UNIWERSYTET
WARSZAWSKI

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
dr hab. Agnieszka Świerczewska-Gwiazda, prof. UW

Warszawa, 5 czerwca 2018

Recenzja rozprawy doktorskiej pt. *Zagadnienia dynamiczne w mechanice ośrodków niesprężystych*, której autorem jest mgr Konrada Kisiel

Recenzowana rozprawa doktorska została napisana pod kierunkiem dwóch promotorów: prof. dra hab. Krzysztofa Chełmińskiego i dra Sebastiana Owczarka pełniącego rolę promotora pomocniczego. Rozprawa dotyczy tematyki, która jest bardzo dobrze ugruntowana na Politechnice Warszawskiej – tematyka ta była podstawą habilitacji i profesury głównego promotora oraz doktoratu promotora pomocniczego.

Autor koncentruje się na problemie istnienia rozwiązań dla modeli ewolucyjnych opisujących odkształcenia niesprężyste w ciałach stałych oraz w materiałach porowatych. Jednym z celów rozprawy jest zaproponowanie uniwersalnego języka, który pozwoliłby opisać na tyle szeroką klasę modeli, żeby nie istniała konieczność niezależnych rozważań dla modeli plastyczności i poro-plastyczności. Uniwersalność ta ma na celu objąć szeroką w sensie matematycznym klasę problemów, czyli modele koercytywne, niekoercytywne, itd.

Wyniki rozprawy zostały opublikowane w dwóch artykułach doktoranta w czasopiśmie *Journal of Mathematical Analysis and Applications*:

- K. Kisiel. Dynamical poroplasticity model – Existence theory for gradient type nonlinearities with Lipschitz perturbations. J. Math. Anal. Appl., 450(1):544–577, 2017,
- K. Kisiel, K. Kosiba. Dynamical poroplasticity model with mixed boundary conditions – Theory for LM-type nonlinearity. J. Math. Anal.

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 115
e-mail: aswiercz@mimuw.edu.pl

Appl., 443(1):187–229, 2016.

Rozprawa składa się z ośmiu rozdziałów. Pierwszy rozdział poświęcony jest krótkiej informacji na temat wyprowadzenia modeli. Drugi rozdział to zebranie narzędzi matematycznych, które będą używane w rozprawie, znajdujemy tu fakty na temat przestrzeni funkcyjnych, podstawowych nierówności - Korna, Gronwalla, czy twierdzenia o śladzie. Porównując narzędzia zgromadzone w Rozdziale 2 (Wstęp teoretyczny) z narzędziami standardowo używanymi przez osoby zajmujące się podobnymi równaniami uwagę zwraca Lemat Chacona (Twierdzenie 2.8 z rozprawy), którego zastosowanie i problemy z nim związane przeanalizuję w dalszej części recenzji.

Trzeci rozdział poświęcony został sformułowaniu badanego układu, zebraniu wszystkich założeń, zdefiniowaniu rozwiązania i sformułowaniu głównych twierdzeń. Autor formułuje cztery twierdzenia dotyczące istnienia jednoznacznych silnych rozwiązań (według Definicji 3.7) w różnych przypadkach: dla modeli koercytywnych, modeli spełniających warunki samokontroli, modeli o wielomianowym wzroście nieliniowości i modeli gradientowych. Autor decyduje się na osobne potraktowanie każdego z modeli z uwagi na fakt, że w każdym przypadku przyjęte są różne założenia, co skutkuje oczywiście inną tezą twierdzenia, a mianowicie inną regularnością otrzymanych rozwiązań.

Kolejne cztery rozdziały w zasadzie są poświęcone dowodom tychże twierdzeń. Aproksymacja Yosidy stosowana jest tylko do nieliniowego plastycznego związku konstytutywnego, a nie całego operatora. W swej istocie zgodna jest z aproksymacją wprowadzoną w referencji [15], nie zaś z wcześniejszą koncepcją traktowania podobnych problemów maksymalnie monotonicznych w przestrzeni Hilberta z iloczynem zadanym przez energię kinetyczną i swobodną energię Helmholtza wpowadzonym w monografii [2]. Ponadto autor wprowadza spójny rodzaj aproksymacji dla modeli koercytywnych i niekoercytywnych - jedynie poprzez aproksymację Yosidy. Jest to niewątpliwie ciekawe spostrzeżenie.

Ostatni rozdział poświęcony został pokazaniu, jak można zastosować ogólne podejście przedstawione w rozprawie. Rozdział poświęcony jest modelowi Prandtla-Reussa. Nie ukrywam, że w przypadku rozwijania dość ogólnej teorii, czytelnik chciałby zobaczyć większą ilość przykładów wskazujących

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 115
e-mail: aswiercz@mimuw.edu.pl

wyraźnie na to, jakie możliwości daje ogólne podejście. Oczywiście w rozprawie istnieją odwołania do modeli wpisujących się w zaproponowany schemat.

Przechodząc do oceny merytorycznej pracy doktorskiej trzeba zauważyć istotną ilość nowego podejścia do wcześniej badanych problemów, w szczególności sformułowanie ograniczeń na dane brzegowe bez użycia sztucznego problemu związanego z warunkami bezpiecznego obciążenia, a z drugiej jednak strony anonsowana w streszczeniu rewolucja umożliwiająca wykazanie, że rozwiązania dla modelu Prandtla-Reussa są elementami przestrzeni L^1 (to jak rozumiem autor nazywa rozwiązaniami *silnymi*) w odróżnieniu od fundamentalnej pracy [46], gdzie pokazano tylko istnienie rozwiązań w przestrzeni miar, budzi pewne moje wątpliwości, które opiszę w dalszej części recenzji.

Jakkolwiek w pracy ciąg rozumowania dotyczącego Prandtla-Reussa nie jest przedstawiony w jednym miejscu, to zbierając fragmenty z różnych rozdziałów można zauważyć, że centralną rolę odgrywa tu wspomniany wcześniej Lemat Chacona.

Chciałam doprecyzować swoje wątpliwości na temat zastosowania przez autora Lematu Chacona. Z uwagi na to, że chętnie poprosiłabym autora o wyjaśnienia w tej kwestii w trakcie obrony, to przywołam ze szczegółami tutaj przykład z cytowanej pracy J. Balla i F. Murata [5], który dość wyraźnie wskazuje na problem, jaki dostrzegam. Rozważmy zbiór $\Omega = (0,1)$ i ciąg funkcji zdefiniowanych dla każdego j następująco:

$$f^j(x) = \begin{cases} j^2/2 & \text{dla } x \in (\frac{k}{j+1} - \frac{1}{j^3}, \frac{k}{j+1} + \frac{1}{j^3}), \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Łatwo policzyć, że funkcje są całkowalne i dla każdego j zachodzi $\|f\|_{L^1} = 1$. Ciąg jest słabo* zbieżny w sensie miar do miary o gęstości 1. Bierzemy ciąg zbiorów

$$E_k = \bigcup_{j\geq k} \{f^j \neq 0\}.$$

Miara zbioru $\{f^j \neq 0\}$ wynosi $2/j^2$, a więc $|E_k| \leq \sum_{j\geq k} 2/j^2 \to 0$ gdy $k \to \infty$. Dla $x \in \Omega \setminus E_k$ zachodzi $f^j(x) = 0$ dla wszystkich $j \geq k$, a więc w szczególności $f^j \to 0$ prawie wszędzie w $(0,1)$. Stąd granicą w sensie biting tego ciągu jest funkcja $f = 0$ i $\lim_{j\to\infty} \int_A f^j dx = |A|$ dla każego otwartego przedziału $A \subset (0,1)$. Zbiór E_k dla każdego k jest gęsty w przedziale $(0,1)$.

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 115
e-mail: aswiercz@mimuw.edu.pl

Wracając do rozprawy doktorskiej, do sekcji 6.3 (str. 101) przyglądamy się części "Dodatkowe informacje o ciągu $\{z^\lambda\}$" i widzimy, że ciągi z^λ są słabo zbieżne w $L^1((\Omega \times (0,T_\epsilon)) \setminus C_K)$. Ponieważ te zbiory C_K pochodzą z biting granicy, więc jak widać z powyższych rozważań natychmiastowym wnioskiem jest, że każdy ze zbiorów C_K może być gęsty w $(\Omega \times (0,T_\epsilon))$, a więc dla każdego C_K jedyną "wystarczająco gładką" (a więc jak rozumiem chociąż ciągłą) funkcją testującą t.że

$$\mathrm{supp}(\varphi) \subset (\Omega \times (0,T_\epsilon)) \setminus C_K$$

jest funkcja tożsamościowo równa zero. W takiej sytuacji nie moglibyśmy wywnioskować, że $\xi_1 = Lz$. Wyjaśnienie tego faktu jest o tyle istotne, że w dalszych częściach rozprawy (np. w przypadku modeli spełniających warunek samokontroli) autor wskazuje na to, że pewnych faktów nie można udowodnić dopóki nie wiemy, że funkcje graniczne spełniają punktowo prawie wszędzie niesprężysty związek konstytutywny. Jeśli rozumowanie to byłoby poprawne, to uzyskany wynik, de facto istotnie silniejszy niż wynik Rogera Temama z *Arch. Ration. Mech. Anal.* – referencja [46], zasługiwałby na publikację w czasopiśmie również tej klasy, a sam doktorat na wyróżnienie.

Konkludując, uważam że rozprawa prezentuje ciekawe uogólnienie teorii istnienia w teorii odkształceń niesprężystych. Istotnym wkładem w tę teorię jest fakt, że w niektórych przypadkach możliwe jest opuszczenie warunków bezpiecznego obciążenie. Jako że przedłożona praca spełnia formalne i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim, to wnioskuję o dopuszczenie mgra Konrada Kiśla do dalszych etapów postępowania.

Z poważaniem,

Agnieszka Świerczewska-Gwiazda

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 115
e-mail: aswiercz@mimuw.edu.pl