POLITECHNIKA WARSZAWSKA

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

Rozprawa doktorska

mgr Konrad Kisiel

Zagadnienia dynamiczne w mechanice ośrodków niesprężystych

Promotor
prof. dr hab. Krzysztof Chełmiński

Promotor pomocniczy
dr Sebastian Owczarek

WARSZAWA, 2017

Streszczenie

W poniższej rozprawie doktorskiej zajmujemy się analizą matematyczną modeli opisujących dynamikę odkształceń niesprężystych w ciałach stałych i w materiałach porowatych (kruche, ziarniste, nasycone płynami). Analizę postawionych zagadnień przeprowadzamy w ogólnym przypadku mieszanych warunków brzegowych.

Zaobserwowaliśmy, że modele te mają podobną budowę i mogą być w ogólności rozpatrywane jednocześnie. W związku z tym, jednym z celów tej rozprawy jest wyprowadzenie jak najbardziej jednolitej teorii matematycznej opisującej istnienie silnych rozwiązań w przypadku modelu, który opisuje szeroką klasę zagadnień (modele koercytywne, niekoercytywne, lepko-plastyczności, poro-plastyczności, idealnej plastyczności i inne). Cel ten osiągniemy poprzez zredukowanie, stosowanej do tej pory w przypadku modeli niekoercytywnych, procedury aproksymacji dwuetapowej (aproksymacja Yosidy, a następnie aproksymacja koercytywna) do procedury jednoetapowej (jedynie aproksymacja Yosidy). Zabieg ten znacznie upraszcza metodę otrzymywania rozwiązań dla zagadnień niekoercytywnych.

Drugim, aczkolwiek znacznie ważniejszym celem tej rozprawy, jest wprowadzenie takiej metody pokazywania istnienia rozwiązań, która nie wymaga zakładania *warunku bezpiecznego obciążenia*. Jedynie w przypadku idealnej plastyczności, brak warunku bezpiecznego obciążenia musimy zrekompensować poprzez odpowiednie założenie dotyczące zbioru dopuszczalnych naprężeń. Takie podejście pozwala nam na otrzymanie odpowiednich oszacowań energetycznych nawet dla znanego w literaturze modelu Prandtla-Reussa idealnej plastyczności. Co ważne, wprowadzone przez nas założenie jest istotnie łatwiejsze do sprawdzenia niż warunki bezpiecznego obciążenia.

Wartym podkreślenia jest fakt, że nawet w przypadku idealnej plastyczności jesteśmy w stanie wykazać istnienie silnego rozwiązania. W szczególności, wyniki prezentowane w tej rozprawie są pierwszymi rezultatami dotyczącymi istnienia silnych rozwiązań dla modelu idealnej plastyczności Prandtla-Reussa. Jest to o wiele silniejszy wynik niż znany dotychczas w literaturze, gdzie autorzy byli w stanie pokazać jedynie istnienie rozwiązań miarowych.

Teoria istnienia rozwiązań dla modeli opisujących odkształcenia niesprężyste dla ciał stałych jest szeroko badana w literaturze. Zajmowali się nią między innymi: Georges Duvaut, Jacques-Louise Lions, Claes Johnson, Pierre-Marie Suquet, Roger Temam, Gabriele Anzellotti, Stephan Luckhaus, Krzysztof Chełmiński, Piotr Gwiazda, Sebastian Owczarek i wielu innych.

Przedstawiona praca składa się z ośmiu rozdziałów. W pierwszym z nich przedstawiamy krótkie wprowadzenie do rozważanych w rozprawie problemów. Pokazujemy w nim motywację naszych badań oraz nakreślamy aktualny stan wiedzy. W rozdziale drugim przytaczamy podstawowe twierdzenia, definicje i własności, które będą wykorzystywane w dalszej części rozprawy. W kolejnym, trzecim rozdziale, w ścisły sposób formułujemy problem badany w rozprawie. Następna część rozdziału skupia się na założeniach przy jakich potrafimy przeprowadzić zadowalającą nas analizę matematyczną postawionego modelu. Najważniejszym elementem tej części rozprawy jest wprowadzenie założenia o dopuszczalności danych brzegowych (Definicja 3.3), za pomocą którego zastępujemy klasyczne założenie warunków bezpiecznego obciążenia. W dalszych podrozdziałach rozdziału trzeciego definiujemy w sposób ścisły co rozumiemy przez silne rozwiązanie poszukiwanego zagadnienia (Definicja 3.7) oraz opisujemy jakie wyniki udało nam się uzyskać w rozprawie (podrozdział 3.3). W następnych rozdziałach przeprowadzamy analizę matematyczną postawionego problemu. W rozdziale czwartym rozpatrujemy pomocniczy model liniowy, dla którego pokazujemy istnienie i jednoznaczność rozwiązań. W rozdziale piątym rozważamy kolejny model pomocniczy, tym razem z globalnie lipschitzowską nieliniowością. Wykorzystując wyniki z poprzedniego rozdziału pokazujemy istnienie i jednoznaczność rozwiązań dla takiego modelu. W następnym rozdziale wprowadzamy aproksymację Yosidy badanego modelu i przeprowadzamy jej analizę przy ogólnych założeniach. Rozdział siódmy opisuje w jakich szczególnych podklasach modeli jesteśmy w stanie przejść do granicy w zaproponowanej wcześniej aproksymacji i otrzymać istnienie silnych rozwiązań. Rozprawę kończy rozdział ósmy, pokazujący zastosowanie wprowadzonej teorii do konkretnego problemu oraz podsumowujący uzyskane rezultaty.

Prezentowane w rozprawie wyniki zostały zainspirowane głownie artykułem

[11] K. Chełmiński. Coercive approximation of viscoplasticity and plasticity. *Asymptotic Anal.*, 26(2):105–133, 2001.

Przedstawione dowody i idee bazują na wynikach autora zawartych w artykułach:

[30] K. Kisiel. Dynamical poroplasticity model – Existence theory for gradient type nonlinearities with Lipschitz perturbations. *J. Math. Anal. Appl.*, 450(1):544–577, 2017,

[31] K. Kisiel, K. Kosiba. Dynamical poroplasticity model with mixed boundary conditions – Theory for $\mathcal{LM}$-type nonlinearity. *J. Math. Anal. Appl.*, 443(1):187–229, 2016.

Abstract

The main goal of the thesis is to study models of inelastic deformations in solids and in poroplastic materials (brittle, granular). The aforementioned models are considered in the general case of mixed boundary conditions.

We observed that such models have very similar structure and they can be considered simultaneously. Therefore, one of our goals is to develop a mathematical theory of the existence of strong solutions in the case of the model which describes inelastic deformations in solids and in poroplastic materials at the same time. Moreover, we would like to unify the existence theory for very wide class of models (coercive models, non-coercive models, visco-plastic models, models of perfect plasticity and others). We will achieve this goal by reducing the standard two-stage approximation procedure (Yosida approximation and then coercive approximation), which is used in the case of non-coercive models, into the one-stage procedure (Yosida approximation only). This result significantly simplifies the method of obtaining solutions for non-active issues. Such result significantly simplify the method of obtaining solutions for non-coercive problems.

The second, but also more important, goal of the thesis is to develop such method of showing the existence of solutions which does not need assuming any kind of *safe-load conditions*. Unfortunately, in the case of the perfect plasticity we have to compensate the lack of the safe-load condition by an appropriate assumption about the set of admissible stresses. Such assumption occurs to be enough in order to obtain proper energy estimates even for well-known Prandtl-Reuss model of the perfect plasticity. What is very important, the assumption we introduced is much easier to verify than the standard safe-load condition.

It is worth mentioning that (even in the case of perfect plasticity) we are able to prove the existence of strong solution. In particular, according to our knowledge, we present the first existence result of strong solutions to the Prandtl-Reuss model of the perfect plasticity. It is much stronger result than the previous ones where authors were only able to prove existence of measure solutions.

Mathematical theory of the models of inelastic deformations for solids has been considered by many authors such as: Georges Duvaut, Jacques-Louise Lions, Claes Johnson, Pierre-Marie Suquet, Roger Temam, Gabriele Anzellotti, Stephan Luckhaus, Krzysztof Chełmiński, Piotr Gwiazda, Sebastian Owczarek and many others.

The thesis is consist of eight chapters. The first one is an introduction to the problems concerned. In this chapter we present the motivation of our research and briefly outline the current state of knowledge. In the second chapter we present the notation, useful theorems and basic facts which are used in the further part of the thesis. In the next, third, chapter we strictly formulate the considered problem and then we introduce needed assumptions. Among other things we introduce admissibility of boundary conditions (Definition 3.3) which is used in order to omit weak safe-load conditions. In the next sections of the third chapter we define what we understand by the strong solution (Definition 3.7) of the model of inelastic deformations and we describe results obtained in the thesis (section 3.3). In the next chapters we present the mathematical analysis of the considered problem. In the fourth chapter we study auxiliary model of the linear elasticity for which we are able to prove the existence of a unique solution. The fourth chapter of the thesis deals with another auxiliary model where the nonlinearity is given as a globally Lipschitz function. By using earlier results we are able to show the existence of a unique solution for such model. In the next chapter we introduce the Yosida approximation of considered model and than, under general assumptions, we present its properties and proper energy estimates. In the seventh chapter we describe under what kind of specific assumptions we are able to pass to the limit in the Yosida approximation and obtain the existence of strong solutions to the initial problem. The thesis ends with the eighth chapter which shows possible applications of developed theory and then summarises obtained results and open problems.

The presented results were inspired mainly by the following article

[11] K. Chełmiński. Coercive approximation of viscoplasticity and plasticity. *Asymptotic Anal.*, 26(2):105–133, 2001.

Main ideas and proofs are based on the author's results described in two articles

[30] K. Kisiel. Dynamical poroplasticity model – Existence theory for gradient type nonlinearities with Lipschitz perturbations. *J. Math. Anal. Appl.*, 450(1):544–577, 2017

[31] K. Kisiel, K. Kosiba. Dynamical poroplasticity model with mixed boundary conditions – Theory for $\mathcal{LM}$-type nonlinearity. *J. Math. Anal. Appl.*, 443(1):187–229, 2016.