

Recenzja rozprawy doktorskiej pana magistra Tomasza Kostrzewy
"Przestrzenie Sobolewa na grupach metrycznych"
dr hab. Antoni Pierchalski
Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego

16 października 2018

Tematem recenzowanej pracy są przestrzenie Sobolewa na grupach topologicznych o metryzowalnej grupie dualnej. Zakłada się dodatkowo, że miara Haar'a na grupie dualnej jest regularna w tym sensie, że miary kul są ograniczone z góry przez długość promienia w odpowiedniej potęgce. Otrzymane przestrzenie Sobolewa mają wtedy własności analogiczne do tych z przestrzeni klasycznych (rozmaitości, grupy Liego).

Praca składa się z pięciu rozdziałów oraz dwóch dodatków A i B. Zawiera obszerną literaturę (91 pozycji).

W pierwszych trzech rozdziałach Autor zebrał, uzupełnił i usystematyzował znane fakty z rozważanej tematyki na lokalnie zwartych grupach abelowych. Korzystał tam z prac Bruhata [15], Wawrzyńczyka [85], Osborne'a [63] oraz w dużej mierze z niedawnej pracy Górki i Reyesa [39].

Zawarł obszerny materiał związany z szeroko rozumianą analizą harmoniczną. W szczególności podał konstrukcje transformaty Fouriera i transformaty odwrotnej. Opierając się na wynikach wspomnianych wyżej autorów, w szczególności na postępowaniu Wawrzyńczyka, przytoczył konstrukcje struktury gładkiej i pojęcia funkcji klasy C^k , $k \in \mathbb{N}$ oraz klasy C^∞ . Bazują one w swej istocie na mocnych i głębokich wynikach klasycznych pochodzących w szczególności od Pontriagina i orzekających, że każda grupa abelowa, lokalnie zwarta jest granicą prostą grup o pochodzeniu zwartym (zwarto-generowanych), a te są z kolei granicami odwrotnymi grup elementarnych. Wprowadził następnie pojęcie operatora różniczkowego rzędu pierwszego i - poprzez iterację - operatora rzędu dowolnego oraz dowiódł wiele odpowiedników twierdzeń klasycznych. Wprowadził pojęcie funkcji wielomianowych i pokazał, że mają one dobre własności algebraiczne oraz, że stanowią zbiór zamknięty ze względu na działanie operatorów różniczkowych. Zdefiniował klasę Bruhata-Schwarza będącą odpowiednikiem klasy funkcji szybko malejących z analizy klasycznej. Dowiódł jej naturalności w tym sensie, że na grupach \mathbb{R}^n , T^n czy \mathbb{Z} oraz grupach p -adycznych pokrywa się ona z odpowiednią, klasyczną przestrzenią Schwarza.

Te pierwsze trzy rozdziały stanowią - moim zdaniem - ważną część rozprawy. Porządkują znany dotąd materiał, uzgadniają terminologię i dają dobry, harmonijny ogólny obraz zagadnień. Materiał tam zebrany może - ze względu na sposób usystematyzowania materiału i poczynienie istotnych uzupełnień -

stanowić oddzielną publikację.

W rozdziale IV Autor bada przestrzeń Sobolewa na lokalnie zwartych grupach abelowych w przypadku, gdy grupa dualna jest przestrzenią metryczną. Dowodzi twierdzeń o gęstości klasy Bruhata-Schwarza w przestrzeni Sobolewa, przy założeniu, że pierwsza jest zawarta w drugiej (twierdzenie 4.1.1) oraz twierdzeń o włożeniu przestrzeni Sobolewa w przestrzeń funkcji całkowalnych z odpowiednią potęgą (twierdzenie 4.3.3), czy w przestrzeń Höldera o odpowiednim wykładniku (twierdzenie 4.3.5). Twierdzeniom towarzyszą oszacowania typu Sobolewa odpowiednich norm. Autor konstruuje także operator śladu i dowodzi jego różnowartościowości i ciągłości (twierdzenie 4.4.1).

W rozdziale V Autor bada problem różniczkowalności funkcji z przestrzeni Sobolewa. W tym celu wprowadza pojęcie słabej "pochodnej kierunkowej (cząstkowej)" a następnie definiuje różniczkowe przestrzenie Sobolewa w sposób analogiczny do przypadku takich przestrzeni w \mathbb{R}^n . Dowodzi, że tworzą one przestrzeń Banacha oraz, że funkcje gładkie tworzą w nich podzbiór gęsty (twierdzenie 5.2.8).

Te dwa ostatnie rozdziały stanowią główną część rozprawy. Zawierają nowe wyniki i są ciekawie napisane.

W dodatkach znajdujących się na końcu pracy Autor zawarł materiał mający ułatwić czytanie całości. W dodatku A przypomniał najważniejsze fakty dotyczące grup p-adycznych, w dodatku B - pojęcia i fakty dotyczące klas Schwarza na grupach klasycznych.

Praca jest rzetelnie zredagowana. Jest interesująca i dobrze się ją czyta. Zawiera wiele nowych faktów. Dobrze świadczy o głębokim rozumieniu zagadnień przez Autora i o erudycji.

Uważam, że rozprawa spełnia z nawiązką ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim i z przyjemnością wnoszę o dopuszczenie Pana Tomasza Kostrzewy do dalszych etapów przewodu doktorskiego.