Instytut Matematyki
Uniwersytet Gdański
Prof. dr hab. Zbigniew Szafraniec

Gdańsk, 30 kwietnia 2021

Recenzja rozprawy doktorskiej Michała Zwierzyńskiego

Nierówności izoperymetryczne i geometria kaustyki Wignera.

Promotor - dr hab. inż. Wojciech Domitrz, prof. PW

Rozprawa jest poświęcona badaniu geometrycznych własności zbiorów afinicznie λ-równoodległych stowarzyszonych z gładkimi krzywymi płaskimi. Składa się ze wstępu, pięciu rozdziałów, dodatku i bibliografii. Jest to poprawiona wersja rozprawy pod tym samym tytułem, która była złożona do recenzji w 2018 roku.

Podstawowym obiektem badań są tu krzywe gładkie na płaszczyźnie sparametryzowane przez C^∞-odwzorowania z odcinka lub okręgu do $\mathbb{R}^2$. Z taką krzywą można powiązać w naturalny sposób kolejne krzywe. Klasyczna geometria różniczkowa dostarcza wielu przykładów takich krzywych. Jednym z nich jest intensywnie od dawna badana kaustyka Wignera, którą można uogólnić do pojęcia krzywej będącej zbiorem punktów λ-równoodległych. Innym przykładem jest wprowadzona przez Stanisława Janeczko krzywa będąca zbiorem środów symetrii, a kolejnym krzywa złożona z punktów "zbioru mierzącego stałą szerokość".

Krzywe te są często osobliwe. Głównym celem autora była charakteryzacja osobliwości pojawiających się na tych krzywych oraz ich punktów przegięcia, jak również relacji pomiędzy tymi punktami. Kolejnym tematem było badanie nierówności izoperymetrycznych opisujących związki pomiędzy długościami i polami powierzchni stowarzyszonymi z tymi krzywymi. Ważnym celem autora było stworzenie takich metod które pozwalają badać te krzywe w przypadku gdy krzywa wyjściowa nie jest owalem.

W Rozdziale 1 autor bada geometryczne własności zbioru $E_\lambda(M)$ punktów λ-równoodległych stowarzyszonych z krzywą M oraz formułuje pewne twierdzenia pozwalające uzasadnić istnienie na $E_\lambda(M)$ punktów osobliwych, oraz pomagające charakteryzować geometryczne własności takich punktów.

W Rozdziale 2 autor wprowadził oryginalne, użyteczne pojęcie *schematu sklejania* zbioru $E_\lambda(M)$. Używając pomysłowych i kombinatorycznie nietrywialnych argumentów użył tego pojęcia do charakteryzacji własności zbioru punktów osobliwych i punktów przegięcia na gałęziach krzywej $E_\lambda(M)$. Szczególnie ciekawe wydały mi się przedstawione tu twierdzenia dotyczące tych gałęzi, które mają początek i koniec na krzywej M.

W Rozdziale 3 badane są krzywe które mogą być sparametryzowane przez swoje odwzorowanie Gaussa, na przykład owale lub tzw "jeże" (ang. "hedgehogs"). W takim przypadku odwzorowanie odwrotne pozwala zdefiniować *funkcję podpierającą Minkowskiego* $p(\theta)$, która również pozwala opisać krzywą. Rozwinięcie funkcji $p(\theta)$ w szereg Fouriera umożliwia dowodzenie ważnych nierówności izoperymetrycznych.

Autor użył tych metod żeby badać owale o stałej szerokości, krzywe złożone z punktów "zbioru mierzącego stałą szerokość" (ang. "Constant Width Measure Set") oraz krzywe Wignera.

W Rozdziale 4 autor łączy techniki wprowadzone w dwóch wcześniejszych rozdziałach żeby opisać punkty osobliwe, punkty przegięcia oraz inne geometryczne własności krzywych $E_\lambda(R_m)$ stowarzyszonych z generycznymi *rozetami*. (*Rozety* to zamknięte lokalnie wypukłe krzywe o skończonej liczbie rotacji.)

Rozdział 5 jest podsumowaniem rozprawy.

W Dodatku autor dowodzi, że zbiór C_λ składający się z krzywych spełniających pewne geometryczne warunki jest generycznym podzbiorem $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$. Ponadto pokazano tam, że zbiór afinicznie λ-równoodległy posiada dla każdej krzywej ze zbioru C_λ co najwyżej osobliwości typu ostrze.

Rozprawa została napisana w zwięzły sposób, i jest raczej skierowana do czytelnika który jest już wprowadzony w podobną tematykę. Czasami utrudniało mi to lekturę, zmuszając do samodzielnego uzupełniania niektórych fragmentów dowodów.

W obecnej wersji pracy autor uwzględnił moje zastrzeżenia do pierwotnej wersji rozprawy :

- poprawił usterki wymienione w mojej recenzji z 2018 roku
- zdefiniował punkty osobliwe krzywej jako punkty krytyczne pewnej naturalnej parametryzacji. Dzięki temu uniknął niejasności, które pojawiły się w pierwszej wersji rozprawy
- w Dodatku wyjaśnił problemy, do których miałem zastrzeżenia. Opisał wprost warunki dla krzywych niezbędne aby móc badać punkty osobliwe stowarzyszonych krzywych złożonych z punktów λ-równoodległych. Udowodnił szczegółowo, że krzywe spełniające te warunki tworzą generyczny podzbiór przestrzeni $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$, oraz że dla krzywych z tego zbioru stowarzyszone krzywe posiadają co najwyżej osobliwości typu ostrze.

W pracy znalazłem pewną liczbę łatwych do zauważenia i poprawienia usterek i literówek:

- okrąg S^1 jest dwukrotnie nazywany "sferą" (str. 13, str. 42), oznaczony symbolem S^2 (str.63), lub symbolem S_1 (str. 67)
- w Lemacie 1.1.14 założenie, że M jest krzywą zamkniętą jest chyba zbędne
- rysunek ilustrujący założnia Twierdzeni 1.2.5 nie zgadza się z założeniami tego twierdzenia. Na przykład na rysunku prosta ℓ_0 przechodzi przez q_0, a nie jak w założeniach przez q_1
- dowód Twierdzenia 1.2.10 powinien dokładniej wyjaśnić, jak teza tego twierdzenia wynika z poprzednich twierdzeń

- funkcja kąta krzywej M ma na str. 42 wartości w odcinku $[0, \pi)$, a na str. 67 w okręgu S^1
- w założeniach Lematu 2.3.9 trzeba dodać założenie, że krzywa C jest zamknięta i generyczna. (Na początku tego rozdziału jest takie założenie, ale dotyczy ono krzywej M.)
- na str. 123 (8 linia) wystarczy zakładać, że $x \in f^{-1}(W)$

Usterki te nie mają istotnego znaczenia ani dla prezentacji, ani dla poprawności wyników rozprawy.

Na dorobek autora składają się dwa samodzielne artykuły, które ukazały się w *J. Math. Anal. Appl.*, *Journal of Mathematics*, dwa wspóle artykuły z Wojciechem Domitrzem które ukazały się w *Bull. Braz. Math. Soc.*, *J. Geom. Anal.*. Kilka kolejnych jest obecnie dostępnych na `arXiv`.

Praca, jak i pozostały dorobek kandydata, świadczy o dobrej znajomości trudnych technik stosowanych w dziedzinie rozprawy. Uzyskane przez niego wyniki są oryginalnym, wartościowym wkładem w badania poświęcone geometrycznym własnościom kaustyk stowarzyszonych z krzywymi płaskimi. Autor w satysfakcjonujący sposób dokonał poprawek, o które prosiłem we wcześniejszej recenzji. Uważam, ze rozprawa doktorska pana Michała Zwierzyńskiego spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania. Wnioskuję o skierowanie jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Szafraniec

Zbigniew Szafraniec