

6 Października 2017 roku

Dziekan Wydziału Matematyki
Politechniki Warszawskiej
dr hab. inż. Wojciech Dormitrz
ul. Koszykowa 75
00-662 WARSZAWA

Recenzja pracy doktorskiej mgr Tomasza Millera

pt.

„Causality Theory for Probability Measures on Spacetimes”

Mgr Tomasz Miller przedstawił obszerną rozprawę doktorską na temat przyczynowej ewolucji miar przestrzennych lub czasoprzestrzennych. Przeprowadzone przezeń badania i wykazane twierdzenia znajdują zastosowanie w teoriach fizycznych, w których stan układu opisuje się w sposób probabilistyczny, jako pewien rozkład prawdopodobieństwa w przestrzeni fizycznej. O ile przyczynowość ewolucji punktu materialnego łatwo zdefiniować żądając, by jego trajektoria była krzywą przyczynową (tzn. czasową lub – nieco słabiej – czasową lub świetlną), o tyle przyczynowość ewolucji miary opisującej prawdopodobieństwo zajęcia przezeń pewnego położenia wymaga głębszego namysłu. Można powiedzieć, że właśnie ten „namysł” stanowi treść rozprawy.

Na pierwszy rzut oka sprawa wydaje się dość prosta: każda miara jest splotem „delt Diraca” z samą sobą, a więc (uogólnioną) sumą poprzesuowanych „delt”. Wystarczy teraz ewoluować wszystkie te delty po krzywych przyczynowych. Chodzi oczywiście nie o ewolucję przyczynową, gdzie każda z tych delt poruszała by się po konkretnej trajektorii, ale o ewolucję probabilistyczną, w czasie której jedna delta rozplywa się po różnych krzywych przyczynowych z określonym prawdopodobieństwem. Jednak szczegóły techniczne takiej analizy okazują się być dość złożone. Bardzo wnikliwa i kompetentna dyskusja tego zjawiska stanowi treść drugiego rozdziału rozprawy, który został już opublikowany jako artykuł naukowy w prestiżowym czasopiśmie **Annales de l'Institut Henri Poincaré**, autorstwa doktoranta oraz promotora pomocniczego. Autorzy rozważają osiem różnych struktur przyczynowych na czasoprzestrzeni (str. 28) a następnie badają siedem różnych porządków przyczynowych na zbiorze miar probabilistycznych (patrz Twierdzenie 8 na str. 41). Otrzymana hierarchia warunków przyczynowości jest bardzo interesująca a sprawność autorów w operowaniu wyrafinowanymi pojęciami z topologii i teorii miary jest imponująca. Głównym wynikiem jest – w mojej ocenie – sformułowanie struktury kauzalnej dla miar w postaci warunku „7*” (str. 42). Jest to rzeczywiście bardzo piękna i naturalna definicja tej struktury a pokazanie jej związku z innymi warunkami jest bardzo ładnym wynikiem matematycznym.

Drugą składową rozprawy stanowi jej Rozdział 3, zawierający wyniki opublikowane przez samego doktoranta w (równie prestiżowym) czasopiśmie **Journal of Geometry and Physics**. I znów idea tej konstrukcji jest piękna i prosta: dysponując rodziną ewoluujących miar przestrzennych, można zbudować coś w rodzaju miary Wienera na krzywych czasoprzestrzennych. Otóż ewolucja przyczynowa powinna dawać miarę skoncentrowaną na krzywych przyczynowych.

Ale i tutaj „diabeł tkwi w szczegółach”. Aby powyższej idei nadać sens matematyczny trzeba sprecyzować klasę trajektorii, na której będzie określona ta „miarą Wienera”. Autor pokazuje, że zbiór trajektorii przyczynowych jest w sposób naturalny wyposażony w topologię tzw. „przestrzeni polskiej” i to właśnie na niej będzie określona ta miara. Zwraca uwagę doskonały warsztat autora, który powyższe – intuicyjnie dość proste – idee potrafi przetworzyć na precyzyjne twierdzenia matematyczne. Główną trudnością mogłaby tu być konieczność opisu trajektorii **niesparametryzowanej** jako klasy równoważności jej różnych parametryzacji, jednak autor pokazuje, że dla trajektorii przyczynowych problem wyboru parametryzacji nie stwarza większych kłopotów: krzywe przyczynowe nie mogą być zbyt „pokręcone”, więc wybór dowolnego „czasu laboratoryjnego” jako parametru prowadzi w uniwersalny sposób do dobrej topologii w zbiorze tych krzywych. Po pokonaniu wszystkich problemów technicznych autor przedstawia ładne zastosowanie powyższej konstrukcji do teorii optymalnego transportu.

Trzecia część pracy to znów wspólna z promotorem pomocniczym publikacja w **Physical Review A**, zatytułowana „Causal evolution of wave packets”. Zawiera ona próbę zastosowania powyższych wyników w mechanice kwantowej. Wersja nierelatywistyczna mechaniki kwantowej „podaje nam na dłoni” ewolucję gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w danym punkcie, równą kwadratowi modułu funkcji falowej. Jest to właśnie taka rodzina miar μ_t , jaką bada doktorant. Oczywiście ewolucja ta, wynikająca z równania Schrödingera, **na pewno** nie będzie przyczynowa. Autorzy badają natomiast wersję relatywistyczną, opisaną równaniem Diraca lub Kleina-Gordona. Ta ostatnia nazwa nie pada w pracy, ale tzw. relatywistyczna mechanika kwantowa badana na str. 118 to nic innego jak „połówka” teorii Kleina-Gordona, otrzymana po odseparowaniu dodatnich częstotliwości (cząstek) od częstotliwości ujemnych (antycząstek).

Dla takiej teorii przyczynowość jest oczywiście złamana. Natomiast dla równania Diraca przyczynowość w sensie zaproponowanym w pracy zachodzi, co w bardzo ładny sposób wynika ze spełnienia równania ciągłości dla gęstości prawdopodobieństwa. Przyznam, że trudno mi się zgodzić z tą interpretacją, jako że równanie Diraca słabo poddaje się interpretacji kwantowo-mechanicznej. Nawet jeśli stan początkowy opisuje czystą cząstkę, bez domieszki antycząstki, to w trakcie oddziaływania na ogół wykreuje się również antycząstka („dziura” w nomenklaturze wprowadzonej przez Dirac’a). Dlatego też interpretacja kwadratu funkcji falowej jako gęstości prawdopodobieństwa znalezienia czegoś w danym punkcie jest trochę naciągana. Tym niemniej uzyskany w tym rozdziale związek ewolucji przyczynowej z równaniem ciągłości jest wynikiem bardzo eleganckim matematycznie.

Oceniam tę rozprawę bardzo pozytywnie. Jest oparta na ciekawych intuicjach fizycznych oraz bardzo kompetentnych badaniach z zakresu topologii i teorii miary. Fakt, że wszystkie wyniki pracy zostały już opublikowane w bardzo dobrych czasopismach naukowych wymownie świadczy o ich jakości. Biorąc to wszystko pod uwagę stwierdzam, że rozprawa doktorska mgr Tomasza Millera spełnia wszystkie ustawowe wymagania i na pewno może być podstawą dla przyznania mu stopnia doktora matematyki. Wnoszę zatem o dopuszczenie jej autora do obrony i do dalszych etapów przewodu. Poza tym uważam, że jest to rozprawa zdecydowanie **wyróżniająca się** poziomem na tle znanych mi rozpraw z tej dziedziny i będę namawiał komisję do przyznania jej takiego statusu.

Z poważaniem


Jerzy Kijowski

