prof. dr hab. Agnieszka Kałamajska,
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2, 02–097 Warszawa
oraz
Instytut Matematyki Polskiej Akademii Nauk o. w Warszawie
ul Śniadeckich 8
00-656 Warszawa
adres e-mail: A.Kalamajska@mimuw.edu.pl Warszawa, 11 października 2018

Ocena rozprawy doktorskiej
pt. "Przestrzenie Sobolewa na grupach metrycznych"
pana mgr. Tomasza Kostrzewy

1 Wstępne informacje

Praca pana Tomasza Kostrzewy została napisana pod kierunkiem pana dr. hab. Tomasza Adamowicza oraz pana dr. Przemysława Górki. Dotyczy ona problemu definiowania przestrzeni typu Sobolewa na lokalnie zwartych grupach abelowych.

Tematyka pracy narodziła się w pracach J. Tateoki (grupy diadyczne, 1994) oraz H. Bahouri, C. Fermaniana-Kammerera oraz I. Gallaghera (grupa typu Heisenberga, 2009) i była kontynuowana przez promotora pomocniczego, pana Przemysława Górkę w serii jego prac współautorskich, w tym dwóch napisanych wspólnie z autorem niniejszej rozprawy w ramach jego pracy magisterskiej, oraz z doświadczonym matematykiem, R. G. Reyesem. Podjęcie zaproponowanej tematyki ma bardzo dobrą motywację. Jest to ciekawe wyzwanie od strony teoretycznej, które ma na celu unifikację wielu twierdzeń formułowanych na przestrzeniach metrycznych ogólniejszych niż przestrzeń Euklidesowa, o ile mają one strukturę grupową o dobrych własnościach. Równocześnie daje wyniki dotąd nie znane, na przykład odnoszące się do teorii liczb p-adycznych.

Podjęta tematyka jest ciekawa i trudna ze względu na konieczność głębokiego przeanalizowania i dostosowania wielu technik klasycznych do aparatu bazującego na teorii grup. W tym celu trzeba wykorzystać wiedzę na pograniczu: analizy klasycznej, analizy harmonicznej, analizy funkcjonalnej, algebry oraz topologii, co jest wyzwaniem trudnym i ambitnym.

Efektem rozprawy jest spójne przedstawienie teori przestrzeni Sobolewa na grupach abelowych lokalnie zwartych, bazujące na uogólnieniu klasycznej teorii przestrzeni potencjałów Bessela. Wśród przedstawionych wyników znajdujemy zarówno wyniki innych autorów (np. P. Górki i R.G. Reyesa), jak również wyniki nowe, otrzymane przez autora rozprawy, oraz wyniki będące uzupełnieniem braków oraz nieścisłości w literaturze. Bazują one na jednej wspólnej pracy opublikowanej, otrzymanej przez Tomasza Kostrzewę wraz z Przemysławem Górką (praca [38] wg. bibliografii), oraz na wynikach nie opublikowanych.

Wynik rozprawy uważam za wartościowy i ciekawy wkład w rozwój teorii.

2 Omówienie rozprawy doktorskiej

2.1 Organizacja pracy oraz źródła

Rozprawa liczy około 160 stron i składa się ze Wstępu, pięciu rozdziałów głównych, dwóch rozdziałów uzupełniających oraz wyczerpującej bibliografii liczącej 91 pozycji. Całość to konsekwentna i spójna analiza. Prezentacja wyników dokonuje się w kilku etapach, które z ogólnym zarysie przebiegają następująco:

(a) omówienie teorii lokalnie zwartych grup abelowych (w skrócie LZGA) wyposażonych w miarę Haara i analiza typu Fouriera na takich grupach (Rozdział 1);

(b) wprowadzenie gładkiej struktury różniczkowej oraz operatorów różniczkowych na LZGA (Rozdział 2);

(c) wprowadzenie przestrzeni typu $L^p(G)$, oraz odpowiednika dystrybucji Schwartza (klasy Bruhata-Schwartza) na LZGA i analiza gęstości takich dystrybucji w odpowiednich przestrzeniach (Rozdział 3);

(d) wprowadzenie przestrzeni typu Sobolewa i uogólnienie znanych twierdzeń z klasycznej teorii przestrzeni: twierdzeń o włożeniu i śladzie na przypadek LZGA (Rozdział 4), porównania z innymi przestrzeniami (częściowo Rozdział 4, Rozdział 5);

(e) analiza szczególnych przypadków, gdy mamy do czynienia z grupą liczb p-adycznych, oraz znanymi grupami: $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{T}^n$, $\mathbf{Z}^n$, gdzie $\mathbf{T}$ to torus, $\mathbf{Z}$ to zbiór liczb całkowitych (Dodatek A i B).

Wyniki włączone do dorobku rozprawy bazują na:

- jednej pracy współautorskiej (Rozdział - 4.3):

  [38] P. Górka i T. Kostrzewa, *Sobolev spaces on metrizable groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn. **40** (2015), 837-849;

- na wynikach nieopublikowanych otrzymanych przez Autora na bazie współpracy wraz Przemysławem Górką, na przykład fragmenty Rozdziału 3;

- na wynikach nieopublikowanych otrzymanych przez Autora na bazie współpracy z Tomaszem Adamowiczem - Rozdział 5;

- na nieopublikowanych wynikach samodzielnych Autora: Rozdziały 3.3, 4.2, 4.4, 4.6, oraz Dodatek B.

Dużym wkładem samodzielnej pracy jest ponadto przedstawienie ogólnej teorii przestrzeni Sobolewa na grupach lokalnie zwartych oraz uzupełnienie luk w literaturze, między innymi z prac Wawrzyńczaka i Bruhata (prace [85] i [15] wg. Bibliografii), analiza przykładów oraz inne uzupełnienia (np. rozdziały 1, 2, 3.1, 3.2, 4.5, Appendix).

Organizację pracy uważam za dość dobrze przemyślaną. Wybór źródeł jest bardzo ciekawy. Na przykład ciekawostką jest, że cytowana praca Wawrzyńczyka, zawierająca luki, była cytowana zaledwie 4 razy według Mathematical Reviews. Cytowana była jednak w bardzo dobrych czasopismach, między innymi w Monatshefte für Mathematik (2017), Archive for Rational Mechanics and Analysis (2007), czy w Transactions of the American Mathematical Society (1970).

2.2 Główne wyniki, narzędzia pracy

Rozprawa jest bardzo obszerna i ustosunkowuje się do szeregu różnych aspektów teorii przestrzeni Sobolewa, rozpoczynając od problemu zdefiniowania struktury różniczkowej na grupie a kończąc na różnego typu twierdzeniach o włożeniu i ilustracjach (punkty (a)-(e) wymienione w poprzednim rozdziale).

Główny pomysł definiowania przestrzeni typu Sobolewa na grupach lokanie zwartych jest inspirowany przez klasyczne przestrzenie potencjałów Bessela. W przypadku przestrzeni Euklidesowej $\mathbf{R}^n$, jest to przestrzeń $H^{s,p}(\mathbf{R}^n)$, składająca się z takich funkcji u określonych na $\mathbf{R}^n$, że

$$\|F^{-1}((1+|\xi|^2)^{s/2}F(u))\|_{L^p(\mathbf{R}^n,\lambda_n(dx))} < \infty,$$

gdzie $F(v)$ jest transformatą Fouriera funkcji v a $\lambda_n(dx)$ jest miarą Lebesgue'a na $\mathbf{R}^n$. W przypadku gdy mamy do czynienia z grupą G (LZGA, jak w punkcie (a) Rozdziału 2.1), zastępujemy transformatę Fouriera przez jej odpowiednik na grupie, miarę Lebesgue'a przez miarę Haara μ_G, zamiast $|\xi|^2$ wystąpi pewna funkcja postaci $\gamma^2(\xi)$. Uogólniona transformata Fouriera oraz funkcja γ są określone na grupie dualnej Γ, której elementami są tak zwane charaktery grupy, czyli ciągłe homomorfizmy z grupy G w torus zespolony ze strukturą grupy zadaną poprzez działanie mnożenia. Pozwala to na przeniesienie analizy Fourierowskiej na przypadek grup topologicznych, co dokonało się w latach 60-tych ubiegłego wieku. Aby uprawiać taką analizę, należy połączyć wiedzę z kilku dziedzin, między innymi z: algebry, teorii przestrzeni funkcyjnych (odniesienie do przestrzenie Sobolewa), analizy harmonicznej (analiza Fourierowska), teorii miary (miary na grupach i podgrupach), topologii (problemy metryzowalności i wyboru baz), teorii liczb (zastosowania do teorii liczb p-adycznych).

Już sam Rozdział 1, będący wprowadzeniem do teorii, wymaga bardzo solidnej wiedzy.

W Rozdziale 2 wprowadzone są i badane operatory różniczkowe na grupach z klasy LZGA, co dodatkowo wymaga połączenia wiedzy z klasycznej analizy z metodami typowymi dla algebry i topologii (np. określa się granice skierowane i odwrotne grup). Jest to trudny dział, gdyż analiza dokonuje się nie tylko na grupie wyjściowej G, lecz także na jej grupie dualnej. Po drodze należy dokonać całego ciągu utożsamień i redukcji grupy do przypadków bardziej zrozumiałych, gdy mamy do czynienia z grupą elementarną, to znaczy izomorficzną z $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m \times \mathbf{Z}^k \times F$, gdzie F jest grupą skończoną. Uzasadnienie poprawności definicji wymaga bardzo żmudnej analizy, nie tylko w zakresie algebry, lecz także na przykład w zakresie teorii miary, gdyż redukować należy także miarę Haara określoną na grupie G, do miar określonych na budujących grupę podgrupach elementarnych. Choć operator różniczkowy pierwszego rzędu jak w przypadku klasycznym jest pochodną drogi po czasie i na jego bazie buduje się operatory wyższego rzędu, trzeba bardzo ostrożnie sprawdzać różne własności, jak na przekład własność przemienności różniczkowania, lub czy zachodzi reguła Leibnitza. Rozdział 3 kończy się definicją wielomianu rzędu n na bazie pracy Wawrzyńczyka. Tu chętnie zaraz po Definicji 6.1 zobaczyłabym prostą ilustrację objaśniającą dlaczego wprowadzony obiekt zasłużył na nazwę wielomianu, a w dowodzie Twierdzenia 2.6.14 o gładkości wielomianów, w Kroku 1, nie pomijałabym dowodu fragmentu na temat ciągu uogólnionego, który ma w rozprawie odniesienie do pracy [23].

Są to drobne uwagi, gdyż dyskusja w Rozdziale 2 jest trudna i wymagała nie tylko wyjaśnienia wcześniej znanych pojęć, lecz także uzupełnienia kilku luk z prac [15] i [85].

Rozdział 3 obejmuje problematykę omówioną w punkcie (c) Rozdziału 2.1. Ma on charakter poszerzonego opracowania na bazie prac Wawrzyńczyka [85] i Osborne'a [63] i zawiera między innymi:
- przedstawienie i dokładną analizę klas dystrybucji Bruhata-Schwartza;
- przedstawienie definicji oraz szeczegółową analizę klasy funkcji gładkich o zwartym nośniku na LZGA;
- analizę obcięć funkcji zadanych na produkcie LZGA do jednej z grup;
- analizę klasy funkcji gładkich o zwartym nośniku;
- merytorycznie nowe wyniki zawarte w Rozdziale 3.3, w szczególności: wprowadzenie gładkiego ciągu Diracka, Wniosek 3.3.7 o istnieniu gładkiej funkcji symetrycznej o zwartym nośniku, oraz chyba najważniejszy wynik nowy - Twierdzenie 3.3.10 o gęstości przestrzeni Bruhata-Schwartza oraz przestrzeni funkcji gładkich o zwartym nośniku w przestrzeni $L^p(G)$ dla wszystkich $1 \leq p < \infty$. Wynik w odniesieniu do przestrzeni Bruhata-Schwartza był dotąd znany tylko w zakresie $p \in \{1, 2\}$ (z prac Bruhata [15] oraz Wawrzyńczyka [85]).

Analiza w tym rozdziale odnosi się także do możliwości osłabiania założeń (Przykład 3.2.6). Rozdział 3.3 bardzo przyjemnie się czyta ze względu na elegancką teorię i głęboką analizę. Z drobnych uwag: nieco dziwne wydaje mi się oznaczenie $C_0(G)$ z punktu c) Lematu 3.1.2, w przypadku gdy G jest grupą zwartą, na przykład torusem. Zauważyłam także drobne literówki.

Rozdział 4 dotyczy konstrukcji przestrzeni Sobolewa $H^s_\gamma(G)$ definiowanej na LZGA, której grupa dualna jest metryzowalna. Zakłada się dodatkowo, że miara Haara zadana na grupie G spełnia pewien dodatkowy warunek regularności, tak zwany warunek β-regularności z góry. Rozdział ten zawiera sporo solidnych wyników, w tym opublikowanych już w pracy [38]. Najważniejszymi osiągnięciami tego rozdziału są:
- dowód twierdzenia o gęstości klasy Bruhata-Schwartza w przestrzeniach $H^s_\gamma(G)$ wraz z analizą dopuszczalnych wag γ;
- uzyskanie twierdzeń o włożeniu i zwartym włożeniu przestrzeni $H^s_\gamma(G)$ w przestrzenie typu $L^q(G)$ oraz przestrzenie Höldera, oraz wariant twierdzenia Mosera-Trudingera (na bazie pracy [38]);
- uzyskanie twierdzeń o śladzie dla grup $H^s_\gamma(G)$ i ich analiza na przykładzie grup p-adycznych (wynik nowy, według mojej wiedzy nieopublikowany);
- porównanie przestrzeni typu Bessela $H^s_\gamma(G)$ z przestrzeniami typu Gagliardo-Slobodeckiego przy szczególnym wyborze funkcji γ. Jak pokazano w rozprawie, przestrzenie te są równoważne, gdy G jest równoważna $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m$, lecz także w mniej standardowym przypadku, gdy G jest grupą liczb p-adycznych (wynik nowy nieopublikowany).

Wyniki tego rozdziału to wyniki mocne, odtwarzają wyniki klasyczne i dają nowe rezultaty. Widziałabym bardziej wyraźną deklarację wskazującą co spośród tych wyników jest już opublikowane w pracy [38] a co jest tu nowe. Uzyskałam tę informację przyglądając się bezpośrednio pracy [38].

Ciekawa jest analiza przedstawiona w Rozdziale 5. W Definicji 5.1.2 wprowadzona jest słaba pochodna funckji z przestrzeni $L^1_{loc}(G)$, mianowicie $D^\alpha u = v$, gdy zachodzi tożsamość

$$\int_G u D^\alpha \phi d\mu_G = (-1)^{|\alpha|} \int_G u\phi d\mu_G,$$

gdzie ϕ jest funkcją gładką o zwartym nośniku. Tu pojawia się problem. Po lewej stronie powyższej tożsamości widzimy operator D^α, zależny od wyboru generujących go dróg (jednoparametrowych podgrup), funkcja v musi zatem zależeć także od wyboru dróg generujących operator D^α a nie tylko od jego rzędu. Tym niemniej, w odniesieniu do konkretych generatorów dróg możemy definiować słabe pochodne i przy ich pomocy uogólnić klasyczną definicję przestrzeni Sobolewa $W^{k,2}(G)$ na przypadek grup, gdy k jest liczbą całkowitą. Naogół taka definicja będzie zależna od wyboru dróg generujących słabe pochodne i mamy do czynienia z odpowiednikiem anizotropowych przestrzeni Sobolewa, definiowanych tylko przy pomocy niektórych pochodnych. Gdy liczba generatorów takich podgrup jest skończona dla grupy G, jak to jest w przypadku grupy typu Liego, definicja $W^{k,2}(G)$ widzi wszystkie kieruniki różniczkowania, lecz nie jest to przypadek ogólny. Interesującym pytaniem jest zatem, dla jakich wag γ przestrzeń potencjałów Bessela $H^k_\gamma(G)$ jest porównywalna z przestrzenią $W^{k,2}(G)$. Okazuje się to możliwe przy konkretnym wyborze funkcji γ, opartej na konstrukcji wielomianów określonych na G, jak zostało wykazane w Twierdzeniu 5.2.6. Stąd wynikają dalsze własności przestrzeni typu Bessela, na przykład można na nich określać słabe pochodne do pewnego rzędu.

Mamy zatem punkt wyjścia do uprawiania równań cząstkowych na grupach typu LZGA w ujęciu dystrybucyjnym. Rozdział 5, zamykający podstawowe rozważania stanowi bardzo ciekawy komentarz do przeprowadzonej wcześniej analizy.

Dodatki A i B zawierają ilustracje w obrębie konkretnych grup, co bardzo ułatwia zrozumienie przedstawionego rozumowania.

Podsumowując, stosowane narzędzia pracy wymagają wiedzy z algebry, topologii, analizy klasycznej, funkcjonalnej, harmonicznej, teorii miary, co wpisuje się w nurt tak zwanej analizy globalnej. Przedstawiona analiza jest obszerna i głęboka a pracę czyta się z przyjemnością.

2.3 Dodatkowe informacje

Jak mi wiadomo pan Tomasz Kostrzewa poza niniejszą rozprawą ma także inne już opublikowane wyniki, mianowicie notkę:

- P. Górka, T. Kostrzewa, *Pego everywhere*, J. Algebra Appl. 15 (2016),

którą można by uznać za dorobek poboczny pana Kostrzewy. Wyniki niniejszej rozprawy były już wielokrotnie referowane na różnych seminariach i konferencjach, czego sama byłam kilkukrotnie świadkiem.

3 Konkluzja

Biorąc pod uwagę dokonane osiągnięcie, po przedstawieniu zarówno pozytywnych jak i negatywnych aspektów oceny, z pełnym przekonaniem strwierdzam, że przedstawiona rozprawa doktorska w pełni spełnia wymagania zwyczajowe i ustawowe stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie pana mgr. Tomasza Kostrzewy do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Z wyrazami szacunku,

Agnieszka Kałamajska