Dr hab. Robert Wolak
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński

Kraków, 30 maja 2017 roku

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Tomasza Millera pt.

Causality Theory for Probability Measures on Spacetimes

Na zasadniczą część rozprawy składają się trzy opublikowane artykuły:

1) M. Eckstein, T. Miller, *Causality for nonlocal phenomena,* Ann. Henri Poincaré (2017)

2) T. Miller, *Polish spaces of causal curves*, J. Geom. Phys. 116 (2017), 295-315

3) M. Eckstein, T. Miller, *Casual evolution of wave packets*, Physical review A 95, 032106

dotyczące matematycznych i fizycznych aspektów teorii przyczynowości. Stanowią one odpowiednio rozdziały 2, 3 i 4 dysertacji. Poprzedza je wstęp będący prowadzeniem do zagadnień matematycznych i fizycznych głównej części rozprawy. Króciutki rozdział piąty przedstawia zarys dalszych możliwych badań.

Rozdział 1 składa się z 3 zasadniczo różnych części. Część pierwsza wprowadza podstawowe pojęcia z teorii czasoprzestrzeni i teorii przyczynowości. Część druga to krótkie streszczenie trzech artykułów stanowiących jądro rozprawy wraz z precyzyjnym podaniem wkładu doktoranta w w/w prace. Ostatnia część tego rozdziału zawiera wprowadzenie do teorii polskich przestrzeni topologicznych będących bazą matematycznych rozważań autora.

Rozdział 2 (Chapter 2) zawiera pracę *Causality for nonlocal phenomena.* Składa się on z 6 części. Część pierwsza to wprowadzenie, uzasadnienie podjętych badań jak i streszczenie pracy. W klasycznym przypadku lorentzowskim krzywe przyczynowe całkowicie wystarczają do opisu fenomenu przyczynowości. Jednak gdy opisywane obiekty fizyczne nie są lokalne/punktowe to tego typu opis staje się nieprecyzyjny. W przypadku takich fenomenów fizycznych autor proponuje inną relację przyczynowości opartą relacji pomiędzy miarami prawdopodobieństwa. W części drugiej są zaprezentowane ważne pojęcia z topologii, teorii miary i teorii przyczynowości, które są następnie używane w dalszych częściach rozdziału. Klasyczna relacja przyczynowości zdefiniowana na czasoprzestrzeni M definiuje podzbiór $J+$ iloczynu kartezjańskiego MxM składający się z par punktów (p,q) gdzie p przyczynowo poprzedza q. W części trzeciej udowodniono, że dla dowolnej czasoprzestrzeni zbiór $J+$ jest σ-zwarty. Część czwarta stanowi zasadniczą i najdłuższą część tego rozdziału. Korzystając z charakterystyki klasycznej relacji przyczynowego poprzedzania autor definiuje relację przyczynowego poprzedzania dla borelowskich miar probabilistycznych:

Definicja 1 Niech M będzie globalnie hiperboliczną czasoprzestrzenią. Mówimy, że borelowska miara probabilistyczna μ poprzedza przyczynowo miarę ν gdy dla dowolnej gładkiej ograniczonej funkcji przyczynowej f

$$\int f d\mu \leq \int f d\nu \qquad (*)$$

Relacja ta była już badana przez Franco i Ecksteina, którzy udowodnili, że jest to relacja częściowego porządku.

W pierwszej części tego rozdziału autor osłabia założenia przyjęte w powyższej definicji. W kolejnych twierdzeniach (Theorem 6, 7, 8) formułuje różne warunki równoważne warunkowi (*) przy osłabionych założeniach o czasoprzestrzeni. W sumie jest podanych 9 różnych warunków na relacje pomiędzy miarami probabilistycznymi, które są równoważne w przypadku gdy czasoprzestrzeń jest globalnie hiperboliczna. Rozważania części pierwszej pozwalają autorowi na wyróżnienie jednego z warunków, który przyjmuje za definicję przyczynowego poprzedzania miar probabilistycznych, Definition 2. Miara μ przyczynowo poprzedza miarę ν gdy istnieje miara probabilistyczna ω na MxM indukująca miary μ i ν na M taka, że $\omega (J+) =1$. $\omega (J+)$ jest dobrze określone ponieważ autor wcześniej udowodnił, że zbiór $J+$ jest σ-zwarty. Taką miarę ω nazywamy *przyczynowym sprzężeniem* (*causal coupling*). Pojęcie sprzężenia miar pochodzi z teorii optymalnego sterowania, ale drugi warunek ($\omega (J+) =1$) wiąże definicję z teorią przyczynowości, i stąd zaproponowana nazwa *przyczynowe sprzężenie*. Autor pokazuje, że tak zdefiniowana relacja dla miar jest zgodna z klasyczną relacją przyczynowego poprzedzania, tj. punkt p poprzedza przyczynowo punkt q wtw gdy odpowiadająca miara Diraca δp poprzedza przyczynowo miarę Diraca δq, Corollary 5. Następnie autor pokazuje, że relacja dla miar jest zwrotna i tranzytywna (Theorem 11), a przy pewnych dodatkowych założeniach o czasoprzestrzeni także antysymetryczna (Theorem 12). W piątej części autor wprowadza metryki typu Lorentz'a-Wasserstein'a na przestrzeni miar probalistycznych i bada ich podstawowe własności vis-à-vis przyczynowego poprzedzania.

Rozdział 3 to druga praca mgr Millera. Jak sam tytuł wskazuje autor proponuje nowe podejście do topologizacji przestrzeni krzywych przyczynowych.

Składa się on z pięciu części o różnej długości i wadze. Pierwsze dwie krótkie części mają charakter wprowadzający: omawiają najważniejsze wyniki i ich możliwą interpretację. W długiej części trzeciej autor bada własności topologiczne zwartych dróg/krzywych przyczynowych w stabilnie przyczynowych czasoprzestrzeniach. W szczególności pokazuje, że przestrzeń ta z topologią *C^0* jest przestrzenią polską, tj. jest to przestrzeń topologiczna ośrodkowa całkowicie metryzowalna.
Cześć czwarta tego rozdziału zawiera dowody dwóch najważniejszych wyników dotyczących krzywych przyczynowych miar probabilistycznych na globalnie hiperbolicznych czaso-przestrzeniach, (Theorem 1 oraz Theorem 2, str. 67). Ostatnia część powtarza podstawowe informacje z teorii przyczynowości.

Rozdział 4 prezentuje trzecią pracę składającą na rozprawę. Ta część rozprawy jest w dużej mierze poświęcona fizycznym zastosowaniom zbudowanej wcześniej teorii. Autor wprowadza pojęcie przyczynowej ewolucji miar (*causal evolution of measures* – Definition 2), a następnie proponuje naturalny warunek zapewniający, że dana ewolucja miar jest przyczynowa, Theorem 3. Pozostałą część rozdziału wypełniają konkretne przykłady modeli zjawisk fizycznych.

Rozprawa jest bardzo dobrze napisana. Definicje, wypowiedzi twierdzeń i własności, są sformułowane poprawnie i przejrzyście. Dowody zostały przeprowadzane w sposób konkretny, bez nadmiernego sformalizowania, ale z drugiej strony bez przegadania.

Autor wykazał się bardzo dobrą wiedzą matematyczną. Przeprowadzone dowody wymagały znacznej wiedzy zarówno z topologii jak i teorii miary oraz jej zastosowań.

Tematyka rozprawy jest ciekawa. Najważniejszym osiągnięciem rozprawy jest chyba dobrze sformułowana definicja relacji przyczynowości dla miar probabilistycznych. Udowodnione własności tej relacji oraz omawiane przykłady fizyczne pozwalają mniemać, że wyniki p. Millera mogą mieć szerokie zastosowania w kwantowych modelach zjawisk fizycznych. Bardzo pouczające wydają się także rozważania poprzedzające zdefiniowanie relacji przyczynowości dla miar. Autor wykazał się także bardzo dobrą znajomości literatury tematu.

Moim jedynym zastrzeżeniem w stosunku do rozprawy jest przyjęcie założenia przytaczania trzech opublikowanych artykułów *in extenso*, np. nie wiem dlaczego przytoczono Appendix z pracy [2] w Chapter 3.5. Także trochę mnie dziwi przyjęta zasada, że *Theorem*, *Definition* oraz *Lemma* są pisane kursywą, a Proposition i Corollary zwykłą czcionką.

Uważam, że przedstawiona rozprawa doktorska spełnia wszystkie wymagania ustawowe i wnioskuję o dopuszczenie mgr Tomasza Millera do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Sądzę, że z powodu bardzo dobrze opracowanej i przedstawionej matematycznej teorii przyczynowości rozprawa zasługuje na **wyróżnienie.**