Janusz Wysoczański
Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego
pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław

Wrocław, 14.05.2018 r.

Recenzja Rozprawy Doktorskiej mgr Marcina Świecy zatytułowanej
"Grupa Heisenberga, pary Gelfanda i związane z nimi klasyczne procesy Markowa"

1. Uwagi ogólne

Omawiana rozprawa doktorska została napisana pod kierunkiem dr hab. Wojciecha Matysiaka. Dotyczy konstrukcji kwantowych procesów Bessela na (uogólnionych) grupach Heisenberga związanych z prostymi algebrami Jordana oraz ich obcięć do przemiennych podalgebr pochodzących od par Gelfanda. Rozprawa składa się ze Wstępu, zawierającego ogólny opis jej celu, oraz 4 Rozdziałów zatytułowanych: Rozdział 1 "Wiadomości wstępne", Rozdział 2 "Kwantowe procesy Bessela związane z algebrami Jordana", Rozdział 3 "Kwantowy proces Bessela związany z przestrzenią macierzy prostokątnych" i Rozdział 4 "Procesy urodzin i śmierci na partycjach". Całość liczy 95 stron i jest poprzedzona Streszczeniem (w języku polskim oraz w języku angielskim pod nazwą Abstract). Rozdział 1 zawiera szczegółową prezentację podstawowych pojęć, własności i konstrukcji, które służą do sformułowania i dowodzenia głównych wyników rozprawy. Są to w szczególności informacje dotyczące analizy harmonicznej na grupach lokalnie zwartych i konstrukcji par Gelfanda dających dwustronnie niezmiennicze, przemienne C^*-algebry oraz opis działania pewnych całkowicie dodatnich kontrakcji po obcięciu do takich algebr przemiennych. W szczególności obcięcie to jest zadane przez półgrupę prawdopodobieństw przejścia uzyskanych procesów.

W dalszej części opisane są własności algebr Jordana i ich podstawowe charakterystyki (t.j. rząd oraz wymiar Pierce'a) oraz podstawowe funkcje takie jak ślad i wyznacznik. Opisana jest też dokładnie struktura prostych euklidesowych algebr Jordana wraz z ich klasyfikacją i związkami ze stożkami dodatnimi. Omówione są także konstrukcje wielomianów sferycznych algebry Jordana oraz funkcji sferycznych odpowiadającego jej stożka dodatniego. To pozwala wprowadzić uogólnione wielomiany Laguerre'a, będące ważnym narzędziem do uzyskania wzorów na szukane prawdopodobieństwa przejścia konstruowanych procesów.

2. Opis wyników Rozprawy

Głównym obiektem badań Autora są uogólnione grupy Heisenberga postaci $H = W \times \mathbb{R}$, gdzie W jest kompleksyfikacją prostej eukliesowej algebry Jordana. Dla funkcji $\psi(w,s) := -is - \frac{\|w\|^2}{2}$, gdzie $(w,s) \in H$, Autor rozważa półgrupę $(Q_t)_{t\geq 0}$ określoną na $L^1(H)$ wzorem $(Q_t f)(w,s) := \exp[t\psi(w,s)]f(w,s)$, która – jak pokazał Biane – rozszerza się do półgrupy kontrakcji całkowicie dodatnich na (pełnej) C^*-algebrze grupowej $C^*(H)$ (ponieważ funkcja mnożnikowa $H \ni (w,s) \mapsto \exp[t\psi(w,s)]$ jest dodatnio określona na H dla dowolnego parametru $t \geq 0$). Ta półgrupa jest uogólnieniem półgrupy splotowej ciepła (dla $W = \mathbb{R}^n$), co pozwala zdefiniować i rozważać nieprzemienny ruch Browna na zadanej grupie Heisenberga. W klasycznym przypadku część radialna ruchu Browna jest procesem Bessela, więc naturalnym jest pytanie o analogiczną radialność (czyli niezmienniczość na działanie grupy ortogonalnej czy unitarnej) dla grupy Heisenberga. To zagadnienie zostało zbadane przez Biana w 1996r. w przypadku $W = \mathbb{C}^n$, czyli dla $H = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$.

Wyniki Biana stanowią główną motywację uogólnień rozważanych przez Autora w niniejszej rozprawie, w której W jest prostą euklidesową algebrą Jordana. Struktura takiej algebry dostarcza podgrupę przekształceń unitarnych $U \subset U(W)$, będących jednocześnie elementami grupy strukturalnej algebry W (wyznaczonej przez pewien warunek splatania związany z reprezentacją kwadratową postaci $P(x) := 2L(x)^2 - L(x^2)$, gdzie $L(x)y = xy$ dla $x, y \in W$). Wówczas $(U \ltimes H, U)$ jest parą Gelfanda co oznacza, że funkcje U-niezmiennicze, to znaczy spełniające warunek $f(w, s) = f(uw, s)$ dla $u \in U$, tworzą przemienną $*$-podalgebrę w $C^*(H)$. Generowana przez nie C^*-podalgebra jest izomorficzna z $C_0(\Sigma)$ gdzie Σ stanowi spektrum (przestrzeń Gelfanda) tej algebry – są to tak zwane *funkcje sferyczne*, które zostały opisane przez Diba przy pomocy wspomianych powyżej uogólnionych wielomianów Laguerre'a. Autor wykorzystuje równoważny opis tego spektrum (Twierdzenie 1.4.2) przy pomocy partycji liczb naturalnych Σ' (jest to nazwane *wielowymiarowym wachlarzem Heisenberga*). Dowód tego Twierdzenia wykorzystuje własności operatorów różniczkowych na H niezmienniczych na działanie grupy U, dla których funkcje sferyczne są wektorami własnymi. Na tak opisanym spektrum w klarowny sposób daje się opisać trajektorie uzyskanego *kwantowego* procesu Bessela. Ten proces powstaje przez obcięcie półgrupy kontrakcji $(Q_t)_{t\geq 0}$ do półgrupy całkowicie dodatnich kontrakcji na przemiennej C^*-podalgebry utożsamianej z $C_0(\Sigma)$, dla której podana jest jawna postać półgrupy $(q_t(x, dy))_{t\geq 0}$ prawdopodobieństw przejścia klasycznego procesu Markowa nazwanego (przez Biane'a) *kwantowym procesem Bessela*. Stanowi to treść głównego wyniku Rozprawy, czyli Twierdzenia 2.1.1, w którym podano jawne wzory w zależności od rozważanej prostej euklidesowej algebry Jordana (jest ich pięć, i podane one zostały w Tabeli 2 wraz z odpowiednimi grupami U). Dowód tego Twierdzenia, poza dość obszernymi przygotowaniami zawartymi w Rozdziale 1, wymagał sprawnego wykorzystywania uogólnionych wielomianów Laguerre'a, uogólnionej funkcji Bessela oraz własności wielomianów sferycznych i świadczy o dojrzałości matematycznej Autora, a także o jego bardzo dobrych podstawach teoretycznych do przeprowadzenia powyższej konstrukcji i opisu jej własności.

W szczególności w Podrozdziale 2.2 Autor pokazuje dodatkowo, że uzyskany kwantowy proces Bessela jest także (po odpowiednim przeskalowaniu i wysumowaniu) kwadratowym harnessem (typu bi-Poissona), które to procesy były (i nadal są) intensywnie badane, szczególnie przez Włodka Bryca i Jacka Wesołowskiego, także we współpracy z Promotorem tej Rozprawy. Opierając się na ich wynikach Autor konstruuje, przy pomocy wielowymiarowych wielomianów Meixnera (zdefiniowanych dla prostych euklidesowych algebr Jordana przez Shibukawę) i uogólnionych wielomianów Laguerre'a, odpowiednie wielomiany martyngałowe $G_{\mathbf{m}}(x, t)$ (indeksowaną partycjami $\mathbf{m}$), dla których proces $\{G_{\mathbf{m}}(\mathbf{X}_{t+a}, t)_{t\geq 0}\}$, startujący z $a < 0$ jest martyngałem (Twierdzenie 2.3.8). Pokazana też jest ortogonalność rodziny tych wielomianów (Twierdzenie 2.3.9).

W Rozdziale 3 rozważana jest (uogólniona) grupa Heisenberga postaci $H = W \times \mathbb{R}$, gdzie $W = \mathbb{M}_{m\times p}(\mathbb{C})$ jest przestrzenią zespolonych macierzy prostokątnych o m wierszach i p kolumnach, której struktura nie pochodzi od prostej euklidesowej algebry Jordana. Mimo to analogiczne rozumowania jak poprzednio okazują się skuteczne w przypadku rozpatrywania unitarnej podgrupy $U := U(m) \times U(p) \subset U(W)$, działającej na W poprzez sprzęganie $w \mapsto uwv^*$ dla $w \in W$, $u \in U(m)$ oraz $v \in U(p)$. W tym wypadku w definicji funkcji mnożnikowej ψ można użyć dowolnej normy U-niezmienniczej, z których najbardziej naturalną jest $\|w\| := \sqrt{\|ww^*\|}$ (Autor nie podaje tego jednak wprost). Ponieważ $ww^* \in \mathrm{Herm}(m, \mathbb{C})$, ta norma pozwala wykorzystać aparat związany z tą właśnie jordanowską algebrą. Także w tym przypadku powstaje para Gelfanda $(U \ltimes H, U)$ która prowadzi do klasycznego procesu Markowa na spektrum przemiennej C^*-algebry generowanej przez funkcje U-niezmiennicze. Kluczowym, jak i wystarczającym, jest wykorzystanie narzędzi dostępnych dla stożka dodatniego algebry Jordana $\mathrm{Herm}(m, \mathbb{C})$, czyli zespolonych macierzy dodatnio określonych wymiaru m. Pozwala to opisać powyższe spektrum analogicznie do porzypadku jordanowskiego i udowodnić opis półgrupy prawdopodobieństw przejścia (Twierdzenie 3.0.2), związki z kwadratowymi harnessami (Twierdzenie 3.0.3) oraz skonstruować wielomiany martyngałowe (Twierdzenie 3.0.6), jak w konstrukcji z Rozdziału 2.

W Rozdziale 4 Autor rozważa dwa klasyczne procesy: śmierci i urodzin, zdefiniowne na partycjach. Następnie, dla grupy Heisenberga $H := \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, definiuje półgrupy kontrakcji $(R_t^+)_{t>0}$ oraz $(R_t^-)_{t>0}$, które po obcięciu do obrazu niezmienniczej przemiennej C^*-algebry, pochodzącej od pary Gelfanda (takiej jak w Rozdziale 2), przez odpowiednią fockowską reprezentację grupy H, dają dwa klasyczne procesy Markowa na jej spektrum, utożsamianym ze zbiorem partycji ustalonej liczby. Autor pokazuje, że te dwa procesy są właśnie procesami śmierci dla $(R_t^+)_{t>0}$ i urodzin dla $(R_t^-)_{t>0}$.

3. Uwagi

Rozprawa jest napisana w sposób bardzo czytelny. Rozdział 1 doskonale wprowadza wszelkie niezbędne narzędzia, pojęcia i opisuje ich własności. Widać, że Autor świetnie opanował wiedzę z analizy harmonicznej grup Heisenberga oraz teorii algebr Jordana, umie to wykorzystać zarówno do konstrukcji spektrum Σ rozważanej przemiennej C^*-algebry (i jego odpowiedniego obrazu Σ'), jak i do obliczania prawdopodobieństw przejścia konstruowanych kwantowych procesów Bessela (a także procesów urodzin i śmierci). W prawie stustronicowym tekście są jedynie nieliczne drobne błędy w odwołaniach do definicji czy wzorów, co świadczy o staranności w przygotowaniu Rozprawy. Jako recenzent miałem przyjemność w jej czytaniu i ocenie. W szczególności uważam, że jest to bardzo dobra i ciekawa Rozprawa. Część jej wyników została opublikowana, wspólnie z Promotorem, w dwóch bardzo dobrych czasopismach: International Mathematisc Research Notices (2017) oraz Stochastic Processes and Their Appllications (2015), pozostałe wyniki, samodzielne Autora, z pewnością zostaną wkrótce także opublikowane. Nie mam najmniejszych wątpliwości, że mgr Marcin Świeca zasługuje na tytuł doktora matematyki. Rozprawa ta bez wąpienia zasługiwałaby na wyróżnienie, gdyby wyniki były uzyskane samodzielnie przez Autora.

4. Konkluzja

Uważam, że spełnione są wymagania ustawowe i zwyczajowe dotyczące przewodów doktorskich i w związku z tym wnioskuję o dopuszczenie Pana mgr Marcina Świecy do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Proponuję także rozważyć kwestię wyróżnienia Rozprawy, jeśli ewentualne wyjaśnienia Promotora w kwestii wkładu własnego mgr Marcina Świecy we wspólne wyniki będą to uzasadniały.

Janusz Wysoczański

JWysocz