Prof. dr hab. Krzysztof Frączek
Wydział Matematyki i Informatyki UMK
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń

Toruń, 31 sierpnia 2017

Recenzja w postępowaniu o nadanie tytułu naukowego profesora dr. Jackowi Graczykowi

Dr Jacek Graczyk jest wybitnym, światowej klasy specjalistą z zakresu jednowymiarowej gładkiej dynamiki rzeczywistej oraz zespolonej. To niezwykle zaawansowana dziedzina układów dynamicznych, w której prowadzą (lub prowadzili) badania m.in. laureaci Medalu Fieldsa, tacy jak: J. Milnor, S. Smale, W. Thurston, J.-Ch. Yoccoz, C.T. McMullen, S. Smirnov, A. Avila. Mimo że badania dotyczą z pozoru najprostszego jednowymiarowego przypadku, są zwykle bardzo skomplikowane i innowacyjne. Wynika to z faktu, że wymiar jeden pozwala na zastosowanie niezwykle wyrafinowanego aparatu analitycznego (szczególnie w zakresie analizy zespolonej), który nie ma swoich odpowiedników w wyższych wymiarach. Bogactwo narzędzi spowodowało ogromny rozwój dziedziny, trwający nieprzerwanie od lat 80-tych ubiegłego wieku. Cały czas pojawiają się pasjonujące i zaskakujące wyniki.

Aby prowadzić interesujące badania z zakresu gładkiej dynamiki jednowymiarowej trzeba być równocześnie specjalistą z wielu innych dziedzin analizy. Fakt ten spowodował pewnego rodzaju pozytywną selekcję, której skutkiem jest to, że środowisko dynamiki jednowymiarowej obfituje w wybitnych przedstawicieli matematycznego fachu. Dr J. Graczyk jest jednym z istotniejszych filarów tego środowiska.

Najważniejsze osiągnięcia naukowe Kandydata. Dr J. Graczyk jest autorem 27 publikacji (wg MathSciNet). Duża ich część została opublikowana w najważniejszych czasopismach matematycznych, ponadto niektóre to małe (a czasem spore) monografie (dochodzące nawet do 100 stron objętości).

Zdecydowanie najważniejszym osiągnięciem naukowym dr. J. Graczyka jest udowodnienie pod koniec lat 90-tych ubiegłego wieku, wraz z prof. G. Świątkiem, tzw. *Rzeczywistej Hipotezy Fatou* dla rodziny odwzorowań logistycznych. Odwzorowania logistyczne to niezwykle proste przekształcenia kwadratowe odcinka $[0,1]$ postaci $f_a(x) = ax(1-x)$, gdzie a jest parametrem z przedziału $(0,4)$. Hipoteza Fatou ma długą historię, której początki sięgają problemów z dynamiki zespolonej stawianych przez Fatou. Mocowali się z nią m.in. znamienici matematycy wcześniej wspomniani. Finałowa pozytywna odpowiedź stanowi, że odwzorowanie f_a ma przyciągający punkt okresowy (czyli jest hiperboliczne) dla gęstego i otwartego zbioru parametrów $a \in (0,4)$. Niezwykle zaawansowany dowód tego twierdzenia wynika z rezultatów trzech prac, oznaczonych w autoreferacie jako [W4], [W5] i podsumowująca [W6]. Korzystając m.in. z metod zespolonych w każdej z tych prac rozwinięto istotne aspekty teorii rzeczywistych odwzorowań kwadratowych, również ich renormalizacji. Warto wspomnieć, że w [W5] dowodzi się istnienia tzw. „complex bounds", które w późniejszym czasie zostały wykorzystane przez innych autorów, np. Levina, van Striena, Kozlova czy Shena m.in. do rozwiązania problemu lokalnej spójności zbiorów

Julii dla wielomianów rzeczywistych. W podsumowującej pracy [W6] udowodniono twierdzenie o sztywności dla pewnych wielomianów kwadratowych bez okresowych punktów przyciągających. Rezultat ten pozwala wywnioskować tezę o typowości parametrów hiperbolicznych. Ze względu na zainteresowanie środowiska metodami wypracowanymi w [W4], [W5] i [W6], autorzy wydali monografię [M1], w której w sposób bardziej przystępny przedstawili swoje idee.

Kolejnym wielkim osiągnięciem naukowym Kandydata, które odbiło się szerokim echem w środowisku matematycznym, były rezultaty (wspólne z Sandsem i Świątkiem) dotyczące problemu Milnora dla unimodalnych przekształceń odcinka. Ogólnie problem dotyczy relacji pomiędzy atraktorami metrycznymi i topologicznymi dla takich odwzorowań. Finałowy rezultat, oparty na wynikach prac [W13] i [W15] stanowi, że dla przekształceń unimodalnych klasy C^4 z niezdegenerowanym punktem krytycznym atraktory metryczne i topologiczne są takie same. W pracy [W15] podano klasyfikację takich atraktorów. Korzystając z własności przekształceń nazywanej przez autorów *zanikaniem geometrii*, wykluczono istnienie tzw. dzikich atraktorów cantorowskich, co stanowiło fundament dowodu. Przypomnijmy, że Bruin, Keller, Nowicki i van Strien w 1996 r. pokazali, że przekształcenia unimodalne ze zdegenerowanymi punktami krytycznymi mogą posiadać dzikie atraktory cantorowskie. Innym bardzo ciekawym aspektem potrzebnym do rozwiązania finałowego problemu było ustalenie w pracy [W10] relacji pomiędzy własnością unimodalności przekształcenia oraz ujemnej pochodnej Schwartza. W tej krótkiej i eleganckiej pracy pokazano, że w zasadzie gładkie przekształcenia unimodalne są analitycznie sprzężone z odwzorowaniami o ujemnej pochodnej Schwartza. Rezultat ten daje możliwość istotnej redukcji problemu, co wykorzystano w [W15]. Rozwiązanie problemu podane w pracy [W13] wzbudziło szerokie zainteresowanie specjalistów, chociażby z tego powodu, że stanowiło alternatywę dla podanego przez Lyubicha błędnego dowodu.

Kandydat wniósł również istotny wkład w rozwój jednowymiarowej dynamiki zespolonej. W tym temacie jego zainteresowania skupiły się m.in. na badaniu własności tzw. dysków Siegela, które są pewnego typu składowymi zbioru Fatou z dynamiką sprzężoną z obrotem. Dynamika odwzorowania wewnątrz dysku Siegela jest bardzo prosta, a zaczyna być interesująca na jego brzegu. Zrozumienie brzegu dysku jest o tyle istotne, że ma ono znaczenia w problemie przedłużania sprzęgnięcia z obrotem. W pracy [W12] udowodniony został fundamentalny rezultat mówiący, że przekształcenie analityczne, dla którego liczba obrotu na dysku Siegela jest ograniczonego typu, musi posiadać punkt krytyczny na brzegu dysku. Rezultat ten stanowił odpowiedź na przypuszczenie Douady'ego (sprzed 15 lat), które było sformułowane mniej ogólnie, tylko dla pewnych przekształceń wymiernych.

Kolejne ważne rezultaty Kandydata dotyczą geometrii brzegu dysku Siegela. W pracy [W11] pokazano, że jeśli brzeg dysku Siegela jest kwazikonforemnie homeomorficzny z okręgiem oraz zawiera punkty krytyczne, to jego wymiar Hausdorffa jest istotnie większy niż jeden. Jest to również odpowiedź na ok. 20-letnie pytanie Mantona i Nauenberga. Jednym z kroków pośrednich w dowodzie jest (samo z siebie interesujące) twierdzenie, które mówi, że przy powyższych założeniach liczba obrotu na dysku musi mieć typ skończony.

Następna istotna praca Kandydata [W17] dotyczy własności zbioru Julii dla odwzorowań wymiernych spełniających *warunek sumowalności*, który jest istotnie słabszy od warunku Colleta-Eckmanna. Okazuje się, że zbiór takich odwzorowań stanowi podzbiór dodatniej miary w zbiorze wszystkich przekształceń wymiernych. Dla tego typu odwzorowań rozważa się tzw. szereg Poincaré i jego wykładnik minimalny δ_{Poin}. Są to analogony klasycznych pojęć pochodzących z działań grup Kleina. Praca [W17] stanowi kontynuację badań zapoczątkowanych w [W7], a dotyczących odwzorowań wymiernych z własnością Colleta-Eckmanna. Jednym z głównych rezultatów pracy [W17] jest odpowiednik klasycznego twierdzenia Sullivana. Udowodniono, że dla odwzorowań wymiernych spełniających warunek sumowalności istnieje na zbiorze Julii jedyna bezatomowa miara konforemna i jej wykładnik jest równy δ_{Poin}. Ponadto miara ta jest ergodyczna, posiada absolutnie ciągłą miarę niezmienniczą oraz δ_{Poin} jest wymiarem Hausdorffa zbioru Julii. Jeden z ważnych wniosków stanowi, że dla omawianej klasy przekształceń wymiernych zachodzi silna dychotomia Ahlforsa. Oznacza to, że zbiór Julii jest albo całą sferą albo jej wymiar Minkowskiego jest mniejszy niż 2.

Warto nadmienić, że we wspomnianej wcześniej pracy [W7] autorzy udowodnili szereg fundamentalnych własności zbioru Julii i składowych zbioru Fatou dla odwzorowań wymiernych spełniających warunek Colleta-Eckmanna.

Badania naukowe Kandydata wniosły również istotny postęp w zrozumienie dynamiki wielomianów unimodalnych postaci $f_c(z) = z^d + c$. Dla tej klasy odwzorowań rozważa się tzw. zbiór Mandelbrota tych parametrów $c \in \mathbb{C}$, dla których zbiór Julii f_c jest spójny. Wspomnijmy tu chociażby pracę [W9], w której badano typowe własności f_c, gdy c leży na brzegu zbioru Mandelbrota.

Wymieniając najważniejsze osiągnięcia naukowe Kandydata nie można zapomnieć o jego rezultatach z początkowego okresu kariery na temat dynamiki odwzorowań okręgu. Badania te dotyczyły m.in. zmienności liczby obrotu dla pewnych jednoparametrowych rodzin odwzorowań (ciągłość hölderowska) oraz analizy wymiaru miar niezmienniczych. W tym zakresie Kandydat (wraz ze współpracownikami) rozwinął wiele innowacyjnych technik dowodowych, co już na początkowym etapie kariery naukowej przyniosło mu duże uznanie środowiska.

Podsumowując omawianie najważniejszych osiągnięć naukowych dra Graczyka chciałbym podkreślić, że zakres jego działalności matematycznej i otrzymanych rezultatów jest znacznie szerszy i nie sposób jest go zgłębić w tak krótkim tekście. W opinii recenzenta chociażby wymienione dotychczas osiągnięcia Kandydata do tytułu plasują go w światowej czołówce matematycznej. Jego dokonania są w dużej części motywowane fundamentalnymi pytaniami stawianymi przez najbardziej prominentnych przedstawicieli środowiska układów dynamicznych. Pytania te są zazwyczaj formułowane w dość elementarny sposób, jednak odpowiedzi wymagają wypracowania nowych technik i szalenie skomplikowanych dowodów. To kwintesencja wybitnej matematyki. I tak należy traktować dorobek Kandydata.

Współpraca międzynarodowa. Dr Graczyk współpracuje z wybitnymi matematykami, m.in. z Grzegorzem Świątkiem (wieloletnim i wielokrotnym współautorem) oraz Stanislawem Smirnowem, laureatem Medalu Fieldsa. Jest często zapraszany do wygłaszania wykładów plenarnych na konferencjach oraz prowadzenia współpracy w wiodących ośrodkach akademickich, m.in. California Institute of Technology, Fields Institute, IHES, Mittag-Leffler Institute, MSRI Berkeley, Princeton University, Royal Institute of Technology Stockholm, Stony Brook University, Yale University. O jego bardzo wysokiej pozycji w środowisku naukowym może świadczyć fakt, że niejednokrotnie brał udział w ocenie wniosków grantowych dla European Science Foundation, Israel Science Foundation, National Science Foundation (USA). Sam był aktywny w pozyskiwaniu grantów badawczych, kierował trzema projektami (NSF i National Foundation of Research w Szwecji).

Opieka naukowa. Dr Graczyk ma zasługi w kształceniu młodej kadry naukowej. Wypromował trzech doktorów i był opiekunem dwóch postdoków. Dwóch spośród jego podopiecznych: Magnus Aspenberg i Neil Dobbs, jest już uznanymi matematykami z istotnymi osiągnięciami.

Podsumowanie recenzji. Należy podkreślić, że wkład Kandydata w rozwój dynamiki jednowymiarowej jest imponujący. Prowadząc badania na najwyższym światowym poziomie naukowym, rozwiązał szereg fundamentalnych i trudnych problemów matematycznych. Wypracował przy tym całkowicie nowe i innowacyjne techniki matematyczne. Większość z omówionych wcześniej najważniejszych osiągnięć została opublikowana w czasopismach formatu Annals of Mathematics, Duke Mathematical Journal i Inventiones Mathematicae uważanych przez środowisko matematyczne za jedne z najbardziej prestiżowych. Rozwiązując jedne z najistotniejszych problemów dynamiki jednowymiarowej, zarówno współpracował, jak i konkurował z najlepszymi matematykami, m.in. laureatami Medalu Fieldsa. Aby się z nimi ścigać, jasnym jest, że trzeba prowadzić badania na porównywalnym poziomie. To, zdaniem recenzenta, najlepiej charakteryzuje jakość nauki uprawianej przez Kandydata.

Uważam, że uzyskany przez Kandydata dorobek naukowy, organizacyjny oraz w opiece naukowej z dużym nadmiarem spełnia wymagania zwyczajowe oraz formalne, wynikające z art. 26 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki. Ponadto, jego niewątpliwie wybitne osiągnięcia naukowe stanowią silną podstawę do zastosowania procedury nadania tytułu z pominięciem uzyskanie stopnia naukowego doktora habilitowanego, w oparciu o art. 26, pkt. 3 ustawy. W pełni popieram wniosek o nadanie dr. Jackowi Graczykowi tytułu naukowego profesora nauk matematycznych.

Krzysztof Frączek