Prof. dr hab. Ryszard Urbański
Profesor zwyczajny
Wydziału Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza
w Poznaniu

Poznań, dnia 1 czerwca 2018 roku

Recenzja

rozprawy doktorskiej pana mgra Krzysztofa Leśniewskiego pt. POCHODNE KIERUNKOWE I SUBGRADIENTY FUNKCJI STOŻKOWO WYPUKŁYCH

W rozprawie autor zajmuje się zagadnieniami istnienia pochodnej kierunkowej oraz różniczkowalnością w sensie Gâteaux funkcji stożkowo wypukłych względem domkniętego i ostrego stożka w przestrzeni wartości odwzorowania.

Rozprawa doktorska pana magistra Krzysztofa Leśniewskiego liczy 102 strony i składa się ze wstępu, sześciu rozdziałów oraz obszernej bibliografii, obejmującej 88 pozycji uwzględniających aktualne prace z ostatnich lat.

W rozprawie udowodniono twierdzenia podające warunki konieczne i dostateczne na istnienie pochodnej kierunkowej funkcji o wartościach w przestrzeniach Banacha uporządkowanych przez stożek domknięty i wypukły.

Uzyskane wyniki dotyczą klasy funkcji $f : X \to Y$ stożkowo wypukłych względem stożka K (K-wypukłych), określonych na zbiorze wypukłym $A \subset Y$, gdzie X jest przestrzenią wektorową a Y przestrzenią unormowaną uporzadkowaną przez wypukły stożek K. W tej klasie autor podaje warunki konieczne na istnienie pochodnych kierunkowych.

W ogólniejszej klasie tzw. funkcji silnie $\alpha(\cdot)-$ parawypukłych (silnie parawypukłych względem stożka K) udowodniono warunki konieczne istnienia pochodnych kierunkowych.

Autor w rozprawie podaje również własności subgradientów funkcji stożkowo wypukłych oraz ich związku z ich pochodnymi kierunkowymi. Ponadto w rozprawie przedstawiono pewne własności ścisłych minimów lokalnych funkcji wektorowych oraz zbadano stabilność w sensie Lipschitza rozwiązań problemów zaburzonych.

Rozdział 1 ma charakter wstępny, autor podaje w nim podstawowe pojęcia i oznaczenia występujące w rozprawie. Omawia relację częściowego porządku w przestrzeni Y generowanego przez stożek $K \subset Y$, wprowadza klasę stożków normalnych. Ponadto opisane zostały stożki zadane przez bazy w przestrzeni unormowanej. Pomimo wprowadzającego charakteru rozdziału 1, autor podaje interesujący przykład

(Fakt 1.19) w którym konstruuje bazę bezwarunkową w przestrzeni c_0, która zostanie wykorzystana w dowodzie Twierdzenia 5.3, jednego z głównych twierdzeń rozprawy, podającego warunki konieczne istnienia pochodnych kierunkowych funkcji stożkowo wypukłych. Omówiono również przestrzenie słabo ciągowo zupełne oraz podano pewne własności krat Banacha.

Funkcje stożkowo wypukłe zostały omówione w rozdziale 2 rozprawy. Autor podkreśla ważność wyników zawartych w pracach znanych matematyków Borweina, Valadiera i Zowe, którzy badali istnienie pochodnych kierunkowych funkcji stożkowo wypukłych. Pojęcie silnej $\alpha(\cdot) - k-$parawypukłości zostało wprowadzone przez Rolewicza w 2011 r. Autor w rozdziale 2 przedstawia pewne własności funkcji $\alpha(\cdot) - k-$parawypukłych, które są uogólnieniem funkcji stożkowo wypukłych. Mimo prostego dowodu, interesujący jest Lemat 2.6, podający charakteryzację funkcji stożkowo wypukłych za pomocą wypukłości funkcji skalarnych.
LEMAT 2.6 (Bednarczuk, Leśniewski 2017) *Niech X będzie przestrzenią wektorową, Y przestrzenią unormowaną. Niech $A \subset Y$ będzie wypukłym zbiorem w X. Niech $K \subset Y$ będzie domkniętym i wypukłym i ostrym stożkiem. Następujące warunki są równoważne :*
(i) *funkcja $f : X \to Y$ jest K-wypukła na A,*
(ii) *dla każdego $y^* \in K^*$ złożenie $y^*(f) : A \to \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą.*

Jednym z głównych wyników rozdziału 3 jest Twierdzenie 3.12 o istnieniu pochodnej kierunkowej dla silnie $\alpha(\cdot) - k-$parawypukłych funkcji. Treść twierdzenia jest następująca:
TWIERDZENIE 3.12 (Bednarczuk, Leśniewski 2018) *Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Niech Y będzie słabo ciągowo zupełną przestrzenią Banacha uporządkowaną przez domknięty, wypukły i normalny stożek K. Wtedy każda funkcja $f : X \to Y$ silnie $\alpha(\cdot) - k-$parawypukła na wypukłym zbiorze A posiada pochodną kierunkową dla każdego dopuszczalnego kierunku h, to znaczy istnieje mocna granica*

$$f'(x_0, h) = \lim_{t\to 0^+} \tfrac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t} \text{ dla każdego } x_0 \in A.$$

Powyższe twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia Valadiera o istnieniu pochodnej kierunkowej dla funkcji stożkowo wypukłych.
Następnym ważnym wynikiem przedstawionym przez autora w rozdziale 3 jest pokazanie różniczkowalności w sensie Gâteaux na zbiorze gestym typu G_δ funkcji stożkowo wypukłych. Wynik ten jest treścią Twierdzenia 3.24:
TWIERDZENIE 3.24 (Leśniewski) *Niech X będzie przestrzenią ośrodkową Banacha. Niech Y będzie refleksywną przestrzenią Banacha. Niech K będzie domkniętym i normalnym stożkiem w Y. Niech $f : X \to Y$ będzie ciągła i K-wypukła (na X). Wtedy f jest różniczkowalna w sensie Gâteaux na pewnym gestym zbiorze $A_0 \subset X$ typu G_δ.*

W rozdziale 4 podano konstrukcję funkcji stożkowo wypukłej f o wartościach w przestrzeni Banacha Y, której iloraz różnicowy, dla zadanego ciągu $t_n \to 0^+$, przyjmuje zadane wartości ciągu $\{y_n\} \subset Y$ tj.

$$\frac{f(x_0 + t_k h) - f(x_0)}{t_k} = y_k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Jeżeli ciąg $\{y_n\}$ jest rozbieżny, to skonstruowana funkcja f nie posiada pochodnej kierunkowej.

Żeby skonstruować funkcję o powyższych własnościach w Lemacie 4.1 zdefiniowano funkcję wypukłą $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która dla zadanego ciągu argumentów $\{t_m\}$ przyjmuje zadane wartości ciągu $\{a_m\}$. Lemat 4.1 jest interesujący o treści:

LEMAT 4.1 (Bednarczuk, Leśniewski 2017) *Rozważmy dwa ciągi* $\{a_m\}, \{t_m\} \subset \mathbb{R}$ *i załóżmy, że* $\{t_m\}$ *jest malejący. Funkcja* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zdefiniowana jako* $g(r) := \sup_m f_m(r)$, *gdzie*

$$f_m(x) := a_m + \frac{x - t_m}{t_{m+1} - t_m}(a_{m+1} - a_m), \text{ dla } x \in \mathbb{R}$$

jest wypukła na $\mathbb{R}$ *i* $g(t_m) = a_m$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{a_{m+1} - a_m}{t_{m+1} - t_m} \geqslant \frac{a_{m+2} - a_{m+1}}{t_{m+1} - t_m} \text{ dla } m \in \mathbb{N}. \tag{WMN}$$

Warunek WMN autor nazywa "warunkiem montonicznych nachyleń". W Stwierdzeniu 4.2 zmodyfikowano konstrukcję z Lematu 4.1 dla dowolnego ciągu $\{z_m\}$ zbieżnego do $z > 0$.

STWIERDZENIE 4.2 (Bednarczuk, Leśniewski 2017) *Niech* $\{z_m\} \subset \mathbb{R}$ *i* $\lim_{z\to\infty} z_m = z > 0$. *Wtedy istnieje podciąg* $\{z_{m_k}\} \subset \{z_m\}$, *ciąg* $\{t_k\} \subset \mathbb{R}, t_k \downarrow 0$ *oraz funkcja wypukła* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *taka, że* $g(t_k) = g(a_k), k \in \mathbb{N}$.

W Stwierdzeniu 4.2 podano również postać ciągu $\{a_k\}$, zależnego od monotoniczności podciągu $\{z_{m_k}\}$ oraz z.

Stwierdzenie 4.3 jest przeformułowaną wersją Stwierdzenia 4.2 dla ciągu $z_k = y^*(y_{m_k})$, gdzie $y^* \in Y^*$ i Y jest przestrzenią unormowaną. Stwierdzenie 4.3 jest wykorzystane w rozprawie w dowodzie Twierdzenia 5.1, podającego warunek konieczny istnienia pochodnej kierunkowej funkcji $f : X \to Y$.

W podrozdziale 2 przedstawiono konstrukcję funkcji stożkowo wypukłej f o zadanym ilorazie różnicowym dla danego ciągu $\{y_k\} \subset Y$. Dla skonstruowania tej funkcji określonej na zbiorze A przy założeniu, że X jest przestrzenią liniową a Y przestrzenią Banacha $A := \{x \in X : x = rh, r \geqslant 0\}$, $h \in X \setminus \{0\}$. Autor definiuje funkcje $f_k : A \to Y$, $k \in \mathbb{N}$, które wykorzystuje do zdefiniowania funkcji $f : A \to Y$

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x), \; x \in A. \tag{$*$}$$

Warunek $(*)$ odpowiada warunkowi (4.4) rozprawy. Następnie podano interesujące warunki, które musi spełniać stożek $K \subset Y$, żeby skonstruowana funkcja f była K-wypukła.

STWIERDZENIE 4.4 (Leśniewski 2017) *Niech* $K \subset Y$ *będzie domkniętym, wypukłym i ostrym stożkiem. Niech dany będzie ciąg* $\{y_i\} \subset Y$ *w przestrzeni unormowanej* Y. *Funkcja* f *zdefiniowana jak w* $(*)$ *dla* $t_k = \frac{1}{k}, k = 1, 2, ...,$ *jest* K*-wypukła na* A *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$y^*(2y_{k+1} - y_k - y_{k+2}) \leqslant 0 \text{ dla każdego } y^* \in K^*, k = 1, 2, ... \tag{MNBS}$$

Warunek MNBS autor nazywa "warunkiem na bazę stożka". Korzystając ze Stwierdzenia 4.4 autor podaje konstrukcję stożków normalnych, przy odpowiednim ciągu $\{y_k\}$ tak, żeby funkcja f była K-wypukła.

STWIERDZENIE 4.5 (Leśniewski 2017) *Niech* $\{y_i\} \subset Y$ *będzie ciągiem w* Y*. Jeżeli* $\{b_k\} \subset Y$ *zdefiniowany jako* $b_k := 2y_{k+1} - y_k - y_{k+2}$, $k = 1, 2, ...,$ *tworzy bazę bezwarunkową w* Y*, wtedy funkcja* $f : X \to Y$ *zdefiniowana przez warunek* $(*)$ *dla* $t_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$ *jest* $(-K_{\{b_k\}})$*-wypukła, gdzie*

$$K_{\{b_k\}} := \{y \in Y \, : y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i, \; a_i \geqslant 0, \; i = 1, 2, \ldots\}.$$

Należy podkreślić, że Stwierdzenia 4.4 i 4.5 są twierdzeniami samodzielnie udowodnionymi przez autora rozprawy i mają istotne znaczenie w dowodach twierdzeń 5.1 i 5.3, będących jednymi z gównych wyników rozprawy.

W Rozdziale 5 wykorzystując konstrukcje z Rozdziału 4 udowodniono ważne Twierdzenie 5.1 w którym podano warunek konieczny istnienia pochodnej kierunkowej dla funkcji $f : X \to Y$. Mianowicie:

TWIERDZENIE 5.1 (Bednarczuk, Leśniewski 2017) *Niech* X *będzie przestrzenią liniową. Niech* Y *będzie przestrzenią Banacha. Jeżeli dla każdego domkniętego, wypukłego stożka* $K \subset Y$ *i każdej* K*-wypukłej funkcji* $f : A \to Y$*, gdzie* $A \subset X$ *jest wypukły oraz* $0 \in A$*, pochodna kierunkowa* $f'(0, h)$ *istnieje dla każdego dopuszczalnego kierunku* $h \in X$*, wtedy przestrzeń* Y *jest słabo ciągowo zupełna.*

Skonstruowany w dowodzie Twierdzenia 5.1 stożek K nie jest normalny. Przy założeniu normalności stożka K, autor dowodzi interesujace:

TWIERDZENIE 5.3 (Leśniewski 2017) *Niech* X *będzie przestrzenią liniową i niech* Y *będzie przestrzenią Banacha. Jeżeli dla każdego domkniętego, wypukłego i normalnego stożka* $K \subset Y$ *i każdej* K*-wypukłej funkcji* $f : A \to Y$*, gdzie* $A \subset X$ *jest wypukły oraz* $0 \in A$*, pochodna kierunkowa* $f'(0, h)$ *istnieje dla każdego dopuszczalnego kierunku* $h \in X$*, wtedy przestrzeń* Y *nie zawiera kopii* c_0.

Korzystając z Twierdzenia 5.3 autor we Wniosku 5.4 stwierdza, że przy założeniach Twierdzenia 5.3 przestrzeń Y nie jest izomorficzna z przestrzenią c_0.

Następnym ważnym wynikiem autora, jest charakteryzacja słabo zupełnych krat Banacha za pomocą istnienia pochodnej kierunkowej. W rozprawie jest to Twierdzenie 5.6 o treści:

TWIERDZENIE 5.6 (Leśniewski 2017) *Niech* Y *będzie kratą Banacha. Wtedy* Y *jest jest przestrzenią słabo ciagowo zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego domkniętego wypukłego i normalnego stożka* $K \subset Y$ *i każdej* K*-wypukłej funkcji* $f : A \to Y$*, gdzie* $A \subset X$ *jest wypukły oraz* $0 \in A$*, pochodna kierunkowa* $f'(0, h)$ *istnieje dla każdego dopuszczalnego kierunku* $h \in X$.

Jak zauważa autor w Uwadze 5.8, założenie w Twierdzeniu 5.6, że Y jest kratą Banacha jest istotne. Ponieważ istnieją przestrzenie, które nie są słabo ciągowo zupełne i nie zawierają kopii c_0 czy l_p, $p \geqslant 1$, np. przestrzeń Jamesa nie posiada izomorficznej kopii c_0 i l_1.

W ostatnim rozdziale autor przedstawia podstawowe własności subgradientów i subróżniczek funkcji wektorowych. Opisano subróżniczki Pareto i tzw. subróżniczkę idealną, podano zastosowanie dotyczące ciągłości w sensie Lipschitza rozwiązań zaburzonych problemów optymalizacji względem liniowego zaburzenia (Twierdzenie 6.27). Następne zastosowanie dotyczące subregularności subróżniczek funkcji stożkowo wypukłych zostało przestawione w Twierdzeniu 6.31 i Twierdzeniu 6.33.

Tematyka rozprawy jest bardzo aktualna. Pochodne kierunkowe odgrywają ważną rolę w analizie wypukłej oraz w teorii optymalizacji. W ostatnich latach ukazało się wiele prac w których, w definicji pochodnej kierunkowej wykorzystuje się różnicę Minkowskiego-Pontryagina, bądź bada się pochodne kierunkowe funkcji o wartościach w stożku domkniętych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni X. Takie pochodne rozpatruje ostatnio w swoich pracach Jahn, znajdując ich liczne zastosowania. Również pochodne kierunkowe odgrywają istotną rolę w rachunku quasiróżniczkowym rozwiniętym przez Demyanova i Rubinova.
Jak już wspomniałem rozprawa jest obszerna i ma charakter 102 stronicowej książki. Napisana jest starannie jednak ze względu na jej obszerność trudno się ustrzec drobnych błędów redakcyjnych. Np. w definicji normy w przestrzeni Jamesa są drobne błędy dotyczące indeksów. Również w definicji 1.12 bazy w przestrzeni Y należało wspomnieć, że tak zdefiniowaną bazę nazywamy bazą Schaudera. Można w pracy znaleźć błędy redakcyjne tzw. literówki o których nie będę wspominał. Te drobne usterki nie obniżają wartości rozprawy.

Rozprawa doktorska pana magistra Krzysztofa Leśniewskiego prezentuje wysoki poziom merytoryczny i czyta się ją z zainteresowaniem. Została ona napisana starannie i elegancko. Uzyskane wyniki są oryginalne i wartościowe.
Część wyników rozprawy doktorskiej pana magistra Krzysztofa Leśniewskiego została opublikowana wspólnie z prof. dr hab. Ewą Bednarczuk w Control and Cybernetics 2015; Journal of Convex Analysis 2017; Vietnam Journal of Mathematics 2018. Również należy wspomnieć o samodzielnej pracy Leśniewskiego w arXiv 2017.

Szczególnie interesujaca jest otrzymana przez autora rozprawy charakteryzacja słabo ciągowo zupełnych krat Banacha wyrażona za pomocą istnienia pochodnej kierunkowej funkcji stożkowo wypukłych (Twierdzenie 5.6). Również wyniki dotyczące warunków koniecznych istnienia pochodnych kierunkowych funkcji stożkowo wypukłych uważam za głębokie i wnoszące istotny wkład w analizę wypukłą i funkcjonalną (Twierdzenie 5.1, 5.3).

Rozprawa wskazuje na umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej przez pana magistra Krzysztofa Leśniewskiego oraz jego ogólną wiedzę teoretyczną w zakresie analizy wypukłej, funkcjonalnej oraz teorii optymalizacji. Spełnia ona wszystkie wymagania zwyczajowe i formalne stawiane rozprawom doktorskim z matematyki. W szczególności spełnia wymogi stawiane rozprawom doktorskim w art. 13 ust. 1 Ustawy z dnia 18 marca 2011 roku o zmianie ustawy- Prawo o szkolnictwie wyższym, ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki. Dlatego też wnioskuję o dopuszczenie magistra Krzysztofa Leśniewskiego do dalszych etapów postępowania w przewodzie doktorskim w celu nadania mu stopnia doktora nauk matematycznych.

Ponadto uważam, że jest to rozprawa wyróżniająca się.

ARłasiski