Egzamin dyplomowy licencjacki – kierunek „Matematyka i analiza danych”

Przykładowe zagadnienia egzaminacyjne

1. Podstawowe pojęcia teorii mnogości:
   - relacja równoważności i klasy abstrakcji
   - porządek częściowy i liniowy
   - moc zbioru, równoliczność, przeliczalność, nieprzeliczalność, twierdzenie Cantora.
2. Przestrzenie liniowe
   - liniowa niezależność, baza przestrzeni, wymiar przestrzeni
   - przestrzenie skończenie i nieskończenie wymiarowe.
3. Przekształcenia liniowe i układy równań liniowych
   - macierz przekształcenia, rząd i wyznacznik macierzy, twierdzenie Kroneckera-Capelliego, twierdzenie Craméra
   - wartości i wektory własne oraz algorytmy ich wyznaczania
   - podobieństwo macierzy, diagonalizowalność
   - rozkłady macierzy (np. QR, LU)
   - algorytmy numeryczne rozwiązywania układów równań liniowych.
4. Podstawowe pojęcia teorii grafów:
   - podstawowe własności drzew, spójność grafów
   - cykle Eulera i Hamiltona
   - grafy planarne.
5. Ciągi i szeregi liczbowe i funkcyjne
   - kryteria zbieżności i rodzaje zbieżności
   - szeregi potęgowe
   - własności granic ciągów i szeregów funkcyjnych.
6. Funkcje ciągłe i różniczkowalne (jednej i wielu zmiennych) oraz ich własności
   - twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów, własność Darboux
   - twierdzenie Rolle’a, Lagrange’a, Taylora
   - gradient, macierz Hessego, warunki konieczne i dostateczne istnienia ekstremum.
7. Całka Riemanna i Lebesgue'a
   - twierdzenie Fubiniego, twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki
   - zamiana zmiennych (np. współrzędne biegunowe, sferyczne)
   - metody całkowania numerycznego funkcji jednej i wielu zmiennych.
8. Równania różniczkowe
   - istnienie i jednoznaczność rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych w przestrzeniach euklidesowych
   - stabilność rozwiązań
   - układy równań różniczkowych liniowych i algorytmy ich rozwiązywania.
9. Przestrzenie Banacha i Hilberta
   - norma , iloczyn skalarny, ortogonalność
   - przestrzenie ciągowe i funkcyjne.

10. Operatory i funkcjonały liniowe ciągłe
    - norma operatora, przestrzeń operatorów
    - różne rodzaje zbieżności
    - operatory normalne, samosprzężone, unitarne.
11. Funkcje holomorficzne
    - holomorficzność a różniczkowalność w sensie rzeczywistym
    - twierdzenia i wzory całkowe Cauchy'ego.
12. Podstawowe zagadnienia analizy numerycznej
    - pojęcia związane z dokładnością obliczeń numerycznych.
    - interpolacja
    - właściwości algorytmów sortujących (złożoność, stabilność).
13. Optymalizacja
    - metoda Newtona rozwiązywania zadań optymalizacji bez ograniczeń
    - metody gradientów sprzężonych
    - warunki konieczne optymalności dla zadań z ograniczeniami.
14. Przestrzenie probabilistyczne i zmienne losowe
    - rozkłady prawdopodobieństwa (dyskretne i ciągłe),
    - gęstość, dystrybuanta, charakterystyki rozkładów
    - prawdopodobieństwo warunkowe i niezależność.
15. Twierdzenia graniczne rachunku prawdopodobieństwa
    - rodzaje zbieżności ciągów zmiennych losowych
    - prawa wielkich liczb i Centralne Twierdzenia Graniczne.
16. Procesy stochastyczne
    - sposoby opisu procesów stochastycznych
    - podstawowe klasy procesów stochastycznych (procesy stacjonarne, proces Poissona, proces Wienera, procesy gaussowskie)
    - twierdzenia graniczne dla łańcuchów Markowa.
17. Estymacja i weryfikacja hipotez
    - podstawowe własności estymatorów, zbalansowanie efektu obciążenia i wariancji
    - metody wyznaczania estymatorów
    - estymacja przedziałowa
    - podstawowe pojęcia teorii weryfikacji hipotez, lemat Neymana-Pearsona.
18. Metody analizy danych
    - metody uczenia maszynowego (nadzorowane i nienadzorowane)
    - drzewa klasyfikacyjne i metody pokrewne
    - metody estymacji i testowania w modelu liniowym
    - metody regresyjne dla odpowiedzi binarnej
    - metody selekcji zmiennych w zadaniach klasyfikacji i regresji.

UWAGA

Każda odpowiedź powinna zawierać: definicje podstawowych pojęć, najważniejsze twierdzenia, przykłady i kontrprzykłady (w tym nietrywialne), zastosowania i algorytmy (m.in. złożoność).