AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko: Anna Zamojska-Dzienio

2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:

- stopień naukowy doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki,
  Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, 2004,
  tytuł rozprawy doktorskiej: *Embedding modes into semimodules* (praca w języku angielskim, rozprawa wyróżniona),
  promotor: prof. dr hab. Anna Romanowska
- dyplom magistra inżyniera na kierunku Matematyka,
  Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej Politechniki Warszawskiej (od 1999 r. Wydział MiNI PW), 1998,
  tytuł pracy magisterskiej: *Osobliwości kształtów minimalnych. Wzrost kryształów*,
  promotor: prof. dr hab. Stanisław Janeczko

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:

- od 2004 adiunkt
  Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
  Politechnika Warszawska
- 1998-2003 doktorant
  Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej
  Politechnika Warszawska
- 1997 - 1998 asystent stażysta
  Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej
  Politechnika Warszawska

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz.U. Nr 65, poz. 595 ze zm.):

Tytuł osiągnięcia naukowego:
O kratach wypukłości i złożoności problemu Birkhoffa–Mal'ceva

Cykl publikacji wchodzących w skład rozprawy:

[**H1**] M.V. Semenova, A. Zamojska-Dzienio, *On lattices embeddable into lattices of order-convex sets. Case of trees*, Internat.J.Algebra Comput. **17**(8) (2007), 1667–1712. (w spisie literatury pozycja [85])

[**H2**] M.V. Semenova, A. Zamojska-Dzienio, *On lattices embeddable into lattices of order-convex sets II. Star-like posets*, Order **28**(3) (2011), 523–548. (w spisie literatury pozycja [87])

[**H3**] M.V. Semenova, A. Zamojska-Dzienio, *Lattices of order-convex sets of forests*, Order **27**(3) (2010), 383–404. (w spisie literatury pozycja [86])

[**H4**] M.V. Semenova, A. Zamojska-Dzienio, *Lattices of subclasses*, Siberian Mathematical Journal **53**(5) (2012), 889–905 (translated from Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, Vol. 53, No. 5, pp. 1111–1132, September-October, 2012). (w spisie literatury pozycja [88])

[**H5**] M. Schwidefsky (M.V. Semenova), A. Zamojska-Dzienio, *Lattices of subclasses. II*, Internat.J.Algebra Comput. **24**(8) (2014), 1099–1126. (w spisie literatury pozycja [80])

Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników:

O kratach wypukłości i złożoności problemu Birkhoffa–Mal'ceva

1. Wstęp

Głównym obiektem badań w przedstawionej rozprawie są kraty dwóch rodzajów: kraty wypukłości oraz Q-kraty. Te dwa typy krat są związane pośrednio i bezpośrednio z *problemem Birkhoffa–Mal'ceva.* Podstawowym celem prac, które składają się na rozprawę jest kontynuacja badań krat wypukłości oraz potwierdzenie strukturalnej złożoności Q-krat, czyli potwierdzenie trudności w uzyskaniu pełnego i zadowalającego rozwiązania problemu Birkhoffa–Mal'ceva. Inne wyniki uzyskane w tych pięciu pracach dotyczą głównie badania krat podklas (aksjomatyzowalnych względnie) i będą w narracji niniejszego autoreferatu przedstawione jako drugoplanowe.

Systemem algebraicznym nazywamy niepusty zbiór razem z rodziną operacji i relacji na nim zdefiniowanych. Będzie to *algebra*, jeśli dopuścimy tylko operacje, zaś *system relacyjny*, gdy dopuścimy tylko relacje. Rozważamy tylko klasy zamknięte ze względu na izomorficzne kopie. Klasę systemów algebraicznych tego samego typu zamkniętą ze względu na branie podsystemów, produktów prostych oraz ultraproduktów nazywamy *quasirozmaitością.* Oczywiście, każda rozmaitość jest quasirozmaitością. Możemy także powiedzieć, że quasirozmaitość to klasa definiowalna przez *quasirówności* (pewnego rodzaju implikacje), podobnie jak rozmaitość to klasa definiowalna przez równości. Zbiór $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ wszystkich quasirozmaitości zawartych w danej quasirozmaitości $\mathbf{K}$ uporządkowany przez relację inkluzji tworzy kratę zupełną nazywaną *kratą quasirozmaitości.*

W 1966 r. A. I. Mal'cev w [50] sformułował następujące pytanie:

Pytanie 1.1. *Które kraty mogą być reprezentowane jako kraty quasirozmaitości?*

Podobny problem został także podany przez G. Birkhoffa w [14] w 1945 r. Od końca lat 90-tych zaczęto używać nazwy *problem Birkhoffa–Mal'ceva.* Jest to jeden z najstarszych i najtrudniejszych problemów otwartych w teorii krat.

Kraty izomorficzne z kratami quasirozmaitości nazywa się Q-kratami. Pytanie 1.1 można więc sformułować krótko: *które kraty są Q-kratami?* W książce V. A. Gorbunova [29, Chapter 5] oraz pracy przeglądowej M. Adamsa, K. Adarichevej, W. Dziobiaka i A. Kravchenki [1] opisano różne rezultaty otrzymane dla Q-krat w związku z poszukiwaniem odpowiedzi na to pytanie. Warto też spojrzeć na imponujące listy bibliograficzne umieszczone w tych źródłach. G. Grätzer w *Epilogu* do wydania z 2008 r. swojej książki *Universal Algebra. Second Edition* wymienia pięć głównych kierunków rozwoju algebry uniwersalnej w ciągu czterdziestu lat, które upłynęły od pierwszego wydania. Pierwszym z nich jest *teoria quasirozmaitości*, a w niej jako siłę napędzającą badania G. Grätzer podaje problem Birkhoffa–Mal'ceva.

W następnym rozdziale przedstawimy pewne historyczne pozytywne rozwiązania problemu Birkhoffa–Mal'ceva dla wybranych klas krat oraz przedstawimy motywację do badania krat wypukłości w tym kontekście. Następnie, w kolejnych rozdziałach, skupimy się na następujących aspektach: kraty wypukłości (prace [H1]-[H3]), złożoność problemu Birkhoffa–Mal'ceva (praca [H5]) oraz kraty klas względnie aksjomatyzowalnych (praca [H4]).

W pracach [H1] i [H2] opisano kraty, które zanurzają się w kraty wypukłości dla pewnych klas zbiorów uporządkowanych (są to właściwe podklasy klasy tzw. N-wolnych podzbiorów uporządkowanych). M.in. znaleziono syntaktyczną charakteryzację klas takich krat, która pokazała, że są to rozmaitości lub (dla skończonych krat) pseudorozmaitości krat. W pracy [H3] badano klasę krat (izomorficznych z kratami) wypukłości dla zbiorów uporządkowanych, które są *lasami*, i również dokładnie je scharakteryzowano. Oczywiście, uwzględniając Twierdzenie Birkhoffa (**HSP**), nie mogły to być rozmaitości, ale są to klasy definiowalne przez skończony zbiór zdań pierwszego rzędu.

Praca [H5] poświęcona jest badaniom własności algebraicznych i obliczeniowych krat podklas względnych. Badanie Q-krat pod kątem ich algorytmicznej złożoności zainicjował A. M. Nurakunov w [55] (zob. też Twierdzenie 4.3 w rozdziale 4. niniejszej rozprawy). Jego wyniki pokazują, że istnieją Q-kraty L, dla których problem, czy dana krata skończona zanurza się w L jest algorytmicznie nierozwiązywalny. Potwierdza to, że

problem Birkhoffa–Mal'ceva w swoim ogólnym sformułowaniu jest strukturalnie złożony bardziej niż dotychczas sądzono. Głównym celem pracy [H5] było zbadanie związków między dwoma miarami skomplikowania krat podquasirozmaitości *względnych*, w tym także Q-krat: znaną wcześniej Q-uniwersalnością (wprowadzoną przez M. V. Sapira [77], zob. też Definicja 4.1) a nierekurencyjnością (*własnością Nurakunova* wyrażoną w Twierdzeniu 4.3). W [H4] i [H5] uprościłyśmy metody stosowane przez A. M. Nurakunova w [55] i opracowałyśmy bardziej uniwersalną metodę dowodu, opierającą się na reprezentacji krat podquasirozmaitości względnych za pomocą krat podsystemów. W szczególności, w [H5] otrzymałyśmy, że klasa $\mathbf{K}(\sigma)$ wszystkich systemów algebraicznych ustalonego typu σ jest Q-uniwersalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w niej podklasa $\mathbf{K}$ taka, że problem, czy dana krata skończona zanurza się w kratę $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ podquasirozmaitości względnych jest algorytmicznie nierozwiązywalny, zob. Twierdzenie 4.10.

W pracy [H4] badano różne kraty podklas dla prerozmaitości, czyli klas zamkniętych ze względu na branie podsystemów i produktów prostych. W szczególności, dzięki wypracowanym tam metodom, znaleziono krótki i bezpośredni dowód znanego twierdzenia V. A. Gorbunova i V. I. Tumanova [31, Theorem 2.3], że krata podzbiorów algebraicznych dowolnej kraty algebraicznej jest Q-kratą.

Narracja jest prowadzona z ograniczeniem technicznych definicji, żeby uczynić rozprawę wygodniejszą do czytania. Wszystkie potrzebne pojęcia można znaleźć w rozdziale 6. autoreferatu (str. 16–19).

2. Półdystrybutywność, geometrie wypukłe i Q-kraty

Każda Q-krata jest *sumowo półdystrybutywna* (V. I. Igoshin [38] lub V. A. Gorbunov [26]) to znaczy spełnia następującą quasirówność:

$$\forall xyz \;\; x \vee y = x \vee z \longrightarrow x \vee y = x \vee (y \wedge z).$$

Kraty sumowo półdystrybutywne odgrywają ważną rolę w teorii krat, jej dokładne omówienie można znaleźć w książce R. Freese'a, J. Ježka i J. B. Nationa [23] lub, z najświeższych źródeł, w rozdziałach napisanych przez K. Adarichevą i J. B. Nationa [9] do drugiego tomu *Lattice Theory: Special Topics and Applications* (ed. G. Grätzer i F. Wehrung).

Wiadomo jednak również, że Q-kraty są kratami atomowymi (w każdym przedziale $[0, a]$, gdzie $a > 0$, istnieje atom) i dualnie algebraicznymi (krata z dualnym porządkiem jest algebraiczna), co oznacza, że nie każda krata sumowo półdystrybutywna jest Q-kratą. W 1980 r. V. A. Gorbunov i V. I. Tumanov [31] pokazali, że quasirozmaitość $\mathbf{SD}^{\vee}$ wszystkich krat sumowo półdystrybutywnych jest generowana przez klasę wszystkich Q-krat. Z jednej strony możemy więc zawęzić poszukiwanie Q-krat do quasirozmaitości $\mathbf{SD}^{\vee}$, a z drugiej - wyniki osiągnięte dla Q-krat były ważnym źródłem inspiracji w badaniach krat sumowo półdystrybutywnych [7].

W 1979 r. V. A. Gorbunov i D. M. Smirnov [30] postawili pytanie: *Czy każda skończona krata sumowo półdystrybutywna jest Q-kratą?* Negatywnej odpowiedzi udzielił w 1987 r. W. Dziobiak [21] dzięki znalezieniu następującego ograniczenia na liczbę atomów w Q-kracie: *Suma dowolnych n atomów w Q-kracie zawiera co najwyżej $2^n - 1$ atomów.* Należy tutaj nadmienić, że pytanie Gorbunova i Smirnova nie było dalekie od pozytywnej odpowiedzi. Wiadomo było bowiem, że:

(1) Każda skończona krata sumowo półdystrybutywna zanurza się w pewną Q-kratę (wykład Gorbunova z 1985 r. cytowany w [21]; pełny dowód [7, Remark 2.10]);

(2) Każda skończona krata dystrybutywna jest Q-kratą (V. I. Tumanov [91]).

Warunek Dziobiaka został następnie wykorzystany przez K. Adarichevą i V. A. Gorbunova do zdefiniowania *operatora domknięcia równościowego*, który okazał się być jednym z najważniejszych narzędzi w badaniu Q-krat. W 1989 r. Adaricheva i Gorbunov [6] wykorzystali ten operator do rozwiązania problemu Birkhoffa–Mal'ceva w klasie wszystkich krat wypukłości (o tym napiszemy więcej w następnym rozdziale). Z kolei w dwóch pracach z 1993 r. (dla krat skończonych [4]) i 1997 r. (ogólnie [5]) Adaricheva, Dziobiak i Gorbunov rozwiązali problem Birkhoffa–Mal'ceva w klasie wszystkich algebraicznych krat atomistycznych (każdy element jest sumą atomów), także wykorzystując ten operator. Dokładniej, otrzymali następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.1. [29, Theorem 5.3.17], [5] *Atomistyczna krata algebraiczna L jest Q-kratą wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorficzna z kratą $\mathrm{Sp}(A)$ dla kraty algebraicznej A spełniającej pewne dodatkowe warunki.*

Przez $\mathrm{Sp}(L)$ oznaczamy kratę algebraicznych podzbiorów w kracie zupełnej L. Podzbiór X w kracie zupełnej L jest *algebraiczny*, jeśli X jest zamknięty ze względu na kresy dolne dla każdego swojego podzbioru oraz zamknięty ze względu na kresy górne dla każdego swojego podzbioru, który jest łańcuchem (kresy wyznaczane są w L). Podzbiór algebraiczny w kracie algebraicznej jest kratą algebraiczną. W 1980 r. Gorbunov i Tumanov [31] pokazali, że dla dowolnej kraty algebraicznej A kraty postaci $\mathrm{Sp}(A)$ są Q-kratami. Co więcej, kraty postaci $\mathrm{Sp}(A)$ są (obok krat wypukłości) podstawowym przykładem krat domknięcia dla *geometrii wypukłych*, które omówimy teraz dokładniej.

Definicja 2.2. Parę $\langle X, C\rangle$, gdzie X jest zbiorem, zaś $C\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ jest operatorem na X, nazywamy *geometrią wypukłą*, jeśli spełnione są następujące warunki, dla dowolnych $A \subseteq B \subseteq X$:

(1) $A \subseteq C(A)$;
(2) $C(C(A)) = C(A)$;
(3) $C(A) \subseteq C(B)$.
(4) $a \in C(A \cup \{b\}) \backslash C(A)$ i $a \neq b$ pociągają, że $b \notin C(A \cup \{a\})$, dla dowolnych a, $b \in X$.

Parę $\langle X, C\rangle$ spełniającą warunki (1)-(3) powyższej definicji nazywamy *przestrzenią domknięcia*. Warunek (4) to własność *anty-wymiany*, która w naturalny sposób uogólnia pojęcie *wypukłości* w przestrzeniach afinicznych.

Skończone geometrie wypukłe były wnikliwie badane przez wielu autorów (podsumowanie można znaleźć np. u P. H. Edelmana i R. E. Jamisona [22] oraz B. Korte'a, L. Lovasza i R. Schradera [43]) i wiąże się to z ich zastosowaniami w kombinatoryce, a także z tym, że są to struktury dualne do *matroidów* (uogólnienia przestrzeni wektorowych i pojęcia liniowej niezależności). *Nieskończone* geometrie wypukłe zaczęto badać systematycznie w pracy Adarichevej, Gorbunova i Tumanova [7] i od tego czasu ukazało się wiele publikacji dotyczących tego zagadnienia (ostatnio Adaricheva i Nation zebrali różne wyniki w [9]).

Przestrzeń domknięcia $\langle X, C\rangle$ jest *algebraiczna*, jeśli $C(A) = \bigcup\{C(F) \mid F \subseteq A \text{ skończony}\}$ dla każdego $A \subseteq X$. Z kolei $\langle X, C\rangle$ jest *atomistyczna*, jeśli $C(\{x\}) = \{x\}$. Zbiór $A \subseteq X$ jest *domknięty*, jeśli $C(A) = A$.

Niech $\mathbb{L}(X, C)$ oznacza zbiór wszystkich domkniętych podzbiorów w przestrzeni domknięcia $\langle X, C\rangle$. Ze względu na relację inkluzji, tworzy on kratę zupełną, w której

$$\bigwedge_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} A_i; \quad \bigvee_{i\in I} A_i = C\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)$$

dla dowolnej rodziny $\{A_i \in \mathbb{L}(X, C) \mid i \in I\}$. Kraty postaci $\mathbb{L}(X, C)$ nazywamy *kratami domknięcia* przestrzeni domknięcia $\langle X, C\rangle$.

Istnieją silne związki pomiędzy kratami domknięcia geometrii wypukłych i kratami sumowo półdystrybutywnymi. Przede wszystkim, każda krata domknięcia skończonej geometrii wypukłej jest sumowo półdystrybutywna a każda krata sumowo półdystrybutywna zanurza się w kratę domknięcia pewnej atomistycznej geometrii wypukłej [7, Theorem 3.26]. Co więcej

Twierdzenie 2.3. [29, Corollary 4.3.6] *Quasirozmaitość* $\mathbf{SD}^{\vee}$ *wszystkich krat sumowo półdystrybutywnych jest generowana przez klasę krat domknięć skończonych atomistycznych geometrii wypukłych.*

Atomistyczne Q-kraty są kratami domknięcia atomistycznych geometrii wypukłych i dostarczają wielu ważnych przykładów w tej teorii. Ogólnie, każda Q-krata zanurza się w kratę $\mathrm{Sp}(A)$ dla pewnej kraty algebraicznej A, co pokazali Gorbunov i Tumanov [33], a więc zanurza się w kratę domknięcia pewnej geometrii wypukłej. Q-kraty są więc bardzo ważnym łącznikiem pomiędzy kratami z $\mathbf{SD}^{\vee}$ a kratami domknięcia geometrii wypukłych. Wyniki otrzymane dla Q-krat przyczyniły się istotnie do rozwoju obu kierunków badań w teorii krat oraz śledzenia związków między nimi.

Nie każda krata domknięcia geometrii wypukłej jest jednak Q-kratą, co pozwoliło rozszerzyć poszukiwania tych ostatnich na kraty, które często nie mają bezpośredniego związku z quasirozmaitościami. Mogą to być np. kraty wypukłości [6] lub kraty różnego rodzaju podpółkrat [4, 5] lub też kraty częściowych podporządków częściowego porządku [81]. Te poszukiwania zakończyły się sukcesem. Nadal jednak nie wiadomo, *które podkraty krat domknięć badanych geometrii wypukłych są Q-kratami.* Na początek zaczęto więc badać , jak w ogóle wyglądają podkraty takich krat domknięć. W przypadku krat wypukłości badania zapoczątkowane

zostały przez M. V. Semenovą i F. Wehrunga w [82]–[84], a następnie były kontynuowane przez Semenovą i habilitantkę w [H1]–[H3].

3. Kraty wypukłości

Niech $\langle P, \trianglelefteq \rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Zbiór $A \subseteq P$ jest *porządkowo-wypukły* (a krótko: *wypukły*), jeśli dla dowolnych x, $y \in A$ z tego, że $x \trianglelefteq z \trianglelefteq y$ wynika, że $z \in A$. Dla danego $A \subseteq P$, przez $\mathrm{Co}(A)$ oznaczamy *powłokę wypukłą* zbioru A, czyli najmniejszy wypukły podzbiór P zawierający zbiór A. W ten sposób otrzymujemy operator domknięcia na P i przestrzeń $\langle P, \mathrm{Co} \rangle$ jest przykładem geometrii wypukłej. Przez $\mathbf{Co}(P)$ oznaczamy odpowiadającą jej kratę domknięcia $\mathbb{L}(P, \mathrm{Co})$, czyli kratę podzbiorów wypukłych zbioru częściowo uporządkowanego P. Tego typu kraty nazywamy *kratami wypukłości*. Jeśli będziemy rozważać pewną klasę zbiorów częściowo uporządkowanych $\mathcal{P}$ to przez $\mathbf{Co}(\mathcal{P})$ będziemy oznaczać klasę krat wypukłości wszystkich zbiorów z $\mathcal{P}$ (zamkniętą ze względu na izomorfizmy).

Kraty wypukłości zostały scharakteryzowane w 1985 r. przez G. Birkhoffa i M. K. Bennett [15] przez pewne warunki głównie natury geometrycznej:

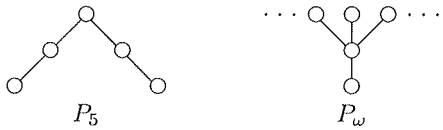
Twierdzenie 3.1. [15, Theorem 23] *Krata L jest izomorficzna z kratą $\mathbf{Co}(P)$ dla pewnego zbioru częściowo uporządkowanego $\langle P, \trianglelefteq \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy L jest kratą zupełną, atomistyczną, sumowo-półdystrybutywną, spełnia warunek Altwegga i ma rząd Carathéodory'ego równy* 2.

Spełnianie warunku Altwegga przez kratę oznacza, że nie występują w niej pewnego rodzaju *zygzaki* nieparzystej długości zdefiniowane na atomach. Z kolei każda krata atomistyczna $(L, \leqslant)$ rzędu Carathéodory'ego 2 jest *bi-atomowa*, czyli dla każdego atomu $a \in L$, jeśli $a \leqslant b \vee c$ dla pewnych elementów $b, c \in L$, to można znaleźć w L atomy $b' \leqslant b$ i $c' \leqslant c$ takie, że $a \leqslant b' \vee c'$.

Jak więc widać kraty wypukłości były naturalną klasą do poszukiwania Q-krat. W 1989 r. Adaricheva i Gorbunov [6] zdefiniowali *operator domknięcia równościowego* jako uogólnienie na dowolną kratę, funkcji działającej na kracie quasirozmaitości $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$, która podquasirozmaitości $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{K}$ przyporządkowuje generowaną przez nią (względną) podrozmaitość, czyli $\mathbf{H}(\mathbf{M}) \cap \mathbf{K}$. Co ważne, na każdej Q-kracie można zdefiniować taki operator domknięcia równościowego. Następnie Adaricheva i Gorbunov wykorzystali ten operator do wskazania, które kraty wypukłości są Q-kratami, czyli do rozwiązania problemu Birkhoffa-Mal'ceva w klasie wszystkich krat wypukłości. Otrzymali następujący wynik.

Twierdzenie 3.2. [6, Theorem 4.1] *Niech P będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Następujące warunki są równoważne:*

(i) $\mathbf{Co}(P)$ *jest Q-kratą;*
(ii) P jest co najwyżej przeliczalny i nie zawiera podzbiorów częściowo uporządkowanych postaci: $\mathbf{4}$ *(łańcuch czteroelementowy),* $\mathbf{2}^2$ *(produkt dwóch łańcuchów dwuelementowych), P_5, P_ω, ani zbiorów do nich dualnych.*



Rysunek 1. Zbiory częściowo uporządkowane P_5 i P_ω

Pozostał jednak nie rozwiązany problem: *które z krat zanurzalnych w kraty wypukłości są Q-kratami.* W [7] znalazło się więc następujące pytanie, na początek sformułowane w ograniczonym zakresie:

Pytanie 3.3. [7, Problem 3 (ii)] *Jak wyglądają podklasy krat skończonych z $\mathbf{SD}^\vee$ zanurzalnych w skończone kraty wypukłości zbiorów częściowo uporządkowanych?*

To pytanie zainspirowało badania M. V. Semenovej i F. Wehrunga. W [82] podali oni pełną (syntaktyczną) charakteryzację krat zanurzalnych w kraty wypukłości zbiorów częściowo uporządkowanych. Okazało się, że

klasa ta jest skończenie bazowalną rozmaitością krat, znaleziono także jej bazę równościową. W szczególności, otrzymano, że *nie każda skończona krata sumowo półdystrybutywna zanurza się w skończoną kratę wypukłości.* Charakteryzację podobnego rodzaju znaleziono w kolejnych dwóch pracach [83] i [84] dla krat zanurzalnych w kraty wypukłości zbiorów częściowo uporządkowanych o ograniczonej skończonej wysokości oraz rozłącznych sum zbiorów liniowo uporządkowanych. Wyniki te były dosyć zaskakujące, bo o ile łatwo było wywnioskować, że badane klasy są quasirozmaitościami, to nie był znany wcześniej żaden bezpośredni dowód na to, że klasy te są zamknięte ze względu na branie obrazów homomorficznych.

3.1. **Kraty zanurzalne w pewne kraty wypukłości.** M. V. Semenova i F. Wehrung opisali kraty zanurzalne w kraty wypukłości w przypadku ogólnych zbiorów częściowo uporządkowanych, stąd naturalnym jest studiowanie takich krat dla szczególnych zbiorów częściowo uporządkowanych. W prezentowanej rozprawie naszą uwagę skierowałyśmy na pewne właściwe podklasy tzw. *zbiorów N-wolnych.* Wszystkie zbiory częściowo uporządkowane wymienione w podpunkcie (ii) Twierdzenia 3.2 są właśnie zbiorami N-wolnymi.

W pracy [H1] podano syntaktyczną charakteryzację krat zanurzalnych w kraty wypukłości *drzew* i *lasów. Lasem* nazywamy zbiór częściowo uporządkowany $\langle P, \trianglelefteq\rangle$, w którym zbiór dolny $\downarrow x = \{p \in P \mid p \trianglelefteq x\}$ jest łańcuchem dla każdego $x \in P$. Równoważnie, zbiór częściowo uporządkowany $\langle P, \trianglelefteq\rangle$ jest lasem, jeśli żadne dwa elementy nieporównywalne w P nie mają wspólnego ograniczenia górnego w $\langle P, \trianglelefteq\rangle$. Las spójny nazywamy *drzewem.* Spośród zbiorów rozważanych w Twierdzeniu 3.2 w podpunkcie (ii) tylko $\mathbf{2}^2$ nie jest drzewem. Niech $\mathcal{T}$ oznacza klasę wszystkich zbiorów uporządkowanych, które są drzewami, zaś $\mathcal{F}$ klasę wszystkich zbiorów uporządkowanych, które są lasami. Oczywiście $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$.

Klasa systemów zanurzalnych w systemy z pewnej klasy $\mathbf{K}$, to po prostu klasa systemów izomorficznych z podsystemami systemów z $\mathbf{K}$, tradycyjnie oznaczana przez $\mathbf{S}(\mathbf{K})$. M. Semenova i F. Wehrung w [82] pokazali, że wprowadzone przez nich trzy równości (S), (U), (B) stanowią bazę równościową rozmaitości $\mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{P}))$ dla klasy $\mathcal{P}$ wszystkich zbiorów częściowo uporządkowanych.

Naszym celem było opisanie klas $\mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{T}))$, $\mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{F}))$ oraz $\mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{S}))$, gdzie $\mathcal{S}$ jest właściwą podklasą klasy częściowo uporządkowanych zbiorów N-wolnych, która zawiera klasę $\mathcal{F}_{\mathrm{Fin}}$ wszystkich *skończonych* lasów, a także podanie prostszej bazy dla $\mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{L}_{\cup}))$, gdzie $\mathcal{L}_{\cup}$ oznacza klasę wszystkich rozłącznych sum zbiorów liniowo uporządkowanych. Główne wyniki zawarte są w rozdziale 9. pracy [H1] oraz w rozdziałach 10. i 11. pracy [H2].

Twierdzenie 3.4 (H1, Theorem 9.1). *Niech L będzie kratą. Następujące warunki są równoważne:*

- *istnieje drzewo T takie, że L zanurza się w $\mathbf{Co}(T)$;*
- *istnieje las F taki, że L zanurza się w $\mathbf{Co}(F)$;*
- *L spełnia 8 równości:* (S), (U), (B), (T_2), (T_3), (T_4), (T) *oraz* (Z).

Dodatkowo, zanurzenie z Twierdzenia 3.4 zachowuje 0_L (element najmniejszy) oraz 1_L (element największy), jeśli w L występują te elementy. Równości (T_2), (T_3), (T_4), (T) oraz (Z) zostały znalezione przeze mnie i M. Semenową.

Z Twierdzenia 3.4 i jego dowodu wypływają następujące wnioski:

Wniosek 3.5. (H1, Section 9)

- $\mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{T})) = \mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{F}))$;
- $\mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{T}))$ jest skończenie bazowalną rozmaitością;
- skończona krata L należy do $\mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{T}))$ wtedy i tylko wtedy, gdy zanurza się w kratę $\mathbf{Co}(T)$ dla skończonego drzewa T;
- $\mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{T}))_{\mathrm{Fin}}$ jest pseudorozmaitością (klasą zamkniętą ze względu na obrazy homomorficzne, podsystemy i produkty proste skończonej liczby systemów).

Najtrudniejszą częścią dowodu Twierdzenia 3.4 jest konstrukcja lasu F (pierwszych 30 stron pracy), takiego że dowolna krata L spełniająca naszych 8 równości zanurza się w jego kratę wypukłości $\mathbf{Co}(F)$ (techniczne lematy w rozdziałach 7. i 8. [H1]). Wykorzystujemy m.in. kratę filtrów $\mathrm{Fil}(L)$ uporządkowaną przez odwrotną inkluzję, z kanonicznym zanurzeniem L w $\mathrm{Fil}(L)$, zadanym przez $a \mapsto \uparrow a$. Wiadomo, że kraty L i $\mathrm{Fil}(L)$ spełniają te same równości np. G. Grätzer [36, Lemma 8, Section I.4]. Na specjalnie dobranych ciągach elementów sumowo nierozkładalnych kraty $\mathrm{Fil}(L)$ wprowadzamy relację częściowego porządku, otrzymując

drzewa. W ostatnim kroku, pokazujemy, że krata $\mathrm{Fil}(L)$ zanurza się w rozłączną sumę takich drzew (a jeśli dodamy nowy element najmniejszy, to otrzymamy zanurzenie w drzewo).

Warto podkreślić, że podczas budowy zbioru częściowo uporządkowanego z konkretnej klasy, za każdym razem bardzo istotną rolę odgrywają jej własności, więc konstrukcje z [H1, H2] oraz z [82, 83, 84] są niezależne od siebie.

Wykorzystując metody z dowodu Twierdzenia 3.4 pokazujemy także (Rozdział 10. w [H1]), że dla ustalonego $n \in \mathbb{Z}^+$ i klasy $\mathcal{F}_n$ wszystkich lasów długości (wysokości) co najwyżej n, klasa $\mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{F}_n))$ jest skończenie bazowalną rozmaitością (podajemy także zbiór równości, które są spełnione w tej klasie) i $\mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{F}_n)) = \mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{F})) \cap \mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{P}_n))$, gdzie $\mathcal{P}_n$ jest klasą wszystkich zbiorów częściowo uporządkowanych długości co najwyżej n. Klasa $\mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{F}_n))_{\mathrm{Fin}}$ jest pseudorozmaitością.

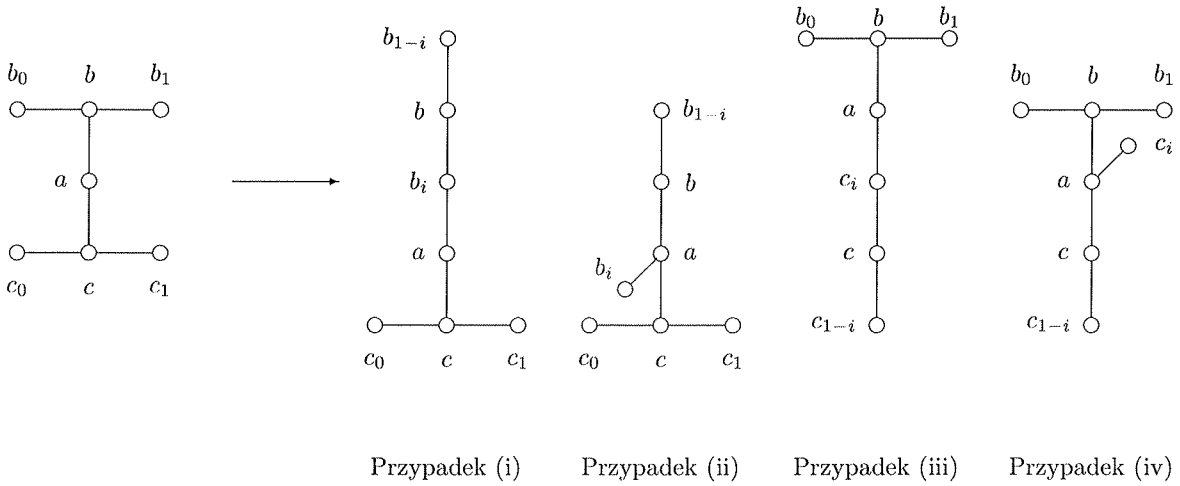
Równości (T_2), (T_3), (T_4), (T) oraz (Z), które wprowadziłyśmy w Twierdzeniu 3.4 są dosyć skomplikowane. Przytoczę tylko jedną z nich (Z), żeby pokazać idee ważne w dowodzie:

$$\begin{aligned} x \wedge (y' \vee z') = & \bigvee_{i<2} \Big[x \wedge \Big(\Big(y \wedge \Big((y_i \wedge (y' \vee z')) \vee y_{1-i} \Big) \Big) \vee z' \Big) \wedge (z' \vee y_i) \Big] \\ & \vee \bigvee_{i<2} \Big[x \wedge \Big(y' \vee \Big(z \wedge \Big((z_i \wedge (y' \vee z')) \vee z_{1-i} \Big) \Big) \Big) \wedge (y' \vee z_i) \Big] \\ & \vee \bigvee_{i<2} \big[x \wedge (y' \vee z') \wedge (y' \vee y_i) \big] \vee \bigvee_{i<2} \big[x \wedge (y' \vee z') \wedge (z' \vee z_i) \big], \end{aligned}$$

gdzie dla zmiennych y, y_0, y_1, z, z_0, z_1

$$y' = y \wedge (y_0 \vee y_1); \qquad z' = z \wedge (z_0 \vee z_1).$$

W dowodzie wykorzystujemy *sumowo-nierozkładalną interpretację* (Z), którą oznaczamy przez (Z^{Σ}) i której znaczenie geometryczne jest przedstawione na Rysunku 2.



RYSUNEK 2. Znaczenie (Z^{Σ})

Krawędzie na Rysunku 2 pokazują uporządkowanie zbioru częściowo uporządkowanego $\langle P, \trianglelefteq \rangle$ (lub zbioru do niego dualnego). Na przykład, z lewej części Rysunku 2 można między innymi odczytać, że zachodzi relacja $c \trianglelefteq a \trianglelefteq b$ (z dokładnością do wzięcia porządku dualnego do $\trianglelefteq$), skąd dostajemy, że w L zachodzi nierówność $\{a\} \leqslant \{b\} \vee \{c\}$. Pozioma krawędź np. $c_0 - c - c_1$ oznacza, że zachodzi $c_0 \trianglelefteq c \trianglelefteq c_1$ lub $c_1 \trianglelefteq c \trianglelefteq c_0$.

Przy pewnych dodatkowych warunkach nałożonych na kratę L, pokazuje się, że spełnianie przez L równości (Z) jest równoważne spełnianiu (Z^{Σ}) (warunek ten jest dużo wygodniejszy, chociażby z powodu interpretacji geometrycznej) i że dla dowolnego lasu F krata $\mathbf{Co}(F)$ spełnia równość (Z).

Ważnym rezultatem jest także Twierdzenie 3.6, które upraszcza bazę równościową rozmaitości krat zanurzalnych w kraty wypukłości rozłącznych sum zbiorów liniowo uporządkowanych znalezioną w [82, Theorem 8.2].

Twierdzenie 3.6 (H1, Theorem 13.3). *Niech L będzie kratą. Następujące warunki są równoważne:*

- *L spełnia 3 równości:* (B), (B_0), (HS)*;*
- *istnieje zbiór częściowo uporządkowany C, który jest rozłączną sumą zbiorów liniowo uporządkowanych taki, że L zanurza się w $\mathbf{Co}(C)$.*

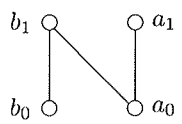
Dodatkowo, dla skończonej kraty L można wybrać skończony zbiór C.

Niech $\mathcal{L}$ oznacza klasę zbiorów liniowo uporządkowanych. Oczywiście zachodzi $\mathcal{L} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{F}$ i $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_{\cup} \subset \mathcal{F}$, a także $\mathbf{SP}(\mathbf{Co}(\mathcal{L})) = \mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{L}_{\cup}))$ i jest to właściwa podrozmaitość $\mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{T}))$.

Rozmaitości krat rozważane w pracy [H1] są generowane przez skończone kraty z tych rozmaitości, więc jako wniosek z Twierdzenia J.C.C. McKinsey'a [52, Theorem 3] dostajemy, że teorie równościowe w tych rozmaitościach są *rozstrzygalne* (inaczej: problem słów dla krat wolnych jest rozstrzygalny).

Naturalnym rozszerzeniem klasy $\mathcal{F}$ jest klasa zbiorów częściowo uporządkowanych *N-wolnych* (lub *szeregowo-równoległych*), którą w pracy [H1] oznaczono przez $\neg\mathcal{N}$. Następnym etapem było więc badanie klasy $\mathbf{S}(\mathbf{Co}(\neg\mathcal{N}))$ i sprawdzenie, czy także jest to rozmaitość krat [H1, Problem 2]. Problem ten był także sugerowany przez F. Wehrunga w naszych rozmowach.

Zbiór częściowo uporządkowany $\langle P, \trianglelefteq \rangle$ jest *N-wolny*, jeśli nie zawiera (częściowo uporządkowanego) podzbioru izomorficznego ze zbiorem przedstawionym na Rysunku 3 z dodatkowym warunkiem, że $a_0 \prec b_1$ (b_1 jest następnikiem a_0), np. I. Rival [67]. Podobne zbiory były badane przez B. Leclerca i B. Monjardeta w [46], oraz M. Pouzeta i N. Zaguia [65]. W pracy [H2] badałyśmy klasę $\mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{S}))$, gdzie przypomnijmy $\mathcal{S}$ jest właściwą podklasą klasy częściowo uporządkowanych zbiorów N-wolnych i zawiera klasę $\mathcal{F}_{\mathrm{Fin}}$ wszystkich skończonych lasów. O zbiorach z klasy $\mathcal{S}$ będziemy mówić, że *przypominają gwiazdy.*



RYSUNEK 3. Częściowo uporządkowany zbiór N

Definicja 3.7 (H2, Definition 3.1). Ciąg $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle$, $n < \omega$, elementów z P jest *ścieżką* [*pomiędzy a_0 i a_n*], jeśli spełnione są następujące warunki:

(1) $a_i \neq a_j$ dla różnych $i, j \leqslant n$;
(2) $a_i \prec a_{i+1}$ lub $a_i \succ a_{i+1}$, dla każdego $i < n$;

Powiemy, że w ścieżce $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle$, gdzie $n \geqslant 2$, zachodzi *zmiana znaku* w a_i dla $0 < i < n$, jeśli $a_{i-1}, a_{i+1} \prec a_i$ lub $a_{i-1}, a_{i+1} \succ a_i$.

Definicja 3.8 (H2, Definition 3.2). Zbiór częściowo uporządkowany $\langle P, \trianglelefteq \rangle$ *przypomina drzewo*, jeśli ma następujące własności:

(1) jeśli $a \trianglelefteq b$ w P, to istnieje ścieżka $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ pomiędzy $a = a_0$ i $b = a_n$ taka, że $a_i \prec a_{i+1}$ dla każdego $i < n$;
(2) jeśli $a, b \in P$, to istnieje co najwyżej jedna ścieżka pomiędzy a i b.

Zbiór częściowo uporządkowany $\langle P, \trianglelefteq \rangle$ *przypomina gwiazdę*, jeśli $\langle P, \trianglelefteq \rangle$ przypomina drzewo i każda ścieżka w $\langle P, \trianglelefteq \rangle$ ma co najwyżej jedną zmianę znaku.

Podsumowując, zbiór częściowo uporządkowany przypomina gwiazdę wtedy i tylko wtedy, gdy przypomina drzewo i jest N-wolny. Klasa $\mathcal{S}$ jest zatem właściwą podklasą wszystkich zbiorów przypominających drzewa.

Badania tej właśnie klasy (oprócz Twierdzenia 3.2) można umotywować na dwa sposoby. Po pierwsze, częściowo uporządkowane zbiory N-wolne odgrywają znaczącą rolę w kombinatoryce, opisaną m.in. przez I. Rivala [67]. Po drugie, częściowo uporządkowane zbiory przypominające drzewa pojawiają się w dowodzie głównego wyniku u M. Semenovej i F. Wehrunga [82, Theorem 7.7]. Częściowo uporządkowany zbiór P, który konstruują, żeby zanurzyć kratę L spełniającą równości (S), (U), (B) w odpowiednią kratę wypukłości, jest właśnie zbiorem przypominającym drzewo. W takim zbiorze P na każdej ścieżce znak może się zmieniać dowolną liczbę razy. Chciałyśmy zbadać do jakiego stopnia klasa $\mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{S}))$ różni się od rozmaitości $\mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{P}))$, gdzie $\mathcal{P}$ jest klasą wszystkich zbiorów częściowo uporządkowanych. Oczywiście, każda rozłączna suma skończonych drzew jest zbiorem z $\mathcal{S}$, czyli w szczególności $\mathcal{F}_{\mathrm{Fin}} \subset \mathcal{S}$.
Główne rezultaty znajdują się w rozdziałach 10. i 11. pracy [H2].

Twierdzenie 3.9 (H2, Theorem 10.2). *Niech L będzie kratą skończoną. Następujące warunki są równoważne:*

- *istnieje (skończony) zbiór częściowo uporządkowany P przypominający gwiazdę, taki, że L zanurza się w $\mathbf{Co}(P)$;*
- *L spełnia 7 równości:* (S), (U), (B), (F_1), (F_2), (T) *oraz* (Z).

Otrzymujemy więc, że klasa $\mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{S}))_{\mathrm{Fin}}$ jest pseudorozmaitością krat. Równość (T_3) [(T_4), odpowiednio] z [H1] implikuje równość (F_1) [(F_2), odpowiednio]. Klasy $\mathbf{S}(\mathbf{Co}(\mathcal{S}_m))_{\mathrm{Fin}}$ także są pseudorozmaitościami dla każdego $m \in \mathbb{Z}^+$, gdzie przez $\mathcal{S}_m$ oznaczamy klasę zbiorów z $\mathcal{S}$ długości co najwyżej m.

Podsumowując, w pracach [H1] i [H2] opisano klasy krat zanurzalnych w kraty wypukłości dla pewnych naturalnych klas zbiorów częściowo uporządkowanych, właściwych podklas klasy $\neg\mathcal{N}$. Z tego opisu wynika, że klasy takich krat tworzą rozmaitości (lub, w przypadku krat skończonych, pseudorozmaitości) krat. Są to przykłady rozmaitości krat *z geometrycznym opisem* badanych następnie przez L. Santocanale'a i F. Wehrunga w [78].

3.2. **Kraty wypukłości lasów.** Jak już wspominano, kraty (izomorficzne z kratami) wypukłości zostały opisane przez G. Birkhoffa i M. K. Bennett w [15] za pomocą nieskończonego zbioru własności kratowych. Z ich opisu wynika, że klasa $\mathbf{Co}(\mathcal{P})$ jest aksjomatyzowalna w języku logiki pierwszego rzędu wewnątrz klasy wszystkich krat górnie ciągłych, ale zbiór aksjomatów jest nieskończony. Wykorzystując metody z prac M. Semenovej i F. Wehrunga oraz prac [H1] i [H2], można Twierdzenie 3.1 przeformułować następująco

Wniosek 3.10. *Krata L jest izomorficzna z kratą $\mathbf{Co}(P)$ dla zbioru częściowo uporządkowanego $\langle P, \trianglelefteq\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy L jest zupełną, górnie ciągłą, atomistyczną kratą, która spełnia równość* (S) *i warunek Altwegga.*

Krata zupełna L jest *górnie ciągła*, jeśli

$$a \wedge \bigvee_{i\in I} x_i = \bigvee_{i\in I} (a \wedge x_i),$$

dla dowolnego $a \in L$ i dowolnego skierowanego w górę zbioru $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq L$. Każda krata wypukłości jest górnie ciągła.

Można zauważyć, że istnieje *nieskończony* zbiór Σ zdań pierwszego rzędu taki, że dla dowolnej kraty L, krata ta spełnia warunek Altwegga wtedy i tylko wtedy, gdy $L \models \Sigma$. Przyjrzyjmy się dokładniej temu warunkowi.

Niech L będzie kratą atomistyczną i niech $p_0 \neq p_1$ będą atomami w L. Będziemy pisać $p_0 \sim p_1$ jeśli istnieje atom $p_2 \in L\backslash\{p_0, p_1\}$, taki że $p_{\sigma(0)} \leqslant p_{\sigma(1)} \vee p_{\sigma(2)}$ dla pewnej permutacji $\sigma \in \mathcal{S}_3$.

Definicja 3.11. [15] Niech L będzie kratą atomistyczną. L spełnia *warunek Altwegga*, jeśli nie istnieje ciąg atomów $\langle p_0, p_1, \ldots, p_{2n}\rangle$ w L, w którym: $1 < n < \omega$, $p_i \sim p_{i+1}$ dla każdego $i < 2n$, $p_i \wedge (p_{i-1} \vee p_{i+1}) = 0$ dla każdego $0 < i < 2n$ oraz $p_{2n-1} = p_0$, $p_{2n} = p_1$.

Z Wniosku 3.10 widać, że następujący problem decyzyjny: *dla danej skończonej kraty L stwierdzić, czy jest ona izomorficzna z pewną kratą wypukłości*, jest w klasie **NP**. Nie udało nam się pokazać, że jest w klasie **P**, mimo różnych prób. Możliwe, że jest to problem **NP**-zupełny, co jest warte dalszych badań.

W pracy [H3] scharakteryzowałyśmy kraty z klas $\mathbf{Co}(\mathcal{F})$, $\mathbf{Co}(\mathcal{L}_\cup)$ oraz $\mathbf{Co}(\mathcal{L})$. Te klasy okazały się być skończenie aksjomatyzowalne wewnątrz klasy wszystkich krat górnie ciągłych, w przeciwieństwie do klasy $\mathbf{Co}(\mathcal{P})$.

Twierdzenie 3.12 (H3, Theorem 8.3). *Następujące warunki są równoważne dla kraty L:*

(1) $L \in \mathbf{Co}(\mathcal{F})$;
(2) L jest zupełna, atomistyczna, górnie ciągła oraz $L \models$ (S), (U), (B), (T_2), (T_3), (D), (G).

Warunki (D) i (G) są pewnymi zdaniami uniwersalnymi [H3, Section 5].

Twierdzenie 3.13 (H3, Theorem 10.4). *Następujące warunki są równoważne dla kraty L:*

(1) $L \in \mathbf{Co}(\mathcal{L}_\cup)$;
(2) L jest zupełną, atomistyczną, górnie ciągłą kratą spełniającą (S), (B), (B_0) *i* (D_0).

Warunek (D_0) jest zdaniem uniwersalnym, które pociąga za sobą zarówno warunek (D) jak i (G). Jako wniosek otrzymujemy:

Twierdzenie 3.14 (H3, Theorem 10.5). *Następujące warunki są równoważne dla kraty L:*

(1) $L \in \mathbf{Co}(\mathcal{L})$;
(2) albo $L \cong \mathbf{2}^2$ albo L jest zupełną, atomistyczną, górnie ciągłą, prosto nierozkładalną kratą spełniającą dodatkowo (S), (B), (B_0) *i* (D_0).

Warunek $L \cong \mathbf{2}^2$ oznacza, że $L \cong \mathbf{Co}(\mathbf{2})$, gdzie $\mathbf{2}$ to łańcuch dwuelementowy. W Twierdzeniu 3.13 można pominąć warunki, że $L \cong \mathbf{2}^2$ oraz, że L jest prosto nierozkładalna, ponieważ $\mathbf{Co}(\mathcal{L}_\cup) = \mathbf{P}(\mathbf{Co}(\mathcal{L}))$. Podsumowując, otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 3.15 (H3, Corollaries 8.6 i 10.6). *Następujące klasy krat skończonych są skończenie aksjomatyzowalne wewnątrz klasy krat skończonych:*

- $\mathbf{Co}(\mathcal{F})_{\mathrm{Fin}}$;
- $\mathbf{Co}(\mathcal{F}_n)_{\mathrm{Fin}}$ *dla* $0 < n < \omega$;
- $\mathbf{Co}(\mathcal{L}_\cup)_{\mathrm{Fin}}$;
- $\mathbf{Co}(\mathcal{L})_{\mathrm{Fin}}$.

Badania krat z klas $\mathbf{Co}(\mathcal{P}_n)$ oraz $\mathbf{Co}(\mathcal{T}^n)$, gdzie $\mathcal{T}^n$ jest klasą n-arnych drzew były kontynuowane przez Ts. Batuevą w [13]. Wyniki, które znalazły się w pracy [H3] były przedstawione na konferencji ROGICS'08 *Relations, Orders and Graphs in Computer Science* przez M. Semenovą i spotkały się z zainteresowaniem słuchaczy.

4. Złożoność problemu Birkhoffa-Mal'ceva

Badanie Q-krat jest trudne, ponieważ wyjątkowo często są to obiekty bardzo złożone. Jedną z miar takiej złożoności jest *Q-uniwersalność* wprowadzona przez M. V. Sapira [77] dla quasirozmaitości $\mathbf{K}$ algebr skończonego typu. Quasirozmaitość $\mathbf{K}$ jest Q-uniwersalna, jeśli dla dowolnej quasirozmaitości $\mathbf{K}'$ skończonego typu, $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}') \in \mathbf{HS}(\mathrm{Lq}(\mathbf{K}))$. To pojęcie zostało uogólnione przez Gorbunova w następujący sposób.

Definicja 4.1. [29, Section 5.4.5] Klasa $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ jest *Q-uniwersalna*, jeśli dla dowolnej quasirozmaitości $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}(\sigma')$ skończonej sygnatury σ', $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}') \in \mathbf{HS}(\mathrm{Lq}(\mathbf{K}))$.

W powyższej definicji nie zakłada się, że klasa $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ jest quasirozmaitością. Zatem krata $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ może nie być Q-kratą (ogólną definicję $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ podajemy w podrozdziale 6.1). Natomiast krata $\mathrm{Lq}(\mathbf{Q}(\mathbf{K}))$ jest Q-kratą (przez $\mathbf{Q}(\mathbf{K})$ oznaczamy najmniejszą quasirozmaitość zawierającą klasę $\mathbf{K}$). Związek pomiędzy obiema kratami jest następujący:

Fakt 4.2. *Redukt kraty* $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ *ze względu na operację* $\wedge$ *jest obrazem homomorficznym* $\wedge$*-reduktu kraty* $\mathrm{Lq}(\mathbf{Q}(\mathbf{K}))$.

Dowód. Zdefiniujmy odwzorowanie $\varphi\colon \mathrm{Lq}(\mathbf{Q}(\mathbf{K})) \to \mathrm{Lq}(\mathbf{K})$, $\varphi(\mathbf{N}) = \mathbf{N} \cap \mathbf{K}$. Oczywiście jest to homomorfizm ze względu na operację $\cap$. To, że φ jest *na* wynika z obserwacji, że $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}$ jest $\mathbf{K}$-quasirozmaitością (czyli $\mathbf{K}' \in \mathrm{Lq}(\mathbf{K})$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{K}' = \mathbf{Q}(\mathbf{K}') \cap \mathbf{K}$. $\square$

Dla każdej Q-uniwersalnej klasy $\mathbf{K}$ krata $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ jest mocy continuum i zanurza się w nią krata wolna o przeliczalnej liczbie generatorów. Wiele ważnych klas systemów algebraicznych okazało się być Q-uniwersalnymi (długa lista w [1, Section 5]). Duża część z nich pochodzi z badań kategoryjnej uniwersalności systemów algebraicznych prowadzonych od początku lat 60-tych przez matematyków z Uniwersytetu Karola w Pradze [66]. Jest tak, gdyż M. E. Adams i W. Dziobiak w [3] udowodnili, że quasirozmaitość, która jest *finite-to-finite* uniwersalna (w sensie teorii kategorii) jest także Q-uniwersalna. Ogólnie, sprawdzanie Q-uniwersalności nie jest proste. W literaturze są 3 różne zbiory warunków wystarczających ustalających Q-uniwersalność (zob. M. E. Adams i W. Dziobiak [2], M. V. Sapir [77], V. A. Gorbunov [27]).

W 2012 r. A. M. Nurakunov [55] udowodnił następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.3. [55, Theorem 1] *Niech sygnatura σ zawiera przynajmniej jeden co najmniej unarny symbol funkcyjny. Wtedy istnieje quasirozmaitość $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ taka, że zbiór wszystkich skończonych podkrat w kracie* $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ *nie jest zbiorem rekurencyjnym.*

Rezultat ten oznacza, że nie istnieje algorytm, który pozwala rozstrzygnąć, czy dana krata skończona zanurza się w kratę $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$, gdzie $\mathbf{K}$ jest quasirozmaitością z powyższego twierdzenia.

Otrzymujemy więc nową miarę skomplikowania Q-krat. A. M. Nurakunov przeprowadził swój dowód dla pewnej quasirozmaitości algebr monounarnych. Wiadomo, że quasirozmaitość wszystkich algebr monounarnych jest Q-uniwersalna (V. A. Gorbunov [28]).

Głównym celem pracy [H5] było zbadanie związków między tymi dwoma własnościami: Q-uniwersalnością a nierekurencyjnością (*własnością Nurakunova*) dla różnych krat $\mathbf{K}$-quasirozmaitości, w tym dla Q-krat. Główne wyniki uzyskane w [H5] można w skrócie przedstawić następująco. Dla klasy $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$, istnieją pary krat postaci $\mathrm{Lq}(\mathbf{Q}(\mathbf{K}))$ i $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ takie, że:

(1) $\mathrm{Lq}(\mathbf{Q}(\mathbf{K}))$ jest Q-kratą;
(2) $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ jest kratą $\mathbf{K}$-quasirozmaitości;
(3) $\wedge$-redukt kraty $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ jest obrazem homomorficznym $\wedge$-reduktu kraty $\mathrm{Lq}(\mathbf{Q}(\mathbf{K}))$ (Fakt 4.2);
(4) problem, czy dana krata skończona zanurza się w kratę $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ jest algorytmicznie nierozwiązywalny (Twierdzenie 4.11).

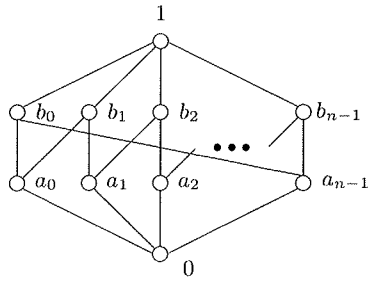
Co więcej w [H5] pokazano, że powyższe pary istnieją wtedy i tylko wtedy, gdy klasa $\mathbf{K}(\sigma)$ jest Q-uniwersalna (Twierdzenie 4.10). Należy dodać, co udowodniła M. Schwidefsky w [79], że powyższe pary istnieją w każdej quasirozmaitości, która jest Q-uniwersalna dzięki warunkom wystarczającym sformułowanym przez Adamsa i Dziobiaka w [2]. Należy również dodać, że w wielu przypadkach obie kraty $\mathrm{Lq}(\mathbf{Q}(\mathbf{K}))$ i $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ są identyczne, gdyż $\mathbf{Q}(\mathbf{K}) = \mathbf{K}$ (Theorems 5.3 i 5.4 w [H5]) lub też $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ jest obrazem homomorficznym $\mathrm{Lq}(\mathbf{Q}(\mathbf{K}))$ [79].

Już w pracy [H4] pokazałyśmy, że istnieją quasirozmaitości jednoelementowych systemów *relacyjnych* o (nieskończonej) przeliczalnej sygnaturze, dla których kraty (quasi)rozmaitości względnych lub (finitarnych) prerozmaitości mają zbiory typów izomorfizmu podkrat skończonych, które nie są rekurencyjne (a także nie są rekurencyjnie przeliczalne) (H4, Theorem 9.3). Te quasirozmaitości są także Q-uniwersalne. W [H5] otrzymałyśmy wyniki podobne do Twierdzenia 4.3 dla quasirozmaitości grafów, grupoidów różniczkowych oraz systemów algebraicznych z nieskończoną sygnaturą składającą się tylko z symboli stałych (tylko z symboli relacyjnych unarnych). Wszystkie te klasy są Q-uniwersalne (dla grafów [89], dla grupoidów różniczkowych [44]). W [H4] i [H5] opracowałyśmy bardziej uniwersalną i prostszą metodę weryfikacji własności Nurakunova w porównaniu do [55]. Zaprezentuję nasz sposób weryfikacji na przykładzie quasirozmaitości grafów.

Grafem nazywamy system relacyjny $\mathcal{G} = \langle G; E\rangle$, gdzie G jest niepustym zbiorem, zaś E relacją binarną na G. Przez $\mathbf{C}$ oznaczymy quasirozmaitość grafów zdefiniowaną przez następujące quasirówności:

$$\forall xy\ E(x,x) \longrightarrow x = y;$$
$$\forall xyz\ E(x,z)\ \&\ E(y,z) \longrightarrow x = y;$$
$$\forall xyz\ E(z,x)\ \&\ E(z,y) \longrightarrow x = y.$$

Do pokazania, że nie istnieje algorytm, który rozstrzyga, czy dana krata skończona zanurza się w $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ dla pewnej podklasy $\mathbf{K}$ w $\mathbf{C}$, kluczowe jest następujące twierdzenie o reprezentacji:



RYSUNEK 4. Krata K_n

Stwierdzenie 4.4 (H5, Proposition 3.7). *Niech L_n będzie skończoną nietrywialną kratą dla każdego $n < \omega$. Istnieje klasa $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{C}$, dla której zachodzi* $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}) \cong \prod_{n<\omega} \mathrm{Sub}(L_n)$.

$\mathrm{Sub}(L_n)$ jest kratą zupełną wszystkich podpółkrat reduktu półkratowego (ze względu na operację kresu dolnego) kraty L_n. W dowodzie wykorzystujemy własności klas cykli skierowanych skończonej długości oraz quasirozmaitości przez nie generowanych, opisane w Rozdziale 3. pracy [H5], w szczególności Stwierdzenie 4.5 o reprezentacji przez kraty kongruencji.

Niech $n > 1$ będzie liczbą naturalną, przez $\mathcal{C}_n$ oznaczymy graf $\langle \{0, \ldots, n-1\}; E\rangle$ taki, że dla dowolnych $i, j < n$, $(i, j) \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy $j \equiv i + 1 (\mathrm{mod}\, n)$. Przez $\mathcal{C}_1$ oznaczamy graf trywialny, czyli $\mathcal{C}_1 = \langle \{0\}; \{(0,0)\}\rangle$. Graf $\mathcal{C}_n$ nazywamy *cyklem skierowanym długości n*. Oczywiście, $\mathcal{C}_n \in \mathbf{C}$ dla każdego $n > 0$.

Stwierdzenie 4.5 (H5, Proposition 3.5). *Niech $\{p_1, \ldots, p_n\}$ będzie dowolnym zbiorem liczb pierwszych, zaś L - kratą skończoną o $n+1$ elementach. Wtedy istnieje zbiór $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$, do którego należą: zbiór pusty i zbiór $\{1, \ldots, n\}$, i który jest zamknięty ze względu na sumy podzbiorów, taki że*

(i) $L \cong \mathrm{Con}_{\mathbf{Q}(\mathbf{K})} \mathcal{C}_k$;

(ii) $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}) = \mathrm{Lq}\big(\mathbf{H}(\mathcal{C}_k) \cap \mathbf{Q}(\mathbf{K})\big) \cong \mathrm{Sub}(L)$,

gdzie $k = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ i $\mathbf{K} = \{\mathcal{C}_{[X]} \mid X \in \mathcal{X}\}$.

Przez $\mathrm{Con}_{\mathbf{Q}(\mathbf{K})} \mathcal{G}$ oznaczamy kratę kongruencji *względnych* grafu $\mathcal{G}$, dla których graf ilorazowy należy do $\mathbf{Q}(\mathbf{K})$. Dokładne omówienie pojęcia kongruencji dla systemów algebraicznych znajduje się w podrozdziale 6.3. autoreferatu. Przez $[X]$ oznaczamy najmniejszą wspólną wielokrotność elementów ze zbioru X (dla zbioru pustego przyjmujemy $[\varnothing] = 1$).

W dowodzie głównego rezultatu (Twierdzenie 4.7) opieramy się na następującym lemacie, który jest zmodyfikowaną przez nas wersją [55, Lemma 3].

Lemat 4.6 (H5, Lemma 3.15; H4, Lemma 9.2). *Niech $\mathcal{L}$ będzie nieskończonym zbiorem rekurencyjnym podprosto nierozkładalnych krat skończonych o co najmniej 3 elementach, z których żadne dwie nie zanurzają się w siebie. Niech K będzie kratą i niech zbiór $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L} \cap \mathbf{S}(K)$ będzie taki, że $K \leqslant_s \prod\{L \mid L \in \mathcal{L}_0\}$.*

(i) Jeśli zbiór $\mathcal{L}_0$ jest rekurencyjnie przeliczalny ale nie rekurencyjny, to zbiór wszystkich skończonych podkrat K jest rekurencyjnie przeliczalny ale nie rekurencyjny.

(ii) Jeśli zbiór $\mathcal{L}_0$ nie jest rekurencyjnie przeliczalny, to zbiór wszystkich skończonych podkrat K nie jest rekurencyjnie przeliczalny.

Twierdzenie 4.7 (H5, Theorem 3.16). *Istnieje klasa $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{C}$, dla której zbiór typów izomorfizmu klasy podkrat skończonych* $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ *jest rekurencyjnie przeliczalny ale nie rekurencyjny.*

Dowód. Niech $X \subseteq \omega \backslash \{0, 1, 2\}$ będzie zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym, ale nie rekurencyjnym. Stosujemy Stwierdzenie 4.4 do klasy $\{K_n \mid n \in X\}$, gdzie K_n jest jak na rysunku 4 i otrzymujemy, że istnieje podklasa $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{C}$, dla której

$$\mathrm{Lq}(\mathbf{K}) \cong \prod_{n \in X} \mathrm{Sub}(K_n).$$

Wtedy zbiór $\mathcal{L} = \{\mathrm{Sub}(K_n) \mid n > 2\}$ zawiera kraty spełniające założenia Lematu 4.6, co zostało pokazane w [55, Lemma 17-18]. Dla zbioru $\mathcal{L}_0 = \{\mathrm{Sub}(K_n) \mid n \in X\}$, $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L} \cap \mathbf{S}(\mathrm{Lq}(\mathbf{K}))$ i na mocy Lematu 4.6(i) krata $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ posiada żądane własności. □

Jeśli w dowodzie wykorzystamy zbiór X, który nie jest rekurencyjnie przeliczalny, to otrzymamy

Twierdzenie 4.8 (H5, Theorem 3.17). *Istnieje klasa $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{C}$, dla której zbiór typów izomorfizmu klasy podkrat skończonych* $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ *nie jest rekurencyjnie przeliczalny.*

Podobnie wyglądają dowody dla pozostałych quasirozmaitości rozważanych w pracach [H5] i [H4]. Warto podkreślić, że dowód Nurakunova nie może być wykorzystany dla grupoidów różniczkowych, ponieważ jest w nim istotne założenie, że rozważana algebra nie jest *idempotentna*. Jako wniosek otrzymujemy, że klasa *wszystkich* systemów $\mathbf{K}(\sigma)$ ustalonej sygnatury σ jest Q-uniwersalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje klasa $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$, dla której zbiór wszystkich [typów izomorfizmu] skończonych podkrat kraty $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ nie jest rekurencyjny (Twierdzenie 4.10).

W dowodzie tego twierdzenia opieramy się na następującym znanym wyniku dotyczącym Q-uniwersalnych quasirozmaitości.

Twierdzenie 4.9. [20, Proposition 4.4] *Klasa $\mathbf{K}(\sigma)$ wszystkich systemów sygnatury σ jest Q-uniwersalna wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z poniższych przypadków.*

(i) σ zawiera przynajmniej jeden co najmniej unarny symbol funkcyjny.
(ii) σ zawiera przynajmniej jeden co najmniej binarny symbol relacyjny.
(iii) σ jest co najmniej przeliczalna.

Twierdzenie 4.10 (H5, Theorem 6.3). *Następujące warunki są równoważne dla sygnatury σ.*

(i) Klasa $\mathbf{K}(\sigma)$ wszystkich systemów sygnatury σ jest Q-uniwersalna.
(ii) $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}(\sigma))$ *jest nieskończona.*
(iii) $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}(\sigma))$ *jest mocy 2^κ, gdzie $\kappa = \max\{|\sigma|, \omega\}$.*
(iv) Istnieje klasa $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$, dla której zbiór typów izomorfizmu klasy skończonych podkrat $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ *nie jest rekurencyjnie przeliczalny.*
(v) Istnieje klasa $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$, dla której zbiór typów izomorfizmu klasy skończonych podkrat $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ *jest rekurencyjnie przeliczalny, ale nie jest rekurencyjny.*

Zauważmy, że używając w dowodzie Twierdzenia 4.7 różnych zbiorów X_0 i X_1 otrzymamy różne klasy $\mathbf{K}_0$ i $\mathbf{K}_1$. Stąd otrzymujemy

Twierdzenie 4.11 (H5, Theorem 7.1). *Niech σ będzie sygnaturą taką, że $\mathbf{K}(\sigma)$ jest Q-uniwersalna.*

(i) Istnieje przeliczalnie wiele klas $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$, dla których zbiór typów izomorfizmu klasy podkrat skończonych $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ *jest rekurencyjnie przeliczalny, ale nie rekurencyjny.*
(ii) Istnieje nieprzeliczalnie (continuum) wiele klas $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$, dla których zbiór typów izomorfizmu klasy podkrat skończonych $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ *nie jest rekurencyjnie przeliczalny.*

Obecnie pracujemy nad kolejną publikacją:

[**B1**] A. Basheeva, A. Nurakunov, M. Schwidefsky, A. Zamojska-Dzienio, *Lattices of subclasses. III*, 2017.

Badamy w niej związki między Q-uniwersalnością i własnością Nurakunova dla quasirozmaitości a *nierozstrzygalnością* problemu, czy skończony system należy do tej quasirozmaitości, a także z nieistnieniem niezależnej bazy quasirównościowej. Jest to naturalna kontynuacja badań nad złożonością krat podquasirozmaitości z [H4] i [H5].

5. Kraty podklas

Jak już widzieliśmy, badanie krat podklas ma długą historię. Dotyczy to krat rozmaitości, quasirozmaitości i pseudorozmaitości (te ostatnie m.in. przez P. Agliano i J. B. Nationa w [11]). Jak do tej pory mniej uwagi poświęcano kratom innych klas aksjomatyzowalnych w języku logiki pierwszego rzędu.

W 2007 roku D. E. Pal'chunov udowodnił, że każda co najwyżej przeliczalna krata zupełna jest kratą podklas względnie aksjomatyzowalnych [59, Theorem 8]. Jednocześnie sformułował pytanie czy jest to rezultat prawdziwy dla *dowolnych* krat zupełnych.

Pytanie 5.1. [59, Problem 1] *Czy każda krata zupełna jest kratą klas względnie aksjomatyzowalnych?*

W pracy [H4] udzieliłyśmy pozytywnej odpowiedzi na Pytanie 5.1. Warto podkreślić, że Pal'chunov używał metod *analizy konceptów formalnych* i jego dowód wymaga dobrej znajomości tej teorii, jest długi i nie pozwala pominąć założenia o przeliczalności rozważanej kraty, ale sygnatura składa się tylko z jednego binarnego symbolu relacyjnego. Zaprezentowany przez nas dowód jest krótki i bezpośredni, ale używamy sygnatury relacyjnej nieskończonej. Dodatkowo, pytanie Pal'chunova zainspirowało nas do badania różnych krat podklas dla prerozmaitości, w szczególności krat (względnych) podrozmaitości $\mathrm{Lv}(\mathbf{K})$, krat (względnych) podquasirozmaitości $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$, krat podprerozmaitości $\mathrm{Lp}(\mathbf{K})$ i krat finitarnych podprerozmaitości $\mathrm{Lp}^{\omega}(\mathbf{K})$ dla prerozmaitości $\mathbf{K}$. Przez finitarną prerozmaitość rozumiemy klasę zamkniętą ze względu na podsystemy i produkty proste skończonej liczby systemów.

5.1. **Systemy relacyjne jednoelementowe.** Przez $\mathbf{T}(\sigma)$ oznaczamy rozmaitość σ-systemów zdefiniowanych przez równość $\forall xy\ x = y$. Tu widać dobrze ważną różnicę między algebrami i systemami relacyjnymi. Zauważmy, że w przypadku algebr system jednoelementowy jest algebrą trywialną, ale jeśli w sygnaturze występują symbole relacyjne, to klasa $\mathbf{T}(\sigma)$ jest nietrywialna. Dzięki swej prostocie, jednoelementowe systemy relacyjne są bardzo przydatne przy dowodzeniu różnych wyników w teorii quasirozmaitości, wiele ogólnych rezultatów zostało osiągniętych najpierw dla takich systemów.

W rozdziale 4. w [H4] opisujemy dokładniej interesujące nas jednoelementowe systemy relacyjne. Ogólny kontekst jest następujący: $\sigma = \{p_i \mid i \in I\}$ jest pewną sygnaturą składającą się tylko z unarnych symboli relacyjnych. Dla każdego zbioru $K \subseteq I$ przez $\mathcal{A}_K$ oznaczamy system z $\mathbf{T}(\sigma)$ taki, że $\mathcal{A}_K \models \forall x\ p_i(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i \in K$, czyli $\mathbf{T}(\sigma)$ składa się z izomorficznych kopii systemów $\mathcal{A}_K$, $K \subseteq I$.

Weźmy pewną przestrzeń domknięcia $\langle X, C\rangle$ i wprowadźmy sygnaturę

$$\sigma(X) = \{p_x \mid x \in X\}.$$

Niech $\Sigma(X, C)$ składa się [w ogólnym przypadku, nieskończonych] implikacji postaci

$$\forall x \bigwedge_{a \in A} p_a(x) \to p_b(x), \quad A \subseteq X,\ b \in C(A).$$

B. Banaschewski i H. Herrlich w [12] pokazali, że klasa jest prerozmaitością wtedy i tylko wtedy, gdy może być zdefiniowana przez nieskończone implikacje. Otrzymujemy stąd, że $\mathrm{Mod}\big(\Sigma(X, C)\big)$ i $\mathbf{K}(X, C) = \mathrm{Mod}\big(\Sigma(X, C)\big) \cap \mathbf{T}\big(\sigma(X)\big)$ są prerozmaitościami. Prerozmaitość $\mathbf{K}(X, C)$ składa się z izomorficznych kopii systemów postaci $\mathcal{A}_B$ dla $B \in \mathbb{L}(X, C)$. Jeśli przestrzeń domknięcia $\langle X, C\rangle$ jest algebraiczna i będziemy rozpatrywać skończone podzbiory $A \subseteq X$ w implikacjach $\Sigma(X, C)$, to otrzymamy quasirozmaitość $\mathbf{A}(X, C)$.

5.2. **Reprezentacja przez kraty podklas.** Stwierdzenie 5.2 ([H4, Proposition 5.1]) pozwala rozwiązać problem Pal'chunova oraz odgrywa podstawową rolę przy badaniu krat podklas względnych w prerozmaitościach. Wynik ten był wcześniej znany (Gorbunov [27, Example 4.9]), jednak nasz dowód wykorzystujący jednoelementowe systemy relacyjne opisane powyżej, jest krótki, bezpośredni i elegancki. Przez L^{∂} oznaczamy kratę *dualną* do kraty L, zaś przez $\mathrm{Sub}_c(L)$ kratę wszystkich podpółkrat dolnych w L, zupełnych ze względu na operację $\wedge$.

Stwierdzenie 5.2 (H4, Proposition 5.1). *Niech L będzie kratą zupełną. Wtedy istnieją: sygnatura σ składająca się tylko z unarnych symboli relacyjnych oraz prerozmaitość $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{T}(\sigma)$, dla których zachodzi, że $L^{\partial} \cong \mathrm{Lv}(\mathbf{K})$ i $\mathrm{Sub}_c(L) \cong \mathrm{Lp}(\mathbf{K})$.*

Dowód. W dowodzie Stwierdzenia 5.2 kluczowe jest zdefiniowanie izomorfizmów odpowiednich krat. Ponieważ L jest kratą zupełną, to istnieje przestrzeń domknięcia $\langle X, C\rangle$ taka, że $L \cong \mathbb{L}(X, C)$ (załóżmy, że izomorfizm krat określony jest przez ψ). Niech $\sigma = \sigma(X)$ i $\mathbf{K} = \mathbf{K}(X, C)$. Wtedy $\mathbf{K}$ jest prerozmaitością i odwzorowanie

$$\varphi\colon \mathbb{L}(X, C) \to \mathrm{Lv}(\mathbf{K}); \quad B \mapsto \{\mathcal{A}_F \in \mathbf{T}(\sigma) \mid F \in \mathbb{L}(X, C) \text{ i } B \subseteq F\},$$

jest dualnym izomorfizmem krat.

Otrzymujemy również, że przekształcenie

$$\varphi'\colon \mathrm{Sub}_c(L) \to \mathrm{Lp}(\mathbf{K}); \quad B \mapsto \{\mathcal{A}_{\psi(b)} \in \mathbf{T}(\sigma) \mid b \in B\},$$

jest izomorfizmem krat. □

Dla prerozmaitości finitarnych otrzymujemy następujący rezultat.

Stwierdzenie 5.3 (H4, Proposition 5.2). *Dla dowolnej półkraty $\langle S, \wedge, 1\rangle$ z jedynką, istnieją: sygnatura σ składająca się tylko z unarnych symboli relacyjnych oraz finitarna prerozmaitość $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{T}(\sigma)$ takie, że* $\mathrm{Sub}(S) \cong \mathrm{Lp}^{\omega}(\mathbf{K})$.

Podobne wyniki można otrzymać dla sygnatury składającej się z jednego symbolu relacji unarnej i stałych, a także dla sygnatury składającej się tylko ze stałych (nasze wyniki z pracy przeglądowej [58]).

Wykorzystując podobne metody, jak w dowodzie Stwierdzenia 5.2 otrzymujemy m.in. ważny rezultat, że krata podzbiorów algebraicznych dowolnej kraty algebraicznej jest Q-kratą. Mimo, że był on znany już wcześniej (V. A. Gorbunov i V. I. Tumanov [31, Theorem 2.3]) to zaprezentowany przez nas w [H4] nowy dowód jest krótki i bezpośredni.

Stwierdzenie 5.4 (H4, Proposition 5.10). *Niech L będzie kratą algebraiczną. Wtedy istnieją: sygnatura σ składająca się tylko z symboli relacyjnych unarnych oraz quasirozmaitość $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{T}(\sigma)$ takie, że $L^{\partial} \cong \mathrm{Lv}(\mathbf{K})$,* $\mathrm{Sp}(L) \cong \mathrm{Lq}(\mathbf{K})$, $\mathrm{Sub}_c(L) \cong \mathrm{Lp}(\mathbf{K})$ *oraz* $\mathrm{Sub}(L) \cong \mathrm{Lp}^{\omega}(\mathbf{K})$.

Otrzymane rezultaty pozwoliły na dalsze badanie własności krat podklas względnych prerozmaitości i porównanie ich z własnościami krat podquasirozmaitości. Przypomnijmy, że kraty podquasirozmaitości są sumowo półdystrybutywne oraz dualnie algebraiczne [29, Theorem 5.1.12, Proposition 5.1.1]. Wykorzystując powyższe twierdzenia o reprezentacji pokazałyśmy w Przykładach 5.12 i 5.13 w [H4], że kraty postaci $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ i $\mathrm{Lp}(\mathbf{K})$ dla prerozmaitości $\mathbf{K}$ nie są ani sumowo półdystrybutywne ani nawet dolnie ciągłe (czyli tym bardziej nie są dualnie algebraiczne), a więc istnieją takie prerozmaitości $\mathbf{K}$, że żadna z krat postaci: $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$, $\mathrm{Lp}(\mathbf{K})$, $\mathrm{Lp}^{\omega}(\mathbf{K})$ nie zanurza się w Q-kratę. Można także zauważyć, że nie istnieje nietrywialna równość kratowa, która byłaby spełniona przez wszystkie kraty prerozmaitości.

A co najważniejsze, odpowiedź na pytanie Pal'chunova także wynika ze Stwierdzenia 5.2. Warto w tym miejscu podkreślić, że rezultaty Pal'chunova były szeroko dyskutowane w gronie uczestników seminarium z *Teorii Modeli* kierowanego przez Ju. Ł. Ershova i E. A. Palyutina w Instytucie Sobolewa Rosyjskiej Akademii Nauk w Nowosybirsku. Także nasze wyniki referowałam na tym seminarium podczas mojego pobytu w Nowosybirsku i zostały one bardzo dobrze przyjęte. Uznano je za jeden z najważniejszych rezultatów uzyskanych w 2012 r. w Instytucie Sobolewa http://a-server.math.nsc.ru/IM/Nauka/rez2012podr.html (po rosyjsku).

Definicja 5.5. [59, Definition 26] Niech $\mathbf{K}$ będzie klasą systemów sygnatury σ i niech Δ będzie zbiorem zdań pierwszego rzędu tej samej sygnatury. Klasa $\mathbf{K}'$ jest *aksjomatyzowalna w* $\mathbf{K}$ *względem* Δ, jeśli $\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cap \mathrm{Mod}(\Sigma)$ dla pewnego zbioru $\Sigma \subseteq \Delta$.

Zgodnie z przytoczoną definicją otrzymujemy, że klasa $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ jest aksjomatyzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest aksjomatyzowalna w $\mathbf{K}(\sigma)$ względem zbioru wszystkich zdań pierwszego rzędu. Co więcej, dla dowolnego zbioru zdań Δ i klasy $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$, zbiór wszystkich klas w $\mathbf{K}$ aksjomatyzowalnych względem Δ jest kratą zupełną, którą D. E. Pal'chunov oznaczył przez $\mathbb{A}(\mathbf{K}, \Delta)$. Następne twierdzenie jest odpowiedzią na Pytanie 5.1 i stanowi istotne uogólnienie głównego wyniku w [59].

Twierdzenie 5.6 (H4, Corollary 6.2). *Dla dowolnej kraty zupełnej L, istnieją: sygnatura σ, prerozmaitość $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ i zbiór Δ zdań pierwszego rzędu sygnatury σ, takie że $L \cong \mathbb{A}(\mathbf{K}, \Delta)$.*

Aby dowieść Twierdzenie 5.6 wystarczy przyjąć sygnaturę σ i prerozmaitość $\mathbf{K}$, jak w dowodzie Stwierdzenia 5.2, a zbiór Δ to zbiór równości sygnatury σ. Podkreślmy, że D. E. Pal'chunov udowodnił odpowiednik Twierdzenia 5.6 dla kraty zupełnej *co najwyżej przeliczalnej* (i sygnatury z jednym binarnym symbolem relacyjnym) [59, Theorem 8].

Jako wnioski otrzymujemy:

Wniosek 5.7 (H4, Corollary 6.3). *Klasa krat dualnie algebraicznych i klasa krat postaci $\mathbb{A}(\mathbf{K}, \Delta)$ dla quasirozmaitości $\mathbf{K}$ i zbioru zdań pierwszego rzędu Δ pokrywają się.*

Wniosek 5.8. [59, Theorem 9], (H4, Corollary 6.4) Dla dowolnej kraty skończonej L, istnieją: skończona sygnatura σ i zbiór Δ zdań pierwszego rzędu sygnatury σ, takie że $L \cong \mathbb{A}(\mathbf{K}(\sigma), \Delta)$.

5.3. **Twierdzenia o charakteryzacji.** Ważną rolę w badaniu krat podklas w przypadku quasirozmaitości odgrywają *twierdzenia o charakteryzacji* udowodnione przez V. A. Gorbunova i V. I. Tumanova [32, 33] (także [29, Section 5.2]) oraz *twierdzenia o redukcji* udowodnione przez V. A. Gorbunova [28] (także [29, Section 5.5]). Pozwalają one m.in. reprezentować dowolne Q-kraty jako kraty podzbiorów algebraicznych postaci $\mathrm{Sp}(A, E)$ dla pewnej kraty algebraicznej A i relacji E zwrotnej i przechodniej (oraz dystrybutywnej), a także jako granice odwrotne krat postaci $\mathrm{Sp}(A, E)$, gdzie krata algebraiczna A ma prostszą strukturę niż w twierdzeniu o charakteryzacji. Podzbiory algebraiczne kraty A należące do $\mathrm{Sp}(A, E)$ są *zamknięte ze względu na relację* E, czyli jeśli $(a, b) \in E \subseteq A^2$ i $a \in B$ dla $B \in \mathrm{Sp}(A, E)$, to $b \in B$.

Tego typu twierdzenia pozwalają m.in. zredukować problem Birkhoffa-Mal'ceva do opisu par (A, E), gdzie A jest reprezentowana jako krata kongruencji względnych systemu wolnego w odpowiedniej quasirozmaitości, zaś E reprezentuje *relację zanurzania zdefiniowaną na* A. Przykładowo:

Twierdzenie 5.9. [29, Corollaries 5.2.2, 5.2.5] *Niech* $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ *będzie quasirozmaitością i niech* $\mathcal{F}_{\mathbf{K}}(\omega) \in \mathbf{K}$ *będzie* $\mathbf{K}$*-wolnym systemem nieskończonego przeliczalnego rzędu, zaś* $\mathcal{F}_{\mathbf{K}}(n)$ $\mathbf{K}$*-wolnym systemem rzędu* $0 < n < \omega$. *Wtedy*

$$\mathrm{Lq}(\mathbf{K}) \cong \mathrm{Sp}\big(\mathrm{Con}_{\mathbf{K}}\, \mathcal{F}_{\mathbf{K}}(\omega), \mathrm{E}\big) \cong \varprojlim \mathrm{Sp}\big(\mathrm{Con}_{\mathbf{K}}\, \mathcal{F}_{\mathbf{K}}(n), \mathrm{E}\big).$$

Relacja E jest zdefiniowana następująco: dla $\theta, \theta' \in \mathrm{Con}\,\mathcal{A}$, gdzie $\mathcal{A} \in \mathbf{K}(\sigma)$, $\theta'\,\mathrm{E}\,\theta$, jeśli $\mathcal{A}/\theta'$ zanurza się w $\mathcal{A}/\theta$. Relację E nazywamy *relacją zanurzania*, jest to relacja dystrybutywna.

W rozdziałach 7. i 8. [H4] uogólniłyśmy wcześniejsze wyniki z [32, 33, 28] na kraty (finitarnych) prerozmaitości, w ten sposób, że wyniki dla krat quasirozmaitości, rozmaitości, pseudoquasirozmaitości i pseudorozmaitości są wnioskami wypływającymi bezpośrednio z naszych twierdzeń. W dowodach rozważamy kraty postaci $\mathrm{Sub}_c(A, \mathrm{E})$, zaś dla krat finitarnych prerozmaitości - kraty $\mathrm{Sub}(A, \mathrm{E})$. Przyjmujemy także aksjomat wyboru dla klas (CAC 1) podany w [76, Section II.2] (zarówno $\mathrm{Lp}(\mathbf{K})$, jak i $\mathrm{Lp}^{\omega}(\mathbf{K})$ mogą być klasami właściwymi).

Reprezentacja krat podklas za pomocą krat kongruencji stale wzbudza zainteresowanie. Ostatnio ukazało się kilka prac dotyczących tej tematyki. Na przykład, A. M. Nurakunov [57] pokazał, że każda krata podrozmaitości jest dualnie izomorficzna z kratą kongruencji pewnego monoidu z dwoma dodatkowymi operacjami unarnymi w typie a K. Adaricheva i J. B. Nation [8] udowodnili, że Q-kraty są dokładnie kratami dualnie izomorficznymi z kratami kongruencji półkrat z dodatkowymi operacjami unarnymi spełniającymi pewne własności. Natomiast J. B. Nation otrzymał w [53], że krata kongruencji dowolnej półkraty z operatorami jest dualnie izomorficzna z kratą podprerozmaitości.

6. Pojęcia techniczne

W latach trzydziestych XX wieku A. I. Mal'cev [47, 48] badał klasę półgrup zanurzalnych w grupy i otrzymał, że jest to klasa definiowalna przez quasirówności (czyli *quasirozmaitość*). Opisał także nieskończoną bazę quasirównościową dla tej quasirozmaitości półgrup oraz udowodnił, że ta klasa nie jest skończenie bazowalna (czyli nie można użyć skończonego zbioru quasirówności). Te wyniki były inspiracją rozwoju algebry uniwersalnej. W pracy [49] Mal'cev pokazał, że rezultaty uzyskane dla półgrup są częścią większej teorii. Z udowodnionego w [49] twierdzenia charakteryzującego quasirozmaitości wynika, że dla klasy systemów algebraicznych $\mathcal{K}$ zamkniętej ze względu na produkty zredukowane, klasa systemów zanurzalnych w systemy z $\mathcal{K}$ jest quasirozmaitością.

6.1. **Klasy względnie aksjomatyzowalne.** Dla dowolnej sygnatury σ, przez $\mathbf{K}(\sigma)$ oznaczamy klasę wszystkich systemów typu σ, przez σ^F zbiór symboli funkcyjnych z σ, przez σ^P zbiór symboli relacyjnych z σ, zaś przez σ^C zbiór symboli stałych σ. Będziemy rozważać *systemy algebraiczne* czyli niepuste zbiory, na których mogą być zdefiniowane zarówno operacje, jak i relacje. Systemy algebraiczne nazywamy *algebrami*, gdy występują w nich tylko operacje, zaś *systemami relacyjnymi*, gdy określone są tylko relacje. Wprowadzając potrzebne definicje i twierdzenia korzystamy głównie z książek: V. A. Gorbunova [29], A. I. Mal'ceva [51], ale także C. C. Changa i H. J. Keislera [18] oraz W. Hodgesa [37]. *Równością* sygnatury σ nazywamy formułę

$$\forall \overline{x}\ A_1(\overline{x})\ \&\ \ldots\ \&\ A_n(\overline{x}),$$

zaś *quasirównością* sygnatury σ formułę

$$\forall \overline{x}\ A_1(\overline{x})\ \&\ \ldots\ \&\ A_n(\overline{x}) \longrightarrow A(\overline{x}),$$

gdzie $A_1(\overline{x})$, ..., $A_n(\overline{x})$, $A(\overline{x})$ są formułami *atomowymi*, czyli formułami postaci

$$p\big(t_1(\overline{x}), \ldots, t_k(\overline{x})\big),$$

dla $p \in \sigma^P \cup \{=\}$ i termów $t_1(\overline{x})$, ..., $t_k(\overline{x})$.

Niech $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$. Powiemy, że $\mathbf{K}'$ jest klasą $\mathbf{K}$-*quasirównościową* [$\mathbf{K}$-*równościową*, odpowiednio], jeśli $\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cap \mathrm{Mod}(\Sigma)$ dla pewnego zbioru Σ quasirówności [równości] sygnatury σ. *Quasirozmaitością* [*rozmaitością*] sygnatury σ jest klasa $\mathbf{K}(\sigma)$-quasirównościowa [$\mathbf{K}(\sigma)$-równościowa]. Oczywiście, każda rozmaitość jest quasirozmaitością. Zauważmy, że w przypadku sygnatury złożonej tylko z symboli relacyjnych studiowanie rozmaitości takich obiektów nie daje nam zbyt wiele np. dla binarnego symbolu relacyjnego R mamy tylko 3 nietrywialne równości: $\forall x\ R(x,x)$, $\forall xy\ R(x,y)$, $\forall xy\ x = y$.

Niech $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ [$\mathrm{Lv}(\mathbf{K})$, odpowiednio] oznacza zbiór wszystkich $\mathbf{K}$-quasirównościowych [$\mathbf{K}$-równościowych, odpowiednio] podklas $\mathbf{K}$. Ze względu na relację zawierania, $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ [$\mathrm{Lv}(\mathbf{K})$, odpowiednio] tworzy kratę zupełną nazywaną *kratą podquasirozmaitości* [*podrozmaitości*] klasy $\mathbf{K}$.

Odwzorowanie $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dwóch systemów algebraicznych sygnatury σ nazywamy *homomorfizmem*, jeśli dla każdego $f \in \sigma^F$, $p \in \sigma^P$, $c \in \sigma^C$ i dowolnych $a_i \in A$, zachodzą:

- $\varphi\big(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)\big) = f^{\mathcal{B}}\big(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)\big)$;
- jeśli $\mathcal{A} \models p^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_m)$ to $\mathcal{B} \models p^{\mathcal{B}}\big(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)\big)$;
- $\varphi(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$.

Dla klasy $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$, używamy następujących oznaczeń: $\mathbf{Q}(\mathbf{K})$ na najmniejszą quasirozmaitość, zaś $\mathbf{V}(\mathbf{K})$ na najmniejszą rozmaitość, zawierającą klasę $\mathbf{K}$. Przez $\mathbf{H}(\mathbf{K})$ oznaczamy klasę systemów z $\mathbf{K}(\sigma)$, które są obrazami homomorficznymi systemów z $\mathbf{K}$; przez $\mathbf{P}(\mathbf{K})$ [$\mathbf{P}^{\omega}(\mathbf{K})$, odpowiednio] - klasę systemów z $\mathbf{K}(\sigma)$ izomorficznych z produktami prostymi [skończonej liczby] systemów z $\mathbf{K}$; przez $\mathbf{P}_r(\mathbf{K})$ - klasę systemów z $\mathbf{K}(\sigma)$ izomorficznych z produktami zredukowanymi systemów z $\mathbf{K}$; przez $\mathbf{P}_u(\mathbf{K})$ - klasę systemów z $\mathbf{K}(\sigma)$ izomorficznych z ultraproduktami systemów z $\mathbf{K}$; przez $\mathbf{P}_s(\mathbf{K})$ [$\mathbf{P}_s^{\omega}(\mathbf{K})$, odpowiednio] - klasę systemów z $\mathbf{K}(\sigma)$ izomorficznych z produktami podprostymi [skończonej liczby] systemów z $\mathbf{K}$; przez $\mathbf{L}_s(\mathbf{K})$ - klasę systemów z $\mathbf{K}(\sigma)$ izomorficznych z granicami nadprostymi systemów z $\mathbf{K}$ [29, Section 1.2.5]; a przez $\mathbf{S}(\mathbf{K})$ - klasę systemów z $\mathbf{K}(\sigma)$ izomorficznych z podsystemami systemów z $\mathbf{K}$. Przez $\mathbf{K}_{\mathrm{Fin}}$ oznaczamy klasę wszystkich *skończonych* systemów z klasy $\mathbf{K}$.

Łatwo sprawdzić, że dla dowolnej klasy $\mathbf{K}$ zachodzi inkluzja: $\mathbf{SP}(\mathbf{K}) \subseteq \mathbf{P}_s\mathbf{S}(\mathbf{K})$. Jeśli $\mathcal{A}$ jest produktem podprostym systemów $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, zapisujemy to w następujący sposób: $\mathcal{A} \leqslant_s \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

Twierdzenie Mal'ceva [49] charakteryzuje quasirozmaitości w następujący sposób

$$\mathbf{Q}(\mathbf{K}) = \mathbf{SP}_r(\mathbf{K}),$$

zaś Twierdzenie Birkhoffa [14] (wersja dla systemów algebraicznych udowodniona w [51, 29]) charakteryzuje rozmaitości:

$$\mathbf{V}(\mathbf{K}) = \mathbf{HSP}(\mathbf{K}).$$

Inną charakteryzację quasirozmaitości podali G. Grätzer i H. Lakser [34]

$$\mathbf{Q}(\mathbf{K}) = \mathbf{SPP}_u(\mathbf{K}),$$

z której wynika, że jeśli $\mathbf{K}$ jest skończonym zbiorem skończonych systemów, to $\mathbf{Q}(\mathbf{K}) = \mathbf{SP}(\mathbf{K})$. Z kolei V. A. Gorbunov i V. I. Tumanov [33] (także [29, Theorem 2.3.6]) znaleźli następujący opis

$$\mathbf{Q}(\mathbf{K}) = \mathbf{L}_s\mathbf{SP}(\mathbf{K}) = \mathbf{L}_s\mathbf{P}_s(\mathbf{K}),$$

który pozwala charakteryzować quasirozmaitości za pomocą pewnych podzbiorów krat kongruencji. Systemy, które otrzymujemy w wyniku działania operatora $\mathbf{L}_s$ są granicami prostymi nad skierowanymi rodzinami systemów algebraicznych, w których homomorfizmy są *na*. Oczywiście, występują też inne charakteryzacje quasirozmaitości, są one dokładnie omówione w [29, Section 2.3].

Istotną rolę w naszych badaniach będą odgrywały *pseudorozmaitości* algebr, czyli klasy algebr *skończonych* tego samego typu, zamknięte ze względu na operatory $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$ i $\mathbf{P}^{\omega}$. Dla każdej rozmaitości $\mathbf{V}$, klasa $\mathbf{V}_{\mathrm{Fin}}$ jest

pseudorozmaitością. Kraty pseudorozmaitości algebr skończonych były badane m.in. przez P. Agliano i J. B. Nationa [11].

6.2. **Prerozmaitości.** Klasa $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ jest *prerozmaitością*, jeśli $\mathbf{K} = \mathbf{SP}(\mathbf{K}) = \mathbf{P}_s\mathbf{S}(\mathbf{K})$, zaś *finitarną prerozmaitością*, jeśli $\mathbf{K} = \mathbf{SP}^\omega(\mathbf{K}) = \mathbf{P}_s^\omega\mathbf{S}(\mathbf{K})$.

Pojęcie prerozmaitości finitarnej (w przypadku sygnatury bez symboli relacyjnych) wprowadził A. Vernitski w [92, 93]. B. Banaschewski i H. Herrlich w [12] pokazali, że klasa jest prerozmaitością wtedy i tylko wtedy, gdy może być zdefiniowana przez nieskończone implikacje.
V. A. Gorbunov w [29, Section 2.5] badał względne quasirozmaitości i tzw. klasy Birkhoffa, w [H4] otrzymałyśmy analogiczne wyniki dla prerozmaitości.

Definicja 6.1. [H4, Definition 3.2] Niech $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$. Wtedy $\mathbf{K}'$ jest [*finitarną*] $\mathbf{K}$-*prerozmaitością*, jeśli $\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cap \mathbf{A}$ dla pewnej [finitarnej] prerozmaitości $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$.

Równoważnie, $\mathbf{K}'$ jest [finitarną] $\mathbf{K}$-prerozmaitością wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cap \mathbf{SP}(\mathbf{K}')$ [$\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cap \mathbf{SP}^\omega(\mathbf{K}')$, odpowiednio].
V. A. Gorbunov wprowadził także definicję *pseudo-quasirozmaitości* (odpowiednika *pseudorozmaitości*), która w naszym języku wygląda następująco:

Definicja 6.2. [H4, Definition 3.3] Klasa $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)_{\mathrm{Fin}}$ jest *pseudo-quasirozmaitością*, jeśli jest finitarną prerozmaitością.

Przez $\mathrm{Lp}(\mathbf{K})$ [$\mathrm{Lp}^\omega(\mathbf{K})$, odpowiednio] będziemy oznaczać klasę wszystkich [finitarnych] $\mathbf{K}$-prerozmaitości. Może to być *klasa właściwa*. Zarówno $\mathrm{Lp}(\mathbf{K})$, jak i $\mathrm{Lp}^\omega(\mathbf{K})$ tworzą kraty zupełne ze względu na relację zawierania.

6.3. **Kongruencje systemów algebraicznych.**

Definicja 6.3. [29, Section 1.4.1] Dla systemu algebraicznego $\mathcal{A} \in \mathbf{K}(\sigma)$, *kongruencją* θ na $\mathcal{A}$ jest ciąg $\big(\theta(p) \mid p \in \sigma^P \cup \{=\}\big)$, dla którego zachodzą :

(i) $\theta(p) \subseteq A^{\nu(p)}$, gdzie $\nu(p)$ oznacza liczbę argumentów w p, dla dowolnego $p \in \sigma^P \cup \{=\}$;
(ii) $\theta(=)$ jest relacją równoważności na A;
(iii) jeśli $\mathcal{A} \models p(a_1, \ldots, a_m)$ to $(a_1, \ldots, a_m) \in \theta(p)$ dla dowolnego $p \in \sigma^P$ takiego, że $\nu(p) = m$;
(iv) jeśli $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \theta(=)$, to $\big(f(a_1, \ldots, a_n), f(b_1, \ldots, b_n)\big) \in \theta(=)$ dla dowolnego $f \in \sigma^F$ takiego, że $\nu(f) = n$;
(v) jeśli $(a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m) \in \theta(=)$ i $(a_1, \ldots, a_m) \in \theta(p)$, to $(b_1, \ldots, b_m) \in \theta(p)$ dla dowolnego $p \in \sigma^P$ takiego, że $\nu(p) = m$.

Łatwo sprawdzić, że dla dowolnego homomorfizmu systemów algebraicznych $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, ciąg $\ker\varphi$ zdefiniowany następująco dla dowolnego $p \in \sigma^P \cup \{=\}$ takiego, że $\nu(p) = m$,

$$(\ker\varphi)(p) = \{(a_1, \ldots, a_m) \in A^m \mid \mathcal{B} \models p(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m))\},$$

jest kongruencją (nazywaną *jądrem* homomorfizmu φ). Kongruencje na systemie $\mathcal{A}$ są dokładnie jądrami homomorfizmów z $\mathcal{A}$ [29, Proposition 1.4.4].

Dla systemu $\mathcal{A} \in \mathbf{K}(\sigma)$ i klasy $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ przez $\mathrm{Con}\,\mathcal{A}$ oznaczamy zbiór wszystkich kongruencji na $\mathcal{A}$. Jeśli $\theta \in \mathrm{Con}\,\mathcal{A}$ to system ilorazowy $\mathcal{A}/\theta = \langle A/\theta; \sigma\rangle$ definiujemy następująco:

$$\begin{aligned}
&f\big(a_1/\theta, \ldots, a_n/\theta\big) = f(a_1, \ldots, a_n)/\theta; && f \in \sigma^F,\ \nu(f) = n;\\
&c^{\mathcal{A}/\theta} = c^{\mathcal{A}}/\theta; && c \in \sigma^C;\\
&\mathcal{A}/\theta \models p\big(a_1/\theta, \ldots, a_m/\theta\big) \text{ jeśli } (a_1, \ldots, a_m) \in \theta(p); && p \in \sigma^P,\ \nu(p) = m.
\end{aligned}$$

Klasa $\mathbf{K}$ nie musi być zamknięta ze względu na obrazy homomorficzne. Można więc rozważać zbiór

$$\mathrm{Con}_{\mathbf{K}}\,\mathcal{A} = \big\{\theta \in \mathrm{Con}\,\mathcal{A} \mid \mathcal{A}/\theta \in \mathbf{K}\big\}$$

uporządkowany częściowo przez relację zawierania (zdefiniowaną po współrzędnych). Jeśli $\mathbf{K}$ jest quasirozmaitością, to $\mathrm{Con}_{\mathbf{K}}\,\mathcal{A}$ jest kratą algebraiczną nazywaną *kratą kongruencji względnych* lub *kratą* $\mathbf{K}$-*kongruencji* systemu $\mathcal{A}$.

6.4. **Półkraty.** Powiemy, że relacja binarna R zdefiniowana na półkracie $\langle S, \wedge\rangle$ jest *dystrybutywna*, jeśli dla dowolnych $a, b, c \in S$ zachodzi: jeśli $(c, a \wedge b) \in R$, to $c = a' \wedge b'$ dla pewnych $a', b' \in S$, takich, że $(a', a) \in R$ i $(b', b) \in R$. Relacja równości $=$ jest dystrybutywna; dowolna krata $\langle L, \leqslant\rangle$ jest dystrybutywna wtedy i tylko, wtedy gdy porządek $\leqslant$ jest relacją dystrybutywną.

Niech $\langle S, \wedge, 1\rangle$ będzie półkratą z jedynką i niech $R \subseteq S^2$. Przez $\mathrm{Sub}(S, R)$ oznaczymy zbiór wszystkich *R-domkniętych podpółkrat* półkraty S; czyli $X \in \mathrm{Sub}(S, R)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

- $\bigwedge F \in X$ dla zbiorów skończonych $F \subseteq X$;
- jeśli $b \in X$ i $(a, b) \in R$ to $a \in X$.

W przypadku kraty L, aby określić $\mathrm{Sub}(L, R)$, bierzemy jej redukt półkratowy (ze względu na operację kresu dolnego). Dla kraty zupełnej L, przez $\mathrm{Sub}_c(L, R)$ oznaczamy zbiór wszystkich *zupełnych R-domkniętych podpółkrat dolnych* w L, przez $\mathrm{Sp}(L, R)$ - zbiór wszystkich R-domkniętych podzbiorów algebraicznych kraty L. W przypadku relacji równości, zamiast $\mathrm{Sub}(L, =)$ [$\mathrm{Sub}_c(L, =)$, $\mathrm{Sp}(L, =)$] piszemy $\mathrm{Sub}(L)$ [$\mathrm{Sub}_c(L)$, $\mathrm{Sp}(L)$]. Jeśli rozważymy relację zawierania, to wszystkie te zbiory tworzą kraty zupełne, gdzie kresem dolnym jest teorio-mnogościowe przecięcie. Kresy górne zdefiniowane są następująco:

- dla $A, B \in \mathrm{Sub}(L, R)$: $A \vee B = \{a \wedge b \mid a \in A,\ b \in B\}$;
- dla $A, B \in \mathrm{Sub}_c(L, R)$: $A \vee B = \{a \wedge b \mid a \in A,\ b \in B\}$;
- dla $A, B \in \mathrm{Sp}(L, R)$: $A \vee B = \{a \wedge b \mid a \in A,\ b \in B\}$, jeśli L jest dodatkowo kratą górnie ciągłą.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Publikacje wchodzące w skład rozprawy doktorskiej:

[**A1**] A.B. Romanowska, A. Zamojska-Dzienio, *Embedding semilattice sums of cancellative modes into semimodules*, Contributions to General Algebra **13** (2001), 295–304. (w spisie literatury pozycja [74])

[**A2**] A.B. Romanowska, A. Zamojska-Dzienio, *Embedding sums of cancellative modes into semimodules*, Czechoslovak Math. J. **55**(4) (2005), 975–991. (w spisie literatury pozycja [75])

[**A3**] A. Zamojska-Dzienio, *Medial modes and rectangular algebras*, Comment. Math. Univ. Carolinae **47**(1) (2006), 21–34. (w spisie literatury pozycja [94])

Publikacje po doktoracie spoza rozprawy habilitacyjnej:

[**A4**] A.B. Romanowska, M. Stronkowski, A. Zamojska-Dzienio, *Embedding sums of cancellative modes into functorial sums*, Demonstratio Math. **44**(3) (2011), 557–569. (w spisie literatury pozycja [73])

[**A5**] A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *Representation of modals*, Demonstratio Math. **44**(3) (2011), 535–556. (w spisie literatury pozycja [60])

[**A6**] A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *On some congruences of power algebras*, Cent. Eur. J. Math. **10**(3) (2012), 987–1003. (w spisie literatury pozycja [61])

[**A7**] A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *Varieties generated by modes of submodes*, Algebra Universalis **68**(3-4) (2012), 221–236. (w spisie literatury pozycja [62])

[**A8**] A.M. Nurakunov, M.V. Semenova, A. Zamojska-Dzienio, *On lattices connected with various types of classes of algebraic structures*, Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki **154**(2) (2012), 167–179. (w spisie literatury pozycja [58])

[**A9**] A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *The lattice of subvarieties of semilattice ordered algebras*, Order **31**(2) (2014), 217–238. (w spisie literatury pozycja [63])

[**A10**] A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *Closure operators on algebras*, Internat.J.Algebra Comput. **25**(6) (2015), 1055–1074. (w spisie literatury pozycja [64])

[**A11**] P. Jedlička, A. Pilitowska, D. Stanovský, A. Zamojska-Dzienio, *The structure of medial quandles*, J.Algebra **443** (2015), 300–334. (w spisie literatury pozycja [39])

[**A12**] P. Jedlička, A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *Free medial quandles*, praca przyjęta w Algebra Universalis (w lipcu 2016, kopia wiadomości od redakcji wśród załączników do Wniosku), http://arxiv.org/abs/1512.06275.

Publikacja [A8] jest artykułem pisanym na zaproszenie Uniwersytetu w Kazaniu w Rosji. Na przełomie września i października 2011 r. odbyła się tam ogólnorosyjska konferencja i warsztaty dla doktorantów instytutów matematycznych różnych oddziałów Rosyjskiej Akademii Nauk. M. Semenova wygłosiła zaproszony wykład *O klasach aksjomatyzowalnych.* Artykuł, rozwijający temat wykładu, ukazał się w tomie pokonferencyjnym i opiera się głównie na wynikach uzyskanych w pracy [H4] oraz na wynikach A. Nurakunova [55, 56, 57]. Nowe rezultaty zawarto w rozdziale 3, gdzie otrzymano wersje Stwierdzeń 5.2 i 5.3 dla sygnatury składającej się z jednego unarnego symbolu relacyjnego i stałych, a także dla sygnatury składającej się tylko ze stałych.

Pozostałe prace dotyczą następujących zagadnień:

1. Zanurzanie algebr modowych w półmoduły;
2. Algebry półkratowo uporządkowane;
3. Algebry podalgebr;
4. Quandle medialne.

1. Zanurzanie algebr modowych w półmoduły. Tematem mojej rozprawy doktorskiej było poszukiwanie odpowiedzi na pytanie postawione przez A. Romanowską i J.D.H. Smitha, czy każda algebra modowa zanurza sie jako podredukt w półmoduł nad przemiennym półpierścieniem. Algebry modowe są to algebry *idempotentne* (każdy podzbiór jednoelementowy jest podalgebrą) i *entropiczne* (dowolne dwie operacje bazowe są ze sobą przemienne). Te własności można wyrazić przez równości:

$$\omega(x,\dots,x) \approx x, \qquad \text{(idempotentność)},$$
$$\omega(\phi(x_{11},\dots,x_{n1}),\dots,\phi(x_{1m},\dots,x_{nm})) \approx \phi(\omega(x_{11},\dots,x_{1m}),\dots,\omega(x_{n1},\dots,x_{nm})), \qquad \text{(entropiczność)},$$

dla dowolnych operacji bazowych ω (m-argumentowej) i ϕ (n-argumentowej). Prace [A1]–[A3] wchodzą w skład doktoratu. W pierwszych dwóch opracowano technikę zanurzania algebr modowych z pewnych (quasi)rozmaitości w półmoduły nad pierścieniami przemiennymi z jedynką. Metoda ta oparta jest na dwóch faktach: skracalne algebry modowe zanurzają się w moduły nad odpowiednimi pierścieniami [72] a suma Płonki modułów nad pierścieniem R jest półmodułem nad tym samym pierścieniem R. Zaproponowana technika jest dosyć uniwersalna, bo wiele algebr modowych można reprezentować za pomocą sum Lallementa, które po spełnieniu dodatkowych warunków zanurzają się jako podalgebry w sumy Płonki. Tak jest np. w przypadku, gdy w algebrze modowej istnieje kongruencja taka, że klasy abstrakcji są skracalne, zaś algebra ilorazowa jest: półkratą [A1], idempotentną półgrupą normalną [A2], algebrą modową medialną lub rektangularną [A3]. W pracy [A4] pokazaliśmy między innymi, jak dalej uogólnić wyniki o zanurzaniu. Pełnej odpowiedzi na pytanie Romanowskiej i Smitha udzielił M. Stronkowski w [90].

2. Algebry podalgebr. Prace [A6]–[A7] dotyczą poszukiwania odpowiedzi na pytanie o równości spełnione w rozmaitościach generowanych przez algebry podalgebr dla algebr modowych. Algebry potęgowe zostały wprowadzone przez B. Jónssona i A. Tarskiego [40]. Dla danego zbioru A oznaczymy przez $\mathcal{P}_{>0}A$ rodzinę wszystkich niepustych podzbiorów A. Dla dowolnej n-arnej operacji $\omega\colon A^n \to A$ zdefiniujemy *operację kompleksową* (*lub potęgową*) $\omega\colon \mathcal{P}_{>0}A^n \to \mathcal{P}_{>0}A$ w następujący sposób: $\omega(A_1,\dots,A_n) := \{\omega(a_1,\dots,a_n) \mid a_i \in A_i\}$, gdzie $\varnothing \neq A_1,\dots,A_n \subseteq A$. *Algebrą potęgową* (*kompleksową lub globalną*) algebry (A,Ω) jest algebra $(\mathcal{P}_{>0}A,\Omega)$.

Ściśle związane z algebrami podzbiorów są algebry podalgebr. Niech AS będzie zbiorem wszystkich (niepustych) podalgebr algebry (A,Ω). Ogólnie, rodzina AS nie musi być zamknięta ze względu na operacje kompleksowe. Jeśli jednak jest, to (AS,Ω) jest podalgebrą algebry $(\mathcal{P}_{>0}A,\Omega)$ i jest nazywana *algebrą podalgebr* algebry (A,Ω) [69], [71]. Algebry potęgowe modów są entropiczne, ale bardzo rzadko idempotentne.

Natomiast dla każdej algebry modowej istnieje jej algebra podalgebr, która również jest idempotentna i entropiczna.

G. Grätzer i H. Lakser [35] scharakteryzowali równości spełnione w rozmaitości $\mathcal{V}\Sigma$ generowanej przez wszystkie algebry potęgowe algebr z danej rozmaitości $\mathcal{V}$, w odniesieniu do równości prawdziwych w $\mathcal{V}$. Powiemy, że term t jest *liniowy*, jeśli wszystkie zmienne występują w t co najwyżej raz. Równość $t \approx u$ jest *liniowa*, jeśli oba termy t i u są liniowe.

Twierdzenie 6.4 (Grätzer-Lakser). *Niech $\mathcal{V}$ będzie rozmaitością algebr. Rozmaitość $\mathcal{V}\Sigma$ spełnia dokładnie te równości, które są konsekwencjami równości liniowych prawdziwych w $\mathcal{V}$.*

Oczywiście, entropiczność jest przykładem równości liniowej, zaś idempotentność nie jest równością liniową, ale idempotentność może być konsekwencją równości liniowych. Nie jest znana charakteryzacja podobna do tej otrzymanej w Twierdzeniu 6.4 dla rozmaitości $\mathcal{V}\mathcal{S}$ generowanej przez algebry podalgebr algebr należących do $\mathcal{V}$. W szczególności nie jest znana pełna odpowiedź na następujące pytanie postawione w [68]:

Pytanie 6.5. *Czy rozmaitość $\mathcal{M}\mathcal{S}$ generowana przez algebry podmodów z rozmaitości $\mathcal{M}$ spełnia dokładnie konsekwencje równości liniowych i idempotentnych prawdziwych w $\mathcal{M}$?*

Pytanie 6.5 pociąga za sobą mocniejszą hipotezę

Hipoteza 6.6. [10] *Idempotentna rozmaitość $\mathcal{V}$, w której dla każdej algebry istnieje jej algebra podalgebr, jest równa rozmaitości $\mathcal{V}\mathcal{S}$ generowanej przez algebry podalgebr algebr należących do $\mathcal{V}$ wtedy i tylko wtedy, gdy baza równościowa $\mathcal{V}$ złożona jest jedynie z równości liniowych i idempotentnych.*

W pracy [A6] udało nam się potwierdzić powyższą hipotezę w przypadku rozmaitości algebr modowych, dla których rozmaitość $\mathcal{M}\Sigma$ jest lokalnie skończona. Wykorzystałyśmy zupełnie inną metodę dowodu niż we wcześniejszych próbach np. [10]. Rozszerzyłyśmy sygnaturę algebry potęgowej dodając operację teoriomnogościowej sumy zbiorów, w ten sposób otrzymując *rozszerzoną algebrę podzbiorów*. Następnie wykorzystałyśmy znalezioną przez nas najmniejszą kongruencję, dla której algebra ilorazowa wyjściowej algebry jest idempotentna czyli *idempotentną replikę*. W ostatnim etapie, rozważałyśmy redukty ze względu na początkowe operacje otrzymanych w ten sposób algebr ilorazowych i rozważałyśmy tylko równości nie zawierające operacji sumy. To podejście i nasz rezultat zostały zaprezentowane przeze mnie na plakacie podczas 6. Europejskiego Kongresu Matematycznego w Krakowie.

W pracy [A7] opisałyśmy inne kongruencje rozszerzonych algebr podzbiorów, dla których algebra ilorazowa jest idempotentna. Co ważne, tych kongruencji nie można otrzymać metodami zaproponowanymi przez C. Brinka [17]. Opisane przez nas kongruencje są w pełni niezmiennicze, odegrają więc istotną rolę przy opisie kraty podrozmaitości dla półkratowo uporządkowanych algebr modowych tzw. *modałów* [69].

3. Algebry półkratowo uporządkowane. Prace [A5], [A9], [A10] dotyczą algebr uporządkowanych półkratowo. Niech $\mathcal{U}$ będzie rozmaitością wszystkich algebr typu $\tau\colon \Omega \to \mathbb{N}$ i niech $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ będzie podrozmaitością $\mathcal{U}$. Algebrę $(A, \Omega, +)$ nazywamy *półkratowo uporządkowaną $\mathcal{V}$-algebrą*, jeśli (A, Ω) należy do rozmaitości $\mathcal{V}$, $(A, +)$ jest (górną) półkratą oraz operacje ze zbioru Ω są rozdzielne względem operacji $+$, tzn. dla każdej $0 \neq n$-arnej operacji $\omega \in \Omega$, i $x_1, \ldots, x_i, y_i, \ldots, x_n \in A$ zachodzi $\omega(x_1, \ldots, x_i + y_i, \ldots, x_n) = \omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \omega(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)$, dla dowolnych $1 \leqslant i \leqslant n$ (np. [16], [19], [25]). Klasa wszystkich półkratowo uporządkowanych $\mathcal{V}$-algebr tworzy rozmaitość oznaczaną $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$. Rozszerzone algebry potęgowe są przykładami półkratowo uporządkowanych algebr a rozszerzone algebry potęgowe algebr wolnych odgrywają szczególną rolę w tej teorii. W szczególności, rozszerzona algebra potęgowa $(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mathcal{V}}(X), \Omega, \cup)$ skończonych niepustych podzbiorów algebry $F_{\mathcal{V}}(X)$ ma własność uniwersalności w rozmaitości $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$ [A9, Theorem 3.1], gdzie $F_{\mathcal{V}}(X)$ oznacza algebrę wolną w rozmaitości $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, o przeliczalnym (nieskończonym) zbiorze generatorów X. W [A9] opisałyśmy algebry wolne w rozmaitości $\mathcal{S}_{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{U}}$, uogólniając rezultaty z [45, 95, 70] dla półkratowo uporządkowanych półgrup oraz modałów.

Twierdzenie 6.7 (A9, Corollary 3.3). *Algebra $(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mathcal{V}}(X), \Omega, \cup)$ jest wolna nad zbiorem X w rozmaitości $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mathcal{V}}(X), \Omega, \cup) \in \mathcal{S}_{\mathcal{V}}$.*

Otrzymujemy stąd, że algebra $(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mathcal{U}}(X), \Omega, \cup)$ jest wolna nad zbiorem X w rozmaitości $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$. Głównym celem pracy [A9] było opisanie kraty podrozmaitości wszystkich półkratowo uporządkowanych $\mathcal{U}$-algebr

ustalonego typu w odniesieniu do kraty podrozmaitości wszystkich $\mathfrak{V}$-algebr. Wynik ten jest zawarty w [A9, Theorem 5.12].

W pracy [A10] badałyśmy związki między operatorami domknięcia zdefiniowanymi na algebrze (A, Ω) a kongruencjami rozszerzonej algebry potęgowej określonej na (A, Ω). Inspiracją były wyniki M. Novotnego [54] i J. Fuchsa [24] dotyczące tzw. *dopuszczalnych operatorów domknięcia* określonych na monoidach i ich zastosowań w teorii języków, a także zastosowanie takich operatorów przez Kuřila i Poláka [45] do opisu rozmaitości półkratowo uporządkowanych półgrup. W szczególności, uzyskałyśmy wzajemnie jednoznaczne odpowiedniości między zbiorami kongruencji w pełni niezmienniczych i zbiorami operatorów domknięcia spełniającymi dodatkowe własności. Pozwoliło nam to uzyskać alternatywny opis kraty podrozmaitości algebr półkratowo uporządkowanych w stosunku do wyników [A9]. W pewnych przypadkach opis z [A10] jest prostszy, pokazałyśmy m.in. jak można go wykorzystać w przypadku idempotentnych podrozmaitości półkratowo uporządkowanych algebr.

Półkratowo uporządkowane algebry modowe czyli *modały*, były wcześniej badane m.in. przez A. Romanowską i J.D.H. Smitha w [69, 71] oraz K. Kearnesa w [42]. W pracy [A5] opisałyśmy algebry wolne w dowolnej rozmaitości modałów oraz znalazłyśmy nową reprezentację modałów wykorzystując rozszerzone algebry potęgowe modów. Wyniki uzyskane w tej pracy były inspiracją do szerszego spojrzenia na algebry półkratowo uporządkowane, co zaowocowało pracami [A9] i [A10]. Dodatkowo, dzięki badaniu równości spełnionych w modałach oraz znalezieniu idempotentnej repliki dla rozszerzonych algebr potęgowych modów, mogłyśmy zmierzyć się z hipotezą 6.6 w [A6].

4. Quandle medialne. Praca [A11] poświęcona jest *quandlom medialnym*. *Quandle* są algebrami, które pojawiają się w topologii jako niezmienniki węzłów [41]. Dokładniej, *quandlem* $(Q, \cdot)$ nazywamy *idempotentną, lewo-rozdzielną lewą quasigrupę*, czyli algebrę spełniającą dla dowolnych elementów $x, y, z \in Q$ następujące warunki:

- $xx = x$,
- $x(yz) = (xy)(xz)$,
- równanie $xu = y$ ma jednoznaczne rozwiązane $u \in Q$.

Dla dowolnej grupy A, grupoid określony na tym samym zbiorze z operacją sprzężenia jest przykładem quandla. Ogólnie, struktura pewnych quandli jest bardzo ściśle związana z modułami nad przemiennymi pierścieniami.

W naszych badaniach zajęliśmy się *quandlami medialnymi*, czyli *entropicznymi* tzn. spełniającymi dodatkowo równość $(xy)(zt) \approx (xz)(yt)$. Jest to więc ważna klasa algebr modowych. Podstawowych przykładów dostarczają quandle *afiniczne* $(A, \cdot)$ skonstruowane z grupy abelowej $(A, +)$, w których operacja $\cdot$ zdefiniowana jest następująco: $a \cdot b = a - f(a) + f(b)$, gdzie f jest automorfizmem grupy A. Okazuje się, że takie quandle pełnią postawową rolę w teorii quandli medialnych. Głównym wynikiem w pracy [A11] było pokazanie, że każdy quandel medialny jest sumą quandli afinicznych skonstruowaną w pewien określony sposób [Theorem 3.14]. Rozkład na sumę otrzymujemy w wyniku działania szczególnej podgrupy grupy automorfizmów quandla medialnego tzw. *grupy przesunięć*. Co ważne, taką konstrukcję można przeprowadzić w jednoznaczny sposób.

Otrzymane twierdzenie o reprezentacji pozwoliło nam rozwiązać bardzo istotny problem w teorii klasyfikacji quandli skończonych i rozstrzygnąć, kiedy dwa quandle medialne są izomorficzne. Dzięki temu mogliśmy opracować skuteczne algorytmy służące do policzenia (nieizomorficznych) quandli medialnych niskich rzędów i poprawić znane wcześniej wyniki.

Grupy przesunięć, w przypadku wolnych quandli medialnych, są wolnymi $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-modułami. W pracy [A12] konstruujemy wolne quandle medialne wykorzystując takie moduły. Jako wniosek otrzymujemy, że rozmaitość quandli medialnych jest generowana przez quandle afiniczne. Następnie, badamy dwie podrozmaitości quandli medialnych, które odgrywają istotną rolę przy rozważaniu skończonych quandli medialnych. Są to tzw. quandle n-symetryczne oraz quandle m-reduktywne. W obu przypadkach, także konstruujemy algebry wolne i badamy ich własności.

Współpraca rozpoczęta w ramach projektu "Algebra ogólna i zastosowania" w Polsko-Czeskim Programie Wykonawczym na lata 2013-14 (7AMB13PL013 i 8829/R13/R14) jest kontynuowana. Do publikacji wysłano także pracę:

[**B2**] P. Jedlička, A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *Subdirectly irreducible medial quandles*, 2015, (http://arxiv.org/abs/1511.06529).

Obecnie przygotowujemy pracę:

[**B3**] P. Jedlička, A. Pilitowska, D. Stanovský, A. Zamojska-Dzienio, *Subquandles of affine quandles*, 2017.

6. Referaty wygłoszone na konferencjach naukowych

- *On some reducts of semimodules*, konferencja AAA59 Workshop on General Algebra i CYA15 Conference of Young Algebraists, Poczdam, Niemcy, 2000.
- *Embedding sums of cancellative modes over Ω-normal bands into some semimodules*, konferencja AAA62 Workshop on General Algebra, Linz, Austria, 2001.
- *Embedding modes into semimodules*, konferencja AAA64 Workshop on General Algebra, Ołomuniec, Czechy, 2002.
- *Embedding medial modes into semimodules*, 42nd Summer School on General Algebra and Ordered Sets, Mala Moravka, Czechy, 2004.
- *Embedding modes into semimodules*, International Algebraic Conference, Ekaterinburg, Rosja, 2005.
- *On lattices embeddable into lattices of order convex sets. Case of pseudo N-free posets*, konferencja AAA73 Workshop on General Algebra i CYA22 Conference of Young Algebraists, Klagenfurt, Austria, 2007.
- *On lattices embeddable into convexity lattices of some posets*, konferencja „Algorithmic Complexity and Universal Algebra, Szeged, Węgry, 2007.
- *On some congruences of power algebras*, konferencja AAA78 Workshop on General Algebra, Bern, Szwajcaria, 2009.
- *Free modals*, konferencja AAA80 Workshop on General Algebra, Będlewo, Polska, 2010.
- *A reduction theorem for finitary prevarieties*, konferencja AAA81 Workshop on General Algebra, Salzburg, Austria, 2011.
- *A reduction theorem for pseudo-quasivariety lattices*, konferencja OAL 2.0, Second International Conference on Order, Algebra and Logics, Kraków, 2011.
- *A reduction theorem for prevarieties*, konferencja Mal'tsev Meeting, Nowosybirsk, Rosja, 2011.
- *Representing lattices by lattices of subclasses*, konferencja AAA83 Workshop on General Algebra, Nowy Sad, Serbia, 2012.
- *On idempotent factors of power algebras*, konferencja AAA84 Workshop on General Algebra, Drezno, Niemcy, 2012.
- *Semilattice ordered algebras I - free algebras*, Conference on Universal Algebra and Lattice Theory, Szeged, Węgry, 2012.
- Plakat *Identities in varieties generated by algebras of subalgebras*, 6th European Congress of Mathematics, Kraków, 2012.
- *On quasivarieties of graphs*, The 50th Summer School on Algebra and Ordered Sets, Novy Smokovec, Słowacja, 2012.
- *On subvarieties of semilattice ordered algebras I*, konferencja AAA85 Workshop on General Algebra, Luksemburg, 2013.
- *Free semilattice ordered algebras and their subreducts*, konferencja AAA87 Workshop on General Algebra, Linz, Austria, 2014.
- *The structure of medial quandles*, konferencja Algebras and Clones Fest, Praga, Czechy, 2014.
- *On complexity of quasivariety lattices*, konferencja AAA89 Workshop on General Algebra, Drezno, Niemcy, 2015.

- *O quandlach medialnych*, konferencja Oblicza Algebry, Kraków, 2015.
- *On congruences of medial quandles*, konferencja Loops'15, Ohrid, Macedonia, 2015.
- *On complexity of lattices of subclasses* (wykład plenarny), konferencja Algebra Across the Borders, Astana, Kazachstan, 2015.
- *On quasivarieties of graphs*, konferencja AAA92 Workshop on General Algebra, Praga, Czechy, 2016.

7. Referaty na seminariach w jednostkach zagranicznych

- *Embedding modes into semimodules*, Technische Universität, Darmstadt, Niemcy, 2003.
- *Modes*, seminarium Algebra i Logika, Instytut Matematyki im. Sobolewa, Syberyjski Oddział Rosyjskiej Akademii Nauk, Nowosybirsk, Rosja, 2007.
- *Axiomatizable classes of structures*, seminarium Teoria Modeli, Instytut Matematyki im. Sobolewa, Syberyjski Oddział Rosyjskiej Akademii Nauk, Nowosybirsk, Rosja, 2011.
- *Modes and modals. Varieties generated by modes of submodes*, seminarium Algebra Uniwersalna i Teoria Krat, Instytut Matematyki im. Sobolewa, Syberyjski Oddział Rosyjskiej Akademii Nauk, Nowosybirsk, Rosja, 2011.
- *Semilattice ordered algebras*, seminarium KAFKA (seminarium z Kombinatoryki, Algorytmiki i Algebr Skończonych), Uniwersytet Karola, Praga, Czechy, 2013.
- *Medial quandles and SIE groupoids*, seminarium Algebra Uniwersalna i Teoria Krat, Instytut Matematyki im. Sobolewa, Syberyjski Oddział Rosyjskiej Akademii Nauk, Nowosybirsk, Rosja, 2013.
- *On complexity of lattices of subclasses*, seminarium KAFKA (seminarium z Kombinatoryki, Algorytmiki i Algebr Skończonych), Uniwersytet Karola, Praga, Czechy, 2014.

8. Wyjazdy w ramach współpracy naukowej

- Technische Universität, Darmstadt, Niemcy, listopad 2003.
- Instytut Matematyki im. Sobolewa, Syberyjski Oddział Rosyjskiej Akademii Nauk, Nowosybirsk, Rosja, 4 wizyty: marzec 2007, lipiec 2010, październik 2011, wrzesień 2013.
- Uniwersytet Karola, Praga, Czechy, 3 wizyty: marzec 2013, marzec 2014, lipiec 2014.
- Uniwersytet Nazarbajewa, Astana, Kazachstan, wrzesień 2015.

9. Udział w krajowych i międzynarodowych projektach badawczych

- Polsko-Czeski Program Wykonawczy w ramach Umowy między Rządem Rzeczypospolitej Polskiej a Rządem Republiki Czeskiej o współpracy w dziedzinie nauki i techniki, program MNiSW nr 7AMB13PL013/8829/R13/R14, 2013-2014, *Algebra ogólna i zastosowania*, koordynator strony polskiej.
- Międzynarodowy projekt badawczy INTAS nr 03-51-4110 koordynowany przez Unię Europejską, *Universal Algebra and Lattice Theory*, 2004-2007, wykonawca.
- Grant promotorski J.M. Rektora Politechniki Warszawskiej, *O zanurzaniu algebr modowych w półmoduły*, 2003-2004, wykonawca.
- 17 grantów Politechniki Warszawskiej w latach 2000-2016, wykonawca.

10. Nagrody i wyróżnienia

- Nagroda J.M. Rektora Politechniki Warszawskiej za wyróżnioną pracę doktorską, Warszawa, 2004.
- Nagroda zespołowa J.M. Rektora Politechniki Warszawskiej II stopnia za osiągnięcia naukowe w roku 2005, Warszawa, 2006.

- Indywidualne, naukowe stypendium wyjazdowe dla nauczyciela akademickiego Politechniki Warszawskiej przyznane w drodze konkursu nr CAS/11/POKL ogłoszonego przez Centrum Studiów Zaawansowanych PW, 2010.
- Stypendium Fundacji Dynastia z Moskwy program wizyt krótkoterminowych w Rosji naukowców zagranicznych, http://science-visits.mccme.ru/calendar.html, 2011.
- Nagroda zespołowa J.M. Rektora Politechniki Warszawskiej I stopnia za osiągnięcia naukowe w latach 2010-2011, Warszawa, 2012.
- Stypendium RP na staż naukowy w Rosji, program stypendialny Biura Uznawalności Wykształcenia i Współpracy Miedzynarodowej, 2013.
- Nagroda indywidualna J.M. Rektora Politechniki Warszawskiej III stopnia za osiągnięcia naukowe w latach 2012-2013, Warszawa, 2014.

11. Wskaźniki służące do oceny dorobku naukowego

Sumaryczny impact factor według listy Journal Citation Reports (JCR), zgodnie z rokiem opublikowania (lub wg dostępnych danych): 5,117

Liczba cytowań publikacji według bazy:

Web of Science: 23

Scopus: 31

MathSciNet: 40

Indeks Hirscha według bazy Web of Science i Scopus: 3

Literatura

[1] M. E. Adams, K. V. Adaricheva, W. Dziobiak, A. V. Kravchenko, *Open questions related to the problem of Birkhoff and Maltsev*, Studia Logica **78** (2004), 357–378.

[2] M. E. Adams, W. Dziobiak, *Q-universal quasivarieties of algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 1053–1059.

[3] M. E. Adams, W. Dziobiak, *Finite-to-finite universal quasivarieties are Q-universal*, Algebra Universalis **46** (2001), 253–283.

[4] K. V. Adaricheva, W. Dziobiak, V. A. Gorbunov, *Finite atomistic lattices that can be represented as lattices of quasivarieties*, Fund.Math. **142** (1993), 19–43.

[5] K. V. Adaricheva, W. Dziobiak, V. A. Gorbunov, *Algebraic atomistic lattices of quasivarieties*, Algebra and Logic **36** (1997), 605–620.

[6] K. V. Adaricheva, V. A. Gorbunov, *Equational closure operator and forbidden semidistributive lattices*, Siberian Math. J. **30** (1989), 831–849.

[7] K. V. Adaricheva, V. A. Gorbunov, V. I. Tumanov, *Join-semidistributive lattices and convex geometries*, Adv. Math. **173** (2003), 1–49.

[8] K. V. Adaricheva, J. B. Nation, *Lattices of quasi-equational theories as congruence lattices of semilattices with operators I-II*, Internat. J. Algebra Comput. **22**(7) (2012).

[9] K. V. Adaricheva, J. B. Nation, *Chapters 3.–6.*, w *Lattice Theory: Special Topics and Applications*, vol. 2, G. Gratzer and F. Wehrung, eds., Birkhäuser, 2016.

[10] K. V. Adaricheva, A. Pilitowska, D. Stanovský, *Complex algebras of subalgebras*, Algebra and Logic **47** (2008), 367–383.

[11] P. Agliano, J. B. Nation, *Lattices of pseudovarieties*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **46** (1989), 177–183.

[12] B. Banaschewski, H. Herrlich, *Subcategories defined by implications*, Houston J. Math. **2** (1976), 149–171.

[13] Ts. Ch.-D. Batueva, *Lattices of convex subsets*, Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform. **11** (2011), 85–94; English translation in J. Math. Sci., New York **195** (2013), 771–778.

[14] G. Birkhoff, *Universal algebra*, in: Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress (Montreal, 1945), The University Toronto Press, 1946, 310–326.

[15] G. Birkhoff, M. K. Bennett, *The convexity lattice of a poset*, Order **2** (1985), 223–242.

[16] S. L. Bloom, *Varieties of ordered algebras*, Journal of Computer and System Sciences **13** (1976), 200–212.

[17] C. Brink, *Power structures*, Algebra Universalis **30**(2) (1993), 177–216.

[18] C. C. Chang and H. J. Keisler, *Model Theory*, Third ed., Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam, 1990.

[19] G. Czédli, A. Lenkehegyi, *On classes of ordered algebras and quasiorder distributivity*, Acta Sci. Math. **46** (1983), 41–54.

[20] W. Dziobiak, *Selected topics in quasivarieties of algebraic systems*, manuscript of the lecture notes delivered at the Workshop on Computational Algebra and Applications to Semigroup Theory held at the Center of Algebra of Lisbon University, Portugal, 17-21 November, 1997, 61 pages.

[21] W. Dziobiak, *On atoms in the lattice of quasivarieties*, Algebra Universalis **24** (1987), 32–35.
[22] P. H. Edelman, R. E. Jamison, *The theory of convex geometries*, Geom. Dedicata **19** (1985), 247-270.
[23] R. Freese, J. Ježek, and J. B. Nation, *Free Lattices*, Mathematical Surveys and Monographs 42, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
[24] J. Fuchs, *On closure operators on monoids*, Arch. Math. 4, Scripta Fac. Sci. Nat. UJEP Brunensis XII (1976), 225–232.
[25] L. Fuchs, *On partially ordered algebras* I, Colloquium Mathematicum **14** (1966), 113–130.
[26] V. A. Gorbunov, *Lattices of quasivarieties*, Algebra and Logic **15** (1976), 275–288.
[27] V. A. Gorbunov, *Structure of lattices of varieties and of lattices of quasivarieties: similarity and difference. II*, Algebra and Logic **34** (1995), 203–218.
[28] V. A. Gorbunov, *Structure of lattices of varieties and of lattices of quasivarieties: similarity and difference. III*, Algebra and Logic **34** (1995), 359–370.
[29] V. A. Gorbunov, *Algebraic Theory of Quasivarieties*, Plenum, New York, 1998.
[30] V. A. Gorbunov, D. M. Smirnov, *Finite algebras and the general theory of quasivarieties*, in: *Finite algebra and multiple-valued logic* (Szeged, 1979), 325–332, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai **28**, North-Holland, 1981.
[31] V. A. Gorbunov, V. I. Tumanov, *A class of lattices of quasivarieties*, Algebra and Logic **19** (1980), 38–52.
[32] V. A. Gorbunov, V. I. Tumanov, *On the structure of lattices of quasivarieties*, Sov. Math. Dokl. **22** (1980), 333–336.
[33] V. A. Gorbunov and V. I. Tumanov, *Structure of lattices of quasivarieties*, Proceedings of the Institute of Mathematics SB RAS **2** (1982), 12–44.
[34] G. Grätzer, H. Lakser, *A note on the implicational class generated by a class of structures*, Canadian Math.Bulletin **16** (1973), 603–605.
[35] G. Grätzer, H. Lakser, *Identities for globals (complex algebras) of algebras*, Colloq. Math. **56** (1988), 19–29.
[36] G. Grätzer, *General Lattice Theory. Second edition*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.
[37] W. Hodges, *Model Theory*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 42, Cambridge University Press, 1993.
[38] V. I. Igoshin, *Review A384*, Ref. Zh. Mat. **2**, 1976.
[39] P. Jedlička, A. Pilitowska, D. Stanovský, A. Zamojska-Dzienio, *The structure of medial quandles*, J.Algebra **443** (2015), 300–334.
[40] B. Jónsson, A. Tarski, *Boolean algebras with operators I, II*, Amer. J. Math. **73** (1951), 891–939; Amer. J. Math. **74** (1952), 127–162.
[41] D. Joyce, *Classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Applied Algebra **23** (1982), 37–65.
[42] K. Kearnes, *Semilattice modes I: the associated semiring*, Algebra Universalis **34** (1995), 220–272.
[43] B. Korte, L. Lovasz, and R. Schrader, *Greedoids*, Berlin, Springer-Verlag, 1991.
[44] A. V. Kravchenko, *On the lattices of quasivarieties of differential groupoids*, Comment. Math. Univ. Carolin. **49** (2008), 11–17.
[45] M. Kuřil, L. Polák, *On varieties of semilattice-ordered semigroups*, Semigroup Forum **71** (2005), 27–48.
[46] B. Leclerc, B. Monjardet, *Orders "C.A.C."*, Fund. Math. **79** (1973), 11–22.
[47] A. I. Mal'cev, *On inclusion of associative systems in groups*, Mat.Sb. **6** (1939), 331–336.
[48] A. I. Mal'cev, *On inclusion of associative systems in groups, II*, Mat.Sb. **8** (1940), 251–264.
[49] A. I. Mal'cev, *Several remarks on quasivarieties of algebraic systems*, Algebra Logika **5** (1966), 3–9.
[50] A. I. Mal'cev, *On some borderline problems of algebra and mathematical logic*, in: Proceedings of the International Mathematical Congress (Moscow, 1966), Mir Publishers, 1968, 217–231.
[51] A. I. Mal'cev, *Algebraic Systems*, Springer, Berlin, 1973.
[52] J. C. C. McKinsey, *The decision problem for some classes of sentences without quantifiers*, J.Symb.Log. **8** (1943), 61-76.
[53] J. B. Nation, *Lattices of theories in languages without equality*, Notre Dame J. of Formal Logic **54** (2013), 167–175.
[54] M. Novotný, *On some relations defined by languages*, Prague Studies in Mathematical Linguistics **4** (1973), 157–170.
[55] A. M. Nurakunov, *Unreasonable lattices of quasivarieties*, Internat. J. Algebra Comput. **22** (2012), 1–17.
[56] A. M. Nurakunov, *Finite lattices as relative congruence lattices of finite algebras*, Algebra Universalis **57** (2007), 207–214.
[57] A. M. Nurakunov, *Equational theories as congruences of enriched monoids*, Algebra Universalis **58** (2008), 357–372.
[58] A. M. Nurakunov, M. V. Semenova, A. Zamojska-Dzienio, *On lattices connected with various types of classes of algebraic structures*, Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki **154** (2012), 167–179.
[59] D. E. Pal'chunov, *Lattices of relatively axiomatizable classes*, Lecture Notes in Artificial Intelligence **4390** (2007), 221–239.
[60] A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *Representation of modals*, Demonstratio Math. **44** (2011), 535–556.
[61] A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *On some congruences of power algebras*, Cent. Eur. J. Math. **10** (2012), 987–1003.
[62] A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *Varieties generated by modes of submodes*, Algebra Universalis **68** (2012), 221–236.
[63] A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *The lattice of subvarieties of semilattice ordered algebras*, Order **31** (2014), 217–238.
[64] A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *Closure operators on algebras*, Internat. J. Algebra Comput. **25** (2015), 1055–1074.
[65] M. Pouzet, N. Zaguia, *N-free extensions of posets. Note on a theorem of P. A. Grillet*, Contributions to Discrete Mathematics **1** (2006), 80–87.
[66] A. Pultr, V. Trnková, *Combinatorial, Algebraic and Topological Representations of Groups, Semigroups and Categories*, North-Holland, Amsterdam, 1980.
[67] I. Rival, *Stories about order and the letter* N *(en)*, Combinatorics and ordered sets (Arcata, Calif., 1985), 263–285, Contemp. Math. **57**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
[68] A. B. Romanowska, *Semi-affine modes and modals*, Scientiae Mathematicae Japonicae **61** (2005), 159–194.
[69] A. B. Romanowska, J. D. H. Smith, *Modal Theory*, Heldermann Verlag, Berlin, 1985.
[70] A. B. Romanowska, J. D. H. Smith, *Subalgebra systems of idempotent entropic algebras*, J. Algebra **120** (1989), 247–262.

[71] A. B. Romanowska, J. D. H. Smith, *Modes*, World Scientific, Singapore, 2002.
[72] A. B. Romanowska, J. D. H. Smith, *Embedding sums of cancellative modes into functorial sums of affine spaces*, in *Unsolved Problems on Mathematics for the 21st Century, a Tribute to Kiyoshi Iseki's 80th Birthday* (eds. J. M. Abe and S. Tanaka), IOS Press, Amsterdam, 2001, 127–139.
[73] A. B. Romanowska, M. Stronkowski, A. Zamojska-Dzienio, *Embedding sums of cancellative modes into functorial sums*, Demonstratio Math. **44** (2011), 557–569.
[74] A. B. Romanowska, A. Zamojska-Dzienio, *Embedding semilattice sums of cancellative modes into semimodules*, Contributions to General Algebra **13** (2001), 295–304.
[75] A. B. Romanowska, A. Zamojska-Dzienio, *Embedding sums of cancellative modes into semimodules*, Czechoslovak Math. J. **55** (2005), 975–991.
[76] H. Rubin, J. E. Rubin, *Equivalents of the Axiom of Choice, II*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 116, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1985.
[77] M. V. Sapir, *The lattice of quasivarieties of semigroups*, Algebra Universalis **21** (1985), 172–180.
[78] L. Santocanale, F. Wehrung, *Varieties of lattices with geometric descriptions*, Order **30** (2013), 13–38.
[79] M. V. Schwidefsky, *Complexity of quasivariety lattices*, Algebra and Logic **54** (2015), 245–257.
[80] M. Schwidefsky, A. Zamojska-Dzienio, *Lattices of subclasses. II*, Internat. J. Algebra Comput. **24** (2014), 1099–1126.
[81] M. V. Semenova, *Lattices of suborders*, Siberian Math. J. **40** (1999), 577–584.
[82] M. V. Semenova, F. Wehrung, *Sublattices of lattices of order-convex sets. I. The main representation theorem*, J. Algebra **277** (2004), 825–860.
[83] M. V. Semenova, F. Wehrung, *Sublattices of lattices of order-convex sets. II. Posets of finite height*, Internat. J. Algebra Comput. **13** (2003), 543–564.
[84] M. V. Semenova, F. Wehrung, *Sublattices of lattices of order-convex sets. III. Case of linearly ordered sets*, Internat. J. Algebra Comput. **14** (2004), 357–387.
[85] M. V. Semenova, A. Zamojska-Dzienio, *On lattices embeddable into lattices of order-convex sets. Case of trees*, Internat. J. Algebra Comput. **17** (2007), 1667–1712.
[86] M. V. Semenova, A. Zamojska-Dzienio, *Lattices of order-convex sets of forests*, Order **27** (2010), 383–404.
[87] M. V. Semenova, A. Zamojska-Dzienio, *On lattices embeddable into lattices of order-convex sets II. Star-like posets*, Order **28** (2011), 523–548.
[88] M. V. Semenova, A. Zamojska-Dzienio, *Lattices of subclasses*, Siberian Math. J. **53** (2012), 889–905.
[89] S. V. Sizyĭ, *Quasivarieties of graphs*, Siberian Math. J. **35** (1994), 783–794.
[90] M. M. Stronkowski, *Cancellation in entropic algebras*, Algebra Universalis **60** (2009), 439–468.
[91] V. I. Tumanov, *Finite distributive lattices of quasivarieties*, Algebra and Logic **22** (1983), 168–181.
[92] A. Vernitski, *Finite quasivarieties and self-referential conditions*, Studia Logica **78** (2004), 337–348.
[93] A. Vernitski, *On using the join operation to define classes of algebras*, Comm. Algebra **36** (2008), 1088–1096.
[94] A. Zamojska-Dzienio, *Medial modes and rectangular algebras*, Comment. Math. Univ. Carolinae **47** (2006), 21–34.
[95] X. Z. Zhao, *Idempotent semirings with a commutative additive reducts*, Semigroup Forum **64** (2002), 289–296.

Anna Zamojska-Dzienio