajomości wielu zaawansowanych technik matematycznych. Wyniki uzyskane w rozdziale czwartym są po prostu urocze, podają elementarną odpowiedź na pytanie, którego Biane nie potrafił do końca rozwikłać.

Redakcja rozprawy. Rozprawa jest zredagowana niezwykle starannie. Trudne do prezentacji techniczne wyniki są przedstawione w rozprawie w sposób czytelny i (w miarę) przystępny. Autor włożył wiele wysiłku i poświęcił sporo czasu uzupełniając sformułowania twierdzeń i dowody komentarzami wyjaśniającymi interpretacje wyników i motywacje. Znalazłem w pracy zaledwie parę, i tylko nie-matematycznych, literówek, które nie wpływają na jakość prezentacji:

Str 79⁷: Twierdzenie 3.06 powinno być Twierdzenie 2.3.8

Str 83₉: Kołomogorowa powinno być Kołmogorowa

Str 84₅: Definicja 1.2.6 powinna być Definicja 1.2.35

Konkluzja. Uważam, że recenzowana rozprawa spełnia z nadmiarem wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim. Autor wykazał się szeroką wiedzą matematyczną zebraną z wielu źródeł. Rozprawa jest zredagowana wyjątkowo starannie i zawiera szereg trudnych wyników, które uzupełniają i rozszerzają badania bardzo mocnego matematyka francuskiego Philippe Biane.

Wnoszę o przyjęcie rozprawy z wyróżnieniem, oraz o dopuszczenie mgra Marcina Świecy do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

W Biane