

WARSAW UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FACULTY OF MATHEMATICS AND INFORMATION SCIENCE

# Ph.D. Thesis

Tomasz Miller, M.Sc.

**Causality theory for probability measures  
on spacetimes**

Supervisor

Leszek Pysiak, Ph.D., D.Sc.

Co-supervisor

Michał Eckstein, Ph.D.

WARSAW 2017

# Abstract

Causality theory is the study of certain structures on Lorentzian manifolds, designed to model causal properties of spacetimes in the context of relativistic physics. The fundamental role in this theory is played by the binary relation  $\preceq$  on a given spacetime  $\mathcal{M}$ , called the *causal precedence relation* and often referred to as  $J^+$ , which describes the possible cause-effect relationships between events, i.e. the points of  $\mathcal{M}$ .

The aim of this thesis is to propose an extension of the relation  $\preceq$  onto the space  $\mathcal{P}(\mathcal{M})$  of Borel probability measures on  $\mathcal{M}$ , study its properties and characterizations, as well as develop its possible applications in mathematical relativity and quantum physics.

The thesis comprises three published, interrelated research articles.

In the first one, entitled *Causality for nonlocal phenomena* (co-authored with M. Eckstein), the above-mentioned extension of the relation  $\preceq$  is introduced and thoroughly studied, to which end various tools of Lorentzian geometry and optimal transport theory are employed. Additionally, the extended relation is applied to define the so-called Lorentz–Wasserstein distances, which can be regarded as Lorentzian analogues of the Wasserstein distances known from Riemannian geometry.

The second, sole-authored article, entitled *Polish spaces of causal curves*, builds upon the causality theory for probability measures developed in the previous article. Its aim is to provide a rigorous mathematical framework for describing a causal time-evolution of probability measures in any globally hyperbolic spacetime. To this end, it proposes how to furnish certain sets of causal curves (i.e. “physically reasonable worldlines”) with a Polish space topology. The detailed study of thus obtained spaces is followed by proving the main result of the paper, which lies within the domain of Lorentzian optimal transport theory, and which provides two equivalent ways of describing a causal time-evolution of probability measures.

The third article, entitled *Causal evolution of wave packets* (co-authored with M. Eckstein), presents an application of the formalism developed in the previous two papers to the study of causality in quantum physics. More concretely, a quantitative measure of the “causality violation” of a given physical model is proposed and tested on models driven by three basic quantum-mechanical Hamiltonians. On the mathematical side, the paper’s most important result is showing a relationship between the so-called continuity equation and the causal time-evolution of probability measures (in the Minkowski spacetime).

**Keywords:** causality, Lorentzian geometry, optimal transport theory, causal curves, spacetime

## Streszczenie

Teoria przyczynowości zajmuje się pewnymi strukturami na rozmaitościach lorentzowskich, których zadaniem jest modelowanie przyczynowych własności czasoprzestrzeni w kontekście fizyki relatywistycznej. Fundamentalną rolę odgrywa w tej teorii relacja dwuarumentowa  $\preceq$  na danej czasoprzestrzeni, nazywana *relacją poprzedzania przyczynowego* i często oznaczana jako  $J^+$ , która opisuje możliwe związki przyczynowo-skutkowe pomiędzy zdarzeniami, tj. punktami  $\mathcal{M}$ .

Celem rozprawy jest zaproponowanie rozszerzenia relacji  $\preceq$  na przestrzeń  $\mathcal{P}(\mathcal{M})$  borelowskich miar probabilistycznych na  $\mathcal{M}$ , zbadanie jej własności i różnych charakterystyk, a także rozwinięcie potencjalnych zastosowań w teorii względności i fizyce kwantowej.

Na rozprawę składają się trzy opublikowane, wzajemnie powiązane artykuły naukowe.

W pierwszym z nich, zatytułowanym *Causality for nonlocal phenomena (Przyczynowość dla zjawisk nielokalnych, współautor: M. Eckstein)*, wspomniane rozszerzenie relacji  $\preceq$  zostaje wprowadzone i gruntownie zbadane przy użyciu różnorodnych narzędzi geometrii lorentzowskiej oraz teorii optymalnego transportu. Ponadto, za pomocą tego rozszerzenia zdefiniowane zostają tzw. odległości Lorentza–Wassersteina, które można traktować jako lorentzowskie odpowiedniki odległości Wassersteina znanych z geometrii riemannowskiej.

Drugi, samodzielny artykuł pt. *Polish spaces of causal curves (Przestrzenie polskie krzywych przyczynowych)* istotnie korzysta z teorii przyczynowości dla miar probabilistycznych rozwiniętej w poprzedniej pracy. Jego celem jest dostarczenie ścisłego formalizmu matematycznego do opisu przyczynowej ewolucji czasowej miar probabilistycznych w dowolnej czasoprzestrzeni globalnie hiperbolicznej. W tym celu zostaje w nim zaproponowany sposób na wyposażenie pewnych zbiorów krzywych przyczynowych (czyli „fizycznie sensownych linii świata”) w topologię przestrzeni polskiej. Po szczegółowym zbadaniu tak otrzymanych przestrzeni, udowodniony zostaje główny rezultat pracy, leżący w obrębie lorentzowskiej teorii optymalnego transportu, który dostarcza dwóch równoważnych sposobów opisu przyczynowej ewolucji czasowej miar probabilistycznych.

Trzeci artykuł pt. *Causal evolution of wave packets (Przyczynowa ewolucja paczek falowych, współautor: M. Eckstein)* przedstawia pewne zastosowanie formalizmu rozwiniętego w poprzednich pracach do badania przyczynowości w fizyce kwantowej. Konkretniej, zostaje w nim zaproponowana ilościowa miara „łamania przyczynowości” przez dany model fizyczny, która następnie zostaje przetestowana na modelach opartych o trzy podstawowe hamiltoniany mechaniki kwantowej. Z matematycznego punktu widzenia, najważniejszym wynikiem tej pracy jest wykazanie związku między tzw. równaniem ciągłości a przyczynową ewolucją czasową miar probabilistycznych (w czasoprzestrzeni Minkowskiego).

**Słowa kluczowe:** przyczynowość, geometria lorentzowska, teoria optymalnego transportu, krzywe przyczynowe, czasoprzestrzeń