Tomasz Rychlik
Instytut Matematyczny PAN
Warszawa

Warszawa, 27 maja 2019 r.

Recenzja pracy doktorskiej mgr Agnieszki Piliszek
pt. *Wokół pewnej własności niezależności zmiennych losowych o rozkładach gamma i Kummera*

Rozprawa dotyczy charakteryzacji pary niezależnych zmiennych losowych o rozkładach gamma i Kummera i ich uogólnień poprzez własność niezależności elementów pewnego przekształcenia. W najprostszym przypadku jednowymiarowych zmiennych losowych, gdzie rozkład gamma $\mathcal{G}(a,c)$ o gęstości

$$f_{a,c}(x) = \mathrm{const}(a,c)\, x^{a-1}\, e^{-cx}, \qquad x > 0,$$

z dodatnimi parametrami a i c jest powszechnie znany, a rozkład Kummera jest jego uogólnieniem o gęstości postaci

$$f_{a,b,c}(x) = \mathrm{const}(a,b,c)\, x^{a-1}\, (1+x)^{-a-b}\, e^{-cx}, \qquad x > 0,$$

z parametrami $a, c > 0$ i $b \in \mathbb{R}$, charakteryzacja brzmi następująco: jeśli para dodatnich zmiennych (X,Y) a także współrzędne ich przekształcenia

$$(U,V) = T(X,Y) = \left(\frac{Y}{1+X}, \frac{X(1+X+Y)}{1+X}\right) \tag{1}$$

są niezależne, to X i U mają rozkłady Kummera, a Y i V — rozkłady gamma, przy czym parametry (U,V) jednoznacznie zależą od parametrów (X,Y). W rozprawie uogólniono te charakteryzacje na wektory i macierze losowe oraz losowe operatory liniowe na przestrzeniach Hilberta. Możnaby żartobliwie opisać rozprawę jako modelowy przykład osiągnięcia habilitacyjnego, czyli monotematycznego cyklu publikacji (tu: rozdziałów) stanowiących istotny wkład w rozwój dyscypliny (tu: matematyki). Należy jednak od razu podkreślić, że nie można było (przynajmniej na razie) udowodnić najpierw najogólniejszych wyników dla losowych operatorów, zapisanych w rozdziale 5, a wyniki dla macierzy, wektorów i pojedynczych zmiennych losowych odpowiednio z rozdziałów 4, 3, i 2 wypisać jako ich natychmiastowych konsekwencji. W pracy dowody w bardziej złożonych sytuacjach są istotnie wspierane wynikami dla prostszych przypadków.

Rozprawa liczy 82 strony i została podzielona na 5 rozdziałów. Zacytowano w niej 69 pozycji literaturowych, w tym 3 prace współautorskie Doktorantki, na podstawie

których oparta jest znaczna część wyników rozprawy. Przy okazji dodam, że dwie z nich zostały już opublikowane w bardzo dobrych czasopismach naukowych: *Journal of Multivariate Analysis* oraz *Journal of Mathematical Analysis and Its Applications*.

Rozdział 1 ma charakter wstępny. Oprócz krótkiej prezentacji własności i zastosowań rozkładu Kummera, zawiera on użyteczny przegląd nietrywialnych charakteryzacji niezależnościowych par zmiennych losowych. Są one postaci: jeśli zmienne X i Y są niezależne oraz para $(U, V) = \xi(X, Y)$ dla pewnego ustalonego dwuwymiarowego przekształcenia ξ jest również niezależna, to rozkłady X i Y (oraz U i V) należą do jednoznacznie określonych parametrycznych rodzin rozkładów. W sumie przedstawiono 8 takich przykładów od klasycznych charakteryzacji rodzin normalnych i gamma odpowiednio na pomocą transformacji $\xi(X, Y) = (X + Y, X - Y)$ oraz $\xi(X, Y) = (X+Y, X/Y)$ do najbardziej złożonych jak np. $\xi(X, Y) = \left(X + Y, \frac{X(X+Y+1)}{(X+1)(X+Y)}\right)$ charakteryzującej pary X typu Kummera i Y typu gamma. Warto zwrócić uwagę na wiodącą rolę promotora pracy, profesora Jacka Wesołowskiego we współczesnych badaniach charakteryzacji niezależnościowych. Należy też podkreślić, że w rozprawie pojawia się inna niż powyższa charakteryzacja pary gamma-Kummer i jedynie dla niej powstały uogólnienia dla rozkładów wielowymiarowych, macierzowych oraz elementów wolnej probabilistyki.

Rozdział 2 jest poświęcony zmiennym jednowymiarowym. Zawiera on dwa dowody charakteryzacji zmiennych gamma i Kummera poprzez zachowanie niezależności w przekształceniu (1). Pierwszy oparty jest na rozwiązaniu równania różniczkowego charakteryzującego gęstości gamma i Kummera. Wymaga on założenia ciągłej różniczkowalności funkcji gęstości, osłabionego następnie do warunku lokalnej całkowalności ich logarytmów. Drugi jest bardziej złożony, ale pozwala pozbyć się wszystkich założeń oprócz dodatniości zmiennych losowych. Zaczyna on się od charakteryzacji pary za pomocą równań regresyjnych

$$\mathbb{E}(V|U) = \alpha, \qquad \mathbb{E}(V^{-1}|U) = \beta, \tag{2}$$

której dowód polega na obliczeniu momentów Y i $\frac{1}{1+X}$ uzyskanych jako rozwiązania ciągów równań rekurencyjnych i zastosowaniu twierdzenia charakteryzującego rozkłady przez ciągi ich momentów. Drugim krokiem jest zastąpienie równań charakteryzacyjnych (2) przez bardziej złożone

$$\mathbb{E}(V^r|U) = \alpha_r \mathbb{E}(V^{r-1}|U), \qquad \mathbb{E}(V^{r+1}|U) = \alpha_{r+1} \mathbb{E}(V^r|U),$$

uzyskane przez odpowiednio zamianę miary: rozkłady oryginalne X i Y zostały zastąpione przez odpowiednie rozkłady obciążone długością rzędu r. Ostatecznie regresyjny dowód charakteryzacji niezależnościowej został uzyskany za pomocą zamiany miary na miarę ważoną z eksponencjalną funkcją wagową. Uzasadnieniem zamieszczenia

słabszej wersji twierdzenia charakteryzacyjnego z jego dowodem było wykorzystanie ich w dowodach ogólniejszych twierdzeń z rozdziału 4. Dla mnie jako niefachowca w dziedzinie charakteryzacji obydwie metody dowodzenia wydają się ciekawe i błyskotliwe, choć przypuszczam, że na ostatecznych kształt narzędzi dowodowych złożyły się osiągnięcia wielu pokoleń "charakteryzatorów".

W rozdziale 3 rozważane są charakteryzacje wielowymiarowych rozkładów Kummera przez niezależność współrzędnych jego wielowymiarowych odwracalnych transformacji. Definicja ich gęstości jest związana z nieskierowanymi spójnymi i acyklicznymi grafami (zwanymi drzewami) i określona jest wzorem

$$f((x_i)_{i=1}^p) = \mathrm{const}((a_i)_{i=1}^p, (c_{i,j})_{i,j=1}^p) = \prod_{i=1}^p x_i^{a_i-1} \exp\left(- \sum_{S \subseteq T} \prod_{i \in V(S)} c_i x_i \prod_{\{j,k\} \in E(S)} c_{jk} \right),$$

dla $(x_i)_{i=1}^p \in \mathbb{R}_+^p$, gdzie T jest drzewem o wierzchołkach $\{1, \ldots, p\}$ i krawędziach $E(T) \subset \{\{i,j\} : i \neq j \in \{1, \ldots, p\}\}$, S jego dowolnym poddrzewem o wierzchołkach $V(S) \subset \{1, \ldots, p\}$ i krawędziach $E(S) = \{\{i,j\} \in V(T) : i,j \in S\}$, a_i, $i = 1, \ldots, p$, są dowolnymi liczbami dodatnimi, a c_{ij}, $i,j = 1, \ldots, p$, spełniają ograniczenia $c_{ij} = c_{ji} > 0$, gdy $i = j$ lub $\{i,j\}$ jest krawędzią T oraz $c_{ij} = 0$ w przeciwnym przypadku. Skrótowa nazwa rozkładu — rozkład t-Kummera odnosi się pewnie do związku konstrukcji z drzewem i jego angielską nazwą. Przekształcenia $\Phi_r : \mathbb{R}_+^p \mapsto \mathbb{R}_+^p$ dla pewnych $1 \leq r \leq p$ generujące niezależność współrzędnych transformacji też istotnie zależą od struktury drzewa i macierzy parametrów $(c_{i,j})_{i,j=1}^p$. Nie będę powtarzał tu ich pełnej definicji z powodu jej złożoności. Wspomnę tylko, że funkcje Φ_r konstruuje się jedynie dla wierzchołków, które należą do tylko jednej krawędzi grafu (są one zwane liśćmi). Główne twierdzenie rozdziału 3, tj. twierdzenie 3.7 mówi, że kiedy dla wszystkich liści drzewa T współrzędne przekształceń $\Phi_r(\mathbf{X})$ są niezależne, to istnieją wektor $(a_i)_{i=1}^p \in \mathbb{R}_+^p$ i stała $c > 0$, że $\mathbf{X}$ ma rozkład t-Kummera z parametrami $(a_i)_{i=1}^p$ i $(c\, c_{i,j})_{i,j=1}^p$. Ponadto, wszystkie współrzędne przekształcenia z wyjątkiem ostatniej mają rozkłady Kummera, a ostatnia — rozkład gamma. Rozkłady te są jednoznacznie (choć zawile) opisane za pomocą parametrów $(a_i)_{i=1}^p$, $(c_{i,j})_{i,j=1}^p$ oraz c.

W przypadku drzewa o dwóch wierzchołkach wynik jest równoważny charakteryzacji rozkładów jednowymiarowych z rozdziału 2. Dowód dla bardziej złożonych drzew jest przeprowadzony przez indukcję ze względu na rosnącą liczbę wierzchołków. Jest on żmudny rachunkowo, podobnie jak związanych wyników pomocniczych. Prawdę mówiąc, jest poza zasięgiem mojej wyobraźni, dlaczego akurat taka specyficzna "drzewiarska" konstrukcja prowadzi do wyników charakteryzacyjnych. Pewnie światełkiem w tunelu podtrzymującym nadzieję na pozytywny wynik Autorki było istnienie podobnych rezultatów dla rozkładów gamma i uogólnionego odwrotnego gaussowskiego uzyskanych przez Massam i Wesołowskiego (2004).

Dużo bardziej intuicyjne wydają się zawarte w rozdziale 4 uogónienia na losowe macierze symetryczne dodatnio określone, dla ustalenia uwagi rzędu $r \geq 2$. Uogólnieniem rozkładu gamma na takie macierze jest rozkład Wisharta $\mathcal{W}(a, \Sigma)$ o gęstości

$$f(\mathbf{x}) = \mathrm{const}(a, \Sigma)(\det \mathbf{x})^{a-\frac{r+1}{2}} \exp(-\mathrm{tr}(\Sigma\,\mathbf{x}))$$

z parametrami $a > \frac{r-1}{2}$ i dodatnio określoną macierzą Σ. Analogicznie macierzowe uogólnienie rozkładu Kummera $\mathcal{MK}(a, b, \Sigma)$ ma gęstość

$$f(\mathbf{x}) = \mathrm{const}(a, b, \Sigma)(\det \mathbf{x})^{a-\frac{r+1}{2}} (\det(\mathbf{I} + \mathbf{x}))^{-a-b} \exp(-\mathrm{tr}(\Sigma\,\mathbf{x})),$$

gdzie ograniczenia na a i Σ są podane wyżej, $b \in \mathbb{R}$, a $\mathbf{I}$ oznacza macierz jednostkową. Uogólnieniem przekształcenia (1) jest tu transformacja

$$\begin{aligned}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \Big(&(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1/2}\,\mathbf{Y}\,(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1/2}, \\ &[\mathbf{I} + (\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1/2}\,\mathbf{Y}\,(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1/2}]^{1/2}\,\mathbf{X}\,[\mathbf{I} + (\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1/2}\,\mathbf{Y}\,(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1/2}]^{1/2}\Big). \quad (3)\end{aligned}$$

Twierdzenie 4.9 głosi, że jeśli $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ są niezależnymi losowymi macierzami dodatnio określonymi o ciągłych gęstościach, to przekształcenie (3) generuje niezależne macierze losowe $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{X}$ ma rozkład Kummera z parametrami $a > \frac{r-1}{2}$, $b > \frac{r-1}{2} - a$ i $\lambda\mathbf{I}$ dla $\lambda > 0$, a $\mathbf{Y}$ rozkład Wisharta z parametrami $a + b$ i $\lambda\mathbf{I}$ (ciekawe jest pytanie, czy jednostkową $\mathbf{I}$ można zastąpić dowolną Σ). Dowód polega na rozwiązaniu równania o argumentach macierzowych

$$\begin{aligned} &A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{y}) = C\left((\mathbf{I} + \mathbf{x})^{-1/2}\,\mathbf{y}\,(\mathbf{I} + \mathbf{x})^{-1/2}\right) \\ + \quad &D\left([\mathbf{I} + (\mathbf{I} + \mathbf{x})^{-1/2}\,\mathbf{y}\,(\mathbf{I} + \mathbf{x})^{-1/2}]^{1/2}\,\mathbf{x}\,[\mathbf{I} + (\mathbf{I} + \mathbf{x})^{-1/2}\,\mathbf{y}\,(\mathbf{I} + \mathbf{x})^{-1/2}]^{1/2}\right), \end{aligned}$$

gdzie funkcje A, B, C i D są jednoznacznie powiązane z gęstościami odpowiednio U, V, X i Y. W dowodzie istotnie korzysta się z metod stosowanych w przypadku jednowymiarowym w rozdziale 2.

W ostatnim rozdziale opisano rozszerzenie charakteryzacji na elementy W^*-przestrzeni probabilistycznych, czyli przestrzeni operatorów liniowych na przestrzeniach Hilberta. Odpowiednikiem rozkładu jest tu funkcjonał liniowy φ na elementach przestrzeni operatorów, reprezentujących wartości oczekiwane operatorów i ich złożeń. Ponieważ słabymi granicami empirycznych rozkładów wartości własnych macierzy losowych o rozkładach Wisharta $\mathcal{W}(a_n, \lambda_n\mathbf{I})$ i macierzowych Kummera $\mathcal{MK}(a_n, b_n, \gamma_n\mathbf{I})$ (przy regularnym zachowaniu parametrów w granicy) są odpowiednio wolne rozkłady Poissona $f\mathcal{P}(1/\lambda, a)$ i Kummera $f\mathcal{K}(a, b, \gamma)$ z parametrami zależnymi od asymptotycznych własności parametrów ciągów, jednoznacznie opisane przez ich $*$-rozkłady na zbiorach zwartych osi rzeczywistej, to naturalnym kandydatem na przekształcenie charakteryzacji niezależnościowej jest odpowiednik (3), gdzie $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ są operatorami

losowymi, a $\mathbf{I}$ operatorem identycznościowym. Ponieważ z kolei rozkłady reprezentowane przez wartości oczekiwane, bardziej naturalna wydaje się charakteryzacja analogiczna do regresyjnej (2). Wg twierdzenia 5.12, jeśli $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ są samosprzężonymi, dodatnimi i wolnymi (odpowiednik niezależności w klasycznej probabilistyce) elementami W^*-przestrzeni, a przekształcone przez transformatę (3) spełniają warunki

$$\varphi(\mathbf{V}|\mathbf{U}) = \alpha\mathbf{I}, \qquad \varphi(\mathbf{V}^{-1}|\mathbf{U}) = \beta\mathbf{I},$$

dla pewnych dodatnich α i β , to $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ mają odpowiednio wolne rozkłady Kummera i Poissona z parametrami zależnymi od α, β i dowolnego $a > 0$.

Charakteryzacja rozkładu $\mathbf{Y}$ polegała na wyznaczeniu jego r-transformaty, którą wylicza się z 5 równań wiążących tę transformatę z 4 innymi szeregami potęgowymi o współczynnikach zależnych od potęg $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}^{-1}$ i $(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1}$. Jeszcze bardziej skomplikowane rachunkowo było zadanie obliczenia transformaty Cauchy'ego zmiennej $\mathbf{U}$ identyfikującej jej rozkład jako wolny Kummera. Analogiczny wniosek dla zmiennej $\mathbf{X}$ uzyskuje się z wykorzystaniem własności tzw. S-transformaty dla pary wolnych nieprzemiennych zmiennych.

Prace probabilistyczne są często oceniane z perspektywy ich wartości aplikacyjnych. Trudno znaleźć takie zastosowania dla wyników charakteryzacyjnych, szczególnie gdy nie są one proste. W żadnym wypadku rezultaty rozprawy pani Piliszek nie były proste. W motcie zamieszczonym we wstępie, Autorka sugerowała, żeby niekoniecznie doszukiwać się natychmiastowych zastosowań, lecz również ocenić matematyczne piękno wyników. Mnie bardzo podobały się już metody wnioskowania przedstawione w rozdziale 2 w klasycznych problemach charakteryzacyjnych. Umiejętność rozszerzenia rezultatów na bardziej złożone i abstrakcyjne obiekty świadczy o szerokiej wiedzy i wysokiej kulturze matematycznej Doktorantki. Rozprawa zawiera pewne niedociągnięcia redakcyjne. Wskażę tylko kilka drobnych błędów, które oczywiście nie zaburzają pozytywnej merytorycznej oceny pracy.:

15_{14} i 15_6: ostatni element ciągu to n, a nie b.

19_1: $|J(u,v)|$ w module.

21^{13}: $\propto$ a nie $=$.

21_4: $+A(y)(x_0 - x_1)$.

29_4: powinno być: "Twierdzenie 2.3 jest słabsze niż Twierdzenie 2.9." Wtedy dalszy ciąg ma sens.

38_{10}: dwukrotnie użyty indeks i.

45_5: powinno być: dla każdego σ takiego, że $\Sigma - \sigma \in \Omega_+$.

45_3 i 46^3: zapisy gęstości z (dy) i (dx) i nazwami rozkładów istotnie różne od konwencji użytej w reszcie pracy.

50_3: nie ma takiego lematu.

$58^{8,9}$: zamienić $a_1, \ldots, a_n$ na $a_1, \ldots, a_k$,
$60_{12,11,6,3}$: nie napisano, co to jest $\mathfrak{F}$?
64_7: $\mathcal{MK}(a_n, b_n, \gamma_n \mathrm{e})$.
64_6: $2\frac{\gamma_n}{n} \to \gamma$.

Rozprawa doktorska pani mgr Agnieszki Piliszek zawiera ciekawe, ważne i nowe wyniki w teorii prawdopodobieństwa. Spełnia wszystkie wymagania sformułowane w ustawie o stopniach naukowych i tytule naukowym. Wnioskuję o dopuszczenie pani Piliszek do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Tomasz Rychlik

Tomasz Rychlik