Prof. dr hab. Marcin Studniarski
Katedra Algorytmów i Baz Danych
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Łódzkiego

Łódź, dnia 07.06.2018

Recenzja pracy doktorskiej Pana mgr. Krzysztofa Leśniewskiego „Pochodne kierunkowe i subgradienty funkcji stożkowo wypukłych"

Praca składa się z 6 rozdziałów. Rozdział 1 ma charakter wstępny, Autor omawia w nim pewne pojęcia i własności niezbędne w dalszej części rozprawy.

W rozdziale 2 przedstawiono definicje i własności funkcji stożkowo wypukłych, silnie $\alpha(\cdot)$-parawypukłych oraz silnie $\alpha(\cdot)$-k-parawypukłych.

Głównym wynikiem rozdziału 3 jest Twierdzenie 3.12 mówiące o tym, że funkcja $f : X \to Y$ określona na przestrzeni wektorowej X silnie $\alpha(\cdot)$-k-parawypukła względem normalnego stożka K zawartego w przestrzeni słabo ciągowo zupełnej Y posiada pochodną kierunkową. Twierdzenie to jest uogólnieniem znanego wyniku Valadiera dla funkcji K-wypukłych. Drugim ważnym wynikiem rozdziału 3 jest Twierdzenie 3.24 stwierdzające, że każda K-wypukła funkcja $f : X \to Y$, gdzie X jest przestrzenią ośrodkową Banacha, Y jest przestrzenią refleksywną i ośrodkową Banacha, a stożek $K \subset Y$ jest domknięty, wypukły i normalny, jest różniczkowalna w sensie Gâteaux na gęstym zbiorze typu G_δ.

Rozdział 4 zawiera konstrukcję funkcji stożkowo wypukłej f określonej na półprostej w przestrzeni liniowej X, wychodzącej z zera, o wartościach w przestrzeni Banacha Y, dla której iloraz różnicowy, dla zadanego ciągu $t_k \to 0^+$ przyjmuje zadane wartości ciągu $\{y_k\} \subset Y$, tzn

$$\frac{f(x_0 + t_k h) - f(x_0)}{t_k} = y_k, \quad k = 1, 2, ...$$

W rozdziale 5 badane są własności przestrzeni Y będące warunkami koniecznymi lub równoważnymi istnienia pochodnej kierunkowej dowolnej funkcji stożkowo wypukłej $f : X \to Y$. Rozdział ten zawiera następujące ważne wyniki: Twierdzenie 5.1 zawierające warunki konieczne istnienia pochodnej kierunkowej funkcji stożkowo wypukłej, Twierdzenie 5.3 zawierające związek między istnieniem pochodnej kierunkowej funkcji stożkowo wypukłej a istnieniem w Y podprzestrzeni izomorficznej z c_0 oraz Twierdzenie 5.6 bedące charakteryzacją słabej ciągowej zupełności dla kraty Banacha Y w terminach istnienia pochodnej kierunkowej funkcji f.

W rozdziale 6 udowodniono związek subróżniczki wektorowej z pochodną kierunkową dla funkcji różniczkowalnej w sensie Gâteaux (Twierdzenie 6.11), zbadano pewne własności ścisłych minimów lokalnych rzędu 2 funkcji wektorowych (Twierdzenie 6.27), a także metryczną subregularność dwóch rodzajów subróżniczek wektorowych (wyniki podrozdziału 6.3.2).

Wyniki uzyskane w rozprawie są oryginalne i wartościowe. Część z nich została wprawdzie otrzymana wspólnie z Panią promotor rozprawy dr. hab. Ewą Bednarczuk, ale i tak można przyjąć, że indywidualny wkład doktoranta jest wystarczający, zeby można było na podstawie tych wyników rozważać nadanie mu stopnia doktora.

Praca zawiera szereg drobnych usterek, które nie wpływają jednak na wartość głównych wyników rozprawy i w większości mogą być dość łatwo poprawione. Dla porządku wymieniam poniżej najważniejsze z nich.

1. Str. 7, wiersz 9: zamiast $A \subset Y$ powinno być $A \subset X$.

2. Str. 12: definiując przestrzeń Y^*, należałoby napisać, że jest to przestrzeń wszystkich funkcjonałów liniowych i ciągłych na Y (podobnie na str. 15).

3. Str. 20, wiersz 5–: Autor powtarza nazwisko Milman dwukrotnie, podczas gdy w opisie pozycji [56] wystepuje ono tylko raz.

4. Str. 21, wiersz 15: Autor uzywa pojęcia bazy ściągającej, które jest zdefiniowane dopiero później na str. 22.

5. Wniosek 1.21 powinien być lepiej uzasadniony, ponieważ jego wynikanie z Faktu 1.19 nie jest oczywiste.

6. Str. 22, wiersz 2–: „Korzystając z Twierdzenia 1.20 stożek K jest normalny." Błąd językowy: to nie stożek korzysta z twierdzenia, tylko Autor pracy.

7. Str. 26, wiersz 3: zamiast $\sum_{i=1}^{\infty} y_i f_i$ powinno być $\sum_{i=1}^{\infty} y_i f_{n,i}$ lub coś podobnego, ponieważ tutaj mnoży się y_i przez odpowiednią współrzędną ciagu f_n, a nie przez cały ciąg.

8. Str. 26, wiersz 5: tutaj należałoby sprawdzić warunek Cauch'ego w normalnej postaci, a nie tylko dla różnicy dwóch kolejnych wyrazów ciągu.

9. Str. 26, wiersz 6: użycie tutaj słabej* granicy jest niepoprawne, ponieważ przestrzeń c_0 nie jest izomorficzna z przestrzenią sprzężoną do żadnej przestrzeni Banacha.

10. W Stwierdzeniu 1.31 powinno być „Nietrywialny słaby ciąg Cauchy'ego..."

11. Przy Wniosku 1.36 nie podano, z czego jest to wniosek.

12. Wzory (3.1) i (3.11): Autor powinien wyjaśnić, czym różnią się granice $\lim_{t\to 0^+}$ i $\lim_{t\downarrow 0}$.

13. Zapis warunku (ii) w Lemacie 3.10 sugeruje, że k może zależeć od t_1 i t_2, a tak nie jest.

14. Str. 42, wiersz 3–: zapis $t_1, t_2, ..., t_m$ sugeruje, że są to pierwsze wyrazy ciągu $\{t_n\}$, a tak nie musi być.

15. Definicja funkcji f na str. 72 jest błędna, ponieważ pojawia się w niej liczba r, która nie została zdefiniowana.

16. Definiując subgradient Pareto na str. 77, Autor nie wyjaśnia, co znaczy f_a.

17. W definicji 6.3(i) powinno być „dla każdego $x \in X$ takiego, że $f(x) \neq f(\bar{x})$."

18. Obliczając funkcje f_a w Przykładach 6.7 i 6.9, Autor zapomniał zastosować przesunięcie wartości do pierwszej części definicji funkcji f (tzn. do wartości f w zerze).

W konkluzji stwierdzam, że praca Pana mgr. Krzysztofa Leśniewskiego spełnia ustawowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnioskuję o dopuszczenie Autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.