AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko: Przemysław Górka

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe:

- stopień doktora nauk matematycznych w dyscyplinie matematyka,
  Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, 2007,
  tytuł rozprawy doktorskiej: *Zastosowanie zmodyfikowanego zagadnienia Stefana do modelowania wzrostu kryształów z pary*, promotor: prof. dr hab. Piotr Rybka

- tytuł magistra fizyki,
  Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski, 2006,
  tytuł pracy magisterskiej: *Pewne aspekty matematyczne kanonicznego sformułowania teorii grawitacji Einsteina*, promotor: prof. dr hab. Jerzy Kijowski

- tytuł magistra matematyki,
  Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, 2002,
  tytuł pracy magisterskiej: *Wyznaczanie krytycznej wielkości kryształów*, promotor: prof. dr hab. Piotr Rybka

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:

- **od 2008** adiunkt
  Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
  Politechnika Warszawska

- **2008-2010** Postdoc
  Instituto de Matemática y Física
  Universidad de Talca, Talca, Chile

- **2006-2008** asystent
  Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
  Politechnika Warszawska

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. Nr 65, poz. 595 ze zm.):

Rozprawa habilitacyjna zatytułowana
Zwartość w przestrzeniach Lebesgue'a
składa się z cyklu 8 prac:

[**R1**] P. Górka, A. Macios, *Almost everything you need to know about relatively compact sets in variable Lebesgue spaces*, J. Funct. Anal. **269** (2015), 1925-1949.

[**R2**] R. Bandaliyev, P. Górka, *Relatively compact sets in variable-exponent Lebesgue spaces*, Banach J. Math. Anal. **12** (2018), 331-346.

[**R3**] P. Górka, H. Rafeiro, *From Arzelà-Ascoli to Riesz-Kolmogorov*, Nonlinear Anal. **144** (2016), 23-31.

P. Górka, H. Rafeiro, *Corrigendum to From Arzelà-Ascoli to Riesz-Kolmogorov*, Nonlinear Anal. **149** (2017), 177-179.

[**R4**] P. Górka, *Looking for compactness in Sobolev spaces on noncompact metric spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **43** (2018), 531-340.

[**R5**] M. Gaczkowski, P. Górka, D.J. Pons, *Sobolev spaces with variable exponents on complete manifolds*, J. Funct. Anal. **270** (2016), 1379-1415

M. Gaczkowski, P. Górka, D. J. Pons, *Corrigendum to Sobolev spaces with variable exponents on complete manifolds*, J. Funct. Anal. **272** (2017), 1296-1299.

[**R6**] P. Górka, *In metric-measure spaces Sobolev embedding is equivalent to a lower bound for the measure*, Potential Anal. **47** (2017), 13-19

[**R7**] Adimurthi, P. Górka, *Global Trudinger-Moser inequality on metric spaces*, Math. Inequal. Appl. **19** (2016), 1131-1139.

[**R8**] P. Górka, H. Rafeiro, *Light side of compactness in Lebesgue spaces: Sudakov Theorem*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **42** (2017), 1-5.

Omówienie rozprawy:

Zwartość w przestrzeniach Lebesgue'a

Wprowadzenie

Tematyka badawcza niniejszej rozprawy habilitacyjnej dotyczy zagadnień z pogranicza teorii przestrzeni funkcyjnych i analizy na przestrzeniach metrycznych. Jednymi z podstawowych kwestii w tej teorii są charakteryzacja zbiorów zwartych (ogólniej prezwartych) oraz zwartość zanurzeń przestrzeni funkcyjnych. Kwestie te są interesujące nie tylko z czysto poznawczego punktu widzenia, gdyż odpowiedzi na nie znajdują zastosowania w tzw. matematyce stosowanej, np. równaniach różniczkowych cząstkowych.[1] Przypomnijmy, że w przypadku przestrzeni funkcji ciągłych określonych na zwartej przestrzeni Hausdorffa zbiory zwarte scharakteryzowane są przez Twierdzenie Arzelà-Ascoli, a w przypadku przestrzeni Lebesgue'a $L^p(\mathbb{R}^n)$ zbiory zwarte charakteryzuje Twierdzenie Riesza-Kołmogorowa.

Świętym Graalem w analizie na przestrzeniach metrycznych jest różniczkowalność.[2] Namiastkę różniczkowania dają przestrzenie Sobolewa. Teoria ta rozwija się intensywnie od lat 90-tych XX wieku, a w gronie protoplastów teorii przestrzeni Sobolewa na przestrzeniach metrycznych znajdują się, między innymi: Ambrosio, Cheeger, Hajłasz, Shanmugalingam. Naturalnymi pytaniami związanymi z takimi przestrzeniami są pytania o zanurzenia w odpowiednie przestrzenie funkcyjne, jak również kwestie zwartości zanurzeń (być może w trochę gorsze przestrzenie).

[1] Wiele zagadnień z równań różniczkowych może być sprowadzona do pytania o istnienie punktu stałego odpowiedniego operatora. Z kolei, niektóre twierdzenia o punkcie stałym, np. Twierdzenie Schaudera, wymagają zwartości.

[2] Pewną strukturę różniczkową na przestrzeniach metrycznych przedstawił Cheeger w pracy [13].

Wspólnym celem prac zawartych w rozprawie habilitacyjnej jest zbadanie struktury zbiorów prezwartych w przestrzeniach funkcyjnych (głównie w przestrzeni Lebesgue'a, przestrzeni Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem i przestrzeniach funkcyjnych Banacha) określonych na przestrzeniach metrycznych z miarą borelowską oraz na zupełnych rozmaitościach riemannowskich. Prace [R1, R2, R3] dotyczą charakteryzacji zbiorów prezwartych. W [R1] oraz [R2] podajemy pełną charekteryzację zbiorów prezwartych w przestrzeniach Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem na przestrzeniach metrycznych z miarą podwajającą. Należy w tym miejscu dodać, że obecnie teoria przestrzeni funkcyjnych ze zmiennym wykładnikiem rozwija się bardzo intensywnie, z powodu licznych zastosowań, np. w modelach płynów elektrologicznych [59], płynów termoreologicznych [7], w badaniu przetwarzania obrazów [1, 52] oraz w równaniach z niestandardowym wzrostem.[3] Ponadto, praca [R1] zawiera szczegółową dyskusję dotyczącą zbiorów prezwartych w przestrzeniach Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem na przestrzeniach euklidesowych. Wyniki z prac [R1] i [R2] przedstawiamy w podrozdziale A1.

Praca [R3] dotyczy charakteryzacji zbiorów prezwartych w przestrzeniach funkcyjnych Banacha określonych na przestrzeniach metrycznych z miarą ciągłą względem metryki. Wyniki z tej pracy mogą być stosowane do bardziej egzotycznych przestrzeni, takich jak np. duże przestrzenie Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem. Omówienie pracy [R3] zawiera podrozdział A2.

Wyniki z prac [R4, R5], omówione w rozdziale B, dotyczą zwartości zanurzeń przestrzeni Sobolewa określonych na przestrzeniach niezwartych.[4] W przypadku klasycznych przestrzeni Sobolewa określonych na $\mathbb{R}^n$ zanurzenia w przestrzenie L^q nie są zwarte. Berestycki i Lions [10] zauważyli, że przestrzenie $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, składające się z radialnie symetrycznych funkcji z przestrzeni Sobolewa, zanurzają się w sposób zwarty w $L^q(\mathbb{R}^n)$, gdzie $p < q < p^* = \frac{np}{n-p}$. W pracy [R4] wykazaliśmy zwartość zanurzeń H-niezmienniczych przestrzeni Hajłasza-Sobolewa na przestrzeniach metrycznych z regularną miarą Ahlforsa. Mianowicie, niech (X, ρ, μ) będzie przestrzenią metryczną z s-regularną miarą Ahlforsa taką, że przestrzeń Hajłasza-Sobolewa $M^{1,p}(X)$ jest refleksywna. Niech ponadto, H będzie podgrupą grupy izometrii zachowujących miarę μ. Wówczas, jeśli orbity działania grupy H spełniają odpowiednie założenia, to przestrzeń $M_H^{1,p}(X)$ zanurza się w sposób zwarty w $L^q(X)$, gdzie $p < q < p^* = \frac{sp}{s-p}$ oraz $M_H^{1,p}(X)$ jest H-niezmienniczą przestrzenią Hajłasza-Sobolewa. W pracy [R5] badamy zwartość zanurzeń przestrzeni Sobolewa ze zmiennym wykładnikiem określonych na zupełnych rozmaitościach riemannowskich. Wykazujemy, że jeśli rozmaitość riemannowska (M, g) ma 'ograniczoną' geometrię, H jest podgrupą grupy izometrii rozmaitości M, której orbity odpowiednio szybko 'rosną' i q jest jednostajnie ciągłym H-niezmienniczym wykładnikiem, to przestrzeń $L_{1,H}^{q(\cdot)}(M)$ zanurza się w sposób zwarty w $L^{p(\cdot)}(M)$, gdzie $q \ll p \ll q^*$.

Prace [R6, R7] dotyczą charakteryzacji przestrzeni metrycznych z miarami spełniającymi założenia głównego twierdzenia z pracy [R1] (patrz warunek (2) z Twierdzenia 1 w autoreferacie). W artykule [R6] wykazujemy, że jeśli przestrzeń Hajłasza-Sobolewa $M^{1,p}$ określona na przestrzeni metrycznej z miarą podwajającą zanurza się w L^q, gdzie $q > p$, to miara jest lokalnie dolnie regularna w sensie Ahlforsa. Hajłasz [33] udowodnił, że na przestrzeni metrycznej z miarą dolnie regularną Ahlforsa, przestrzeń $M^{1,p}$ zanurza się w L^q, gdzie $q > p$. Tym samym, otrzymujemy w klasie miar podwajających częściową charakteryzację przestrzeni dopuszczających zanurzenia przestrzeni Sobolewa w przestrzenie Lebesgue'a. W pracy [R7] dowodzimy, że na spójnych przestrzeniach metrycznych z miarą podwajającą nierówność Trudingera-Mosera jest spełniona jedynie wtedy, gdy miara ta

[3] Przestrzenie ze zmiennym wykładnikiem, określone na przestrzeniach metrycznych z miarą, były badane, między innymi, przez grupę matematyków japońskich [21, 54] oraz fińskich [37, 38, 39].

[4] W pracy [R5] zajmujemy się również innymi zagadnieniami, takimi jak np. zanurzenia w przestrzenie Höldera ze zmiennym wykładnikiem, zanurzenia w przypadku logarytmicznej hölderowskiej ciągłości wykładnika. Ze względu na to, że zagadnienia te nie są związane bezpośrednio z rozprawą, nie będziemy ich omawiać.

spełnia warunek (2) z Twierdzenia 1.[5] Na wyniki z prac [R6, R7] możemy patrzeć na dwa sposoby: po pierwsze na ile założenia o dziedzinie w twierdzeniach o włożeniu są optymalne, po drugie jaką informację o geometrii przestrzeni zawierają nierówności typu Sobolewa. Omówienie artykułów [R6] i [R7] zawiera rodział C.

Wreszcie, w pracy [R8], omówionej w rozdziale D, badamy relacje między warunkami gwarantującymi prezwartość w przestrzeniach Lebesgue'a. Udowadniamy w niej wariant twierdzenia Sudakova na przestrzeniach metrycznych z miarą.

Każdy z rozdziałów zawiera, oprócz opisu wyników, podstawowe informacje o obiektach, z którymi pracujemy. Ponadto, aby ułatwić Czytelnikowi lekturę, zamieściliśmy podrozdział zawierający podstawowe pojęcia związane z miarami na przestrzeniach metrycznych.

Przestrzenie metryczne z miarą

Niech (X, ρ, μ) oznacza przestrzeń metryczną z miarą wyposażoną w metrykę ρ i borelowsko regularną miarę μ. Będziemy zakładać, że miara niepustych zbiorów otwartych jest dodatnia oraz, że miara zbiorów ograniczonych jest skończona. Mówimy, że miara μ jest podwajająca (spełnia warunek podwajania), jeśli istnieje stała $C_\mu > 0$ taka, że dla dowolnej kuli otwartej $B(x, r)$ spełniona jest nierówność

$$\mu\left(B(x, 2r)\right) \leq C_\mu \mu\left(B(x, r)\right).$$

Warunek podwajania implikuje istnienie stałej D takiej, że następująca nierówność

$$\frac{\mu\left(B(x_2, r_2)\right)}{\mu\left(B(x_1, r_1)\right)} \leq D\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^s, \quad \text{gdzie} \quad s = \log_2 C_\mu,$$

jest spełniona dla wszystkich kul $B(x_2, r_2)$ oraz $B(x_1, r_1)$, jeśli tylko $r_2 \geq r_1 > 0$ i $x_1 \in B(x_2, r_2)$ [35]. Z powyższej nierówności otrzymujemy, że jeśli przestrzeń X jest ograniczona, to istnieje $b > 0$ takie, że dla $r < \mathrm{diam} X$ prawdziwe jest oszacowanie

$$\mu(B(x, r)) \geq b r^s. \tag{1}$$

Z drugiej strony, jeśli przestrzeń metryczna wyposażona w miarę podwajającą nie jest ograniczona, to nierówność (1) nie musi zachodzić [11].

Niech α będzie dodatnią liczbą rzeczywistą. Powiemy, że miara μ jest dolnie α-regularną w sensie Ahlforsa, jeśli istnieje stała c taka, że

$$c r^\alpha \leq \mu(B(x, r)),$$

dla $x \in X$ oraz $r < \mathrm{diam} X$. Analogicznie definiujemy miarę górnie α-regularną w sensie Ahlforsa, jako miarę, dla której istnieje stała C taka, że

$$\mu(B(x, r)) \leq C r^\alpha,$$

dla $x \in X$ oraz $r < \mathrm{diam} X$. Ponadto, miarę μ która jest dolnie i górnie α-regularną będziemy nazywać miarą α-regularną w sensie Ahlforsa. Oczywiście, jak łatwo zauważyć, każda miara Ahlforsa jest miarą podwajającą.

[5] Badania dotyczące związku między zanurzeniami przestrzeni Sobolewa a regularnością miar są kontynuowane w pracy [5]. W szczególności, w pracy tej pokazujemy, że nierówność Morreya (zanurzenie w przestrzeń funkcji hölderowsko ciągłych) implikuje dolną regularność miary w sensie Ahlforsa.

Przypomnijmy jeszcze definicję miary ciągłej względem metryki [26, 22]. Niech (X, ρ, μ) oznacza przestrzeń metryczną z miarą. Powiemy, że μ jest ciągła względem metryki ρ, jeśli dla wszystkich $x \in X$ i $r > 0$ spełniony jest warunek

$$\lim_{y \to x} \mu(B(x,r) \Delta B(y,r)) = 0,$$

gdzie przez $A \Delta B$ oznaczyliśmy różnicę symetryczną zbiorów, tj. $A \Delta B := A \backslash B \cup B \backslash A$. Przestrzenie metryczne z miarami ciągłymi mają bardzo dobre własności. Na przykład, jeśli μ jest ciągła względem metryki, to dla dowolnego $r > 0$, przyporządkowanie $x \mapsto \mu(B(x,r))$ jest odwzorowaniem ciągłym. Z drugiej strony, jeśli dla miary μ spełniony jest warunek, że dla wszystkich $x \in X$ odwzorowanie $r \mapsto \mu(B(x,r))$ jest ciągłe, to miara μ jest ciągła względem metryki. Co więcej, okazuje się, że jeżeli (X, ρ, μ) jest przestrzenią geodezyjną [40] z miarą podwajającą μ, to miara μ jest ciągła względem metryki ρ [2, 22].

Na zakończenie naszego wstępu wprowadźmy jeszcze jedno oznaczenie. Niech mianowiciee, f będzie funkcją lokalnie całkowalną na zbiorze mierzalnym A, którego miara jest dodatnia. Wtedy przez $(f)_A$ oznaczać będziemy wartość średnią funkcji f na zbiorze A, tzn.

$$(f)_A := \fint_A f d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu.$$

A. Charakteryzacja zbiorów zwartych w przestrzeniach Lebesgue'a

Klasyczne twierdzenia Riesza-Kołmogorowa [20, 50, 57, 63, 64, 65] charakteryzuje zbiory prezwarte w przestrzeniach Lebesgue'a. Orzeka ono, iż podzbiór $\mathcal{F}$ przestrzeni $L^p(\mathbb{R}^n)$, gdzie $1 \leq p < \infty$, jest całkowicie ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy:

(A) $\mathcal{F}$ jest ograniczony;

(B) $\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{\delta>0} \quad \forall_{|h|<\delta} \quad \forall_{f \in \mathcal{F}} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx < \varepsilon;$

(C) $\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{R>0} \quad \forall_{f \in \mathcal{F}} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,R)} |f(x)|^p dx < \varepsilon.$

Powyższe twierdzenie pozostanie prawdziwym, jeśli w warunku (B) operator przesunięcia o wektor h zastąpimy uśrednieniem po kuli o promieniu $|h|$, tzn. gdy zamiast (B) wpiszemy

(B') $\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{\delta>0} \quad \forall_{|h|<\delta} \quad \forall_{f \in \mathcal{F}} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(f)_{B(x,|h|)} - f(x)|^p dx < \varepsilon.$

Twierdzenie Riesza-Kołmogorowa doczekało się wielu uogólnień. Wymieńmy kilka z nich. Prace [30, 46, 51] zawierają charakteryzację zbiorów prezwartych w $L^p(X, \rho, \mu)$, gdzie (X, ρ, μ) jest przestrzenią metryczną z miarą. Z kolei, Weil [66] udowodnił twierdzenie o zwartości w $L^p(G)$, gdzie G jest lokalnie zwartą grupą topologiczną, Pego [55] (zob. również [27] i [28]) podał twierdzenie Kołmogorowa w L^2 przy użyciu transformaty Fouriera, natomiast Rafeiro [56] podał twierdzenie charakteryzujące zbiory prezwarte w $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, gdzie Ω jest ograniczonym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

A1. Prezwartość w przestrzeniach Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem

Zanim przedstawimy główne wyniki, przypomnimy pojęcia związne z przestrzeniami Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem (w celu głębszego wywodu odsyłamy do monografi Cruza-Uribe i Fiorenza [15] oraz książki Dieninga, Harjulehto, Hästö i Růžiĉki [16]).

Niech (Ω, μ) będzie przestrzenią mierzalną z miarą σ-skończoną. Każdą funkcję mierzalną $p : \Omega \to (0, \infty]$ będziemy nazywać zmiennym wykładnikiem. Zbiór zmiennych wykładników określonych na Ω będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{P}(\Omega)$. Ponadto, zdefiniujmy:

$$p_+ = \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x), \quad p_- = \operatorname{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x).$$

Będziemy zakładać, że $0 < p_- \leq p_+ < \infty$.

Przestrzeń Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ definiujemy jako zbiór tych μ-mierzalnych funkcji $f : \Omega \to \mathbb{R}$, dla których wyrażenie postaci

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}\, d\mu(x)$$

jest skończone. Przestrzeń ta jest przestrzenią kwazi-Banacha z kwazi-normą Luxemburga

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \ \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\right\},$$

gdzie $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Jeśli $p_- \geq 1$, to przestrzeń Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem staje się przestrzenią Banacha. Przestrzenie Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem są szczególnym przypadkiem przestrzeni Musielaka-Orlicza. Jeśli p jest stałe, to $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ jest klasyczną przestrzenią Lebesgue'a.

Wprowadźmy jeszcze klasę dostatecznie regularnych wykładników. Niech (X, ρ) oznacza przestrzeń metryczną oraz $\Omega \subset X$. Powiemy, że funkcja $p : \Omega \to \mathbb{R}$ jest lokalnie logarytmicznie hölderowsko ciągła na Ω, jeśli

$$\exists_{C_1>0} \ \forall_{x,y\in\Omega} \ \ |p(x) - p(y)| \leq \frac{C_1}{\log\left(e + \frac{1}{\rho(x,y)}\right)}.$$

Ponadto, powiemy, że p spełnia logarytmicznie hölderowski zanik w nieskończoności z ustalonym punktem $x_0 \in X$, gdy

$$\exists_{p_\infty\in R} \ \exists_{C_2>0} \ \forall_{x\in\Omega} \ \ |p(x) - p_\infty| \leq \frac{C_2}{\log\left(e + \rho\left(x, x_0\right)\right)}.$$

Wykładnik p będziemy nazywać globalnie logarytmicznie hölderowsko ciągłym w Ω, jeśli jest lokalnie logarytmicznie hölderowsko ciągły w Ω oraz spełnia logartymicznie hölderowski zanik w nieskończoności.

Zbiór logartymicznie hölderowsko ciągłych wykładników definiujemy jako

$$\mathcal{P}_{\log}(\Omega) = \left\{p \in \mathcal{P}(\Omega) : \ \frac{1}{p} \ \text{ jest globalnie logartymicznie hölderowsko ciągłe}\right\}.$$

Przejdziemy teraz do prezentacji głównych wyników. W pracy [R1] udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Niech (X, ϱ, μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą podwajającą, $p \in \mathcal{P}_{log}(X, \mu)$, $1 < p_- \leq p_+ < \infty$. Załóżmy, że*

$$\forall_{r>0} \quad h(r) := \inf\{\mu(B(x,r)) : \ x \in X\} > 0. \tag{2}$$

Wówczas rodzina $\mathcal{F} \subset L^{p(\cdot)}(X, \mu)$ jest prezwarta wtedy i tylko wtedy, gdy:

(i) *$\mathcal{F}$ jest ograniczona w $L^{p(\cdot)}(X, \mu)$;*

(ii) $\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{r>0} \quad \forall_{f\in\mathcal{F}} \quad \int\limits_X |f(x) - (f)_{B(x,r)}|^{p(x)} d\mu(x) < \varepsilon$;

(iii) $\exists_{x_0\in X} \quad \forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{R>0} \quad \forall_{f\in\mathcal{F}} \int\limits_{X\setminus B(x_0,R)} |f(x)|^{p(x)} d\mu(x) < \varepsilon$.

Dowód konieczności warunków $(i) - (iii)$ wykorzystuje Twierdzenie Lebesgue'a o różniczkowaniu całki oraz Twierdzenie Hardy'ego-Littlewooda o funkcjach maksymalnych w przestrzeniach Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem [3]. Dowód prezwartości $\mathcal{F}$ bazuje na metodzie z pracy Kałamajskiej [46] (zob. również [30]). Ustalamy dowolny ciąg $\{f_n\}$ z tej rodziny. Refleksywność przestrzeni gwarantuje nam istnienie podciągu $\{f_{n_k}\}$, który jest tylko słabo zbieżny. W celu wykazania mocnej zbieżności $\{f_{n_k}\}$, udowadniamy twierdzenie charakteryzujące zbieżność w przestrzeniach $L^{p(\cdot)}(X)$, które z grubsza mówi, że ciąg jest mocno zbieżny w $L^{p(\cdot)}(X)$ do ustalonego elementu jedynie wtedy, gdy jest on zbieżny według miary, jest jednakowo $p(\cdot)$-całkowalny oraz ma jednakowy zanik w 'nieskończoności'.

Twierdzenie 1 możemy zastosować bezpośrednio do charakteryzacji zbiorów prezwartych w $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, formułując poniższy rezultat:

Twierdzenie 2. *Niech $p \in \mathcal{P}_{\log}(\mathbb{R}^n)$ oraz $1 < p_- \leq p_+ < \infty$. Wówczas rodzina $\mathcal{F} \subset L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ jest prezwarta wtedy i tylko wtedy, gdy:*

(i) *$\mathcal{F}$ jest ograniczona;*

(ii) $\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{\delta>0} \quad \forall_{|h|<\delta} \quad \forall_{f\in\mathcal{F}} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(f)_{B(x,h)} - f(x)|^{p(x)} dx < \varepsilon$;

(iii) $\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{R>0} \quad \forall_{f\in\mathcal{F}} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,R)} |f(x)|^{p(x)} dx < \varepsilon$.

W przypadku klasycznych przestrzeni Lebesgue'a (przestrzeni ze stałym wykładnikiem), Twierdzenie 2 pozostaje w mocy, jeśli w warunku (ii) Twierdzenia 2 operator uśrednienia po kuli zastąpimy operatorem translacji. Zatem, naturalnym jest pytanie o analogiczny wynik w przestrzeniach ze zmiennym wykładnikiem. W pracy [R1] udowodniliśmy następujące twierdzenie gwarantujące prezwartość w $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Twierdzenie 3. *Niech $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p_+ < \infty$. Jeśli $\mathcal{F} \subset L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ spełnia następujące warunki*

(i) *$\mathcal{F}$ jest ograniczona;*

(ii) $\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{\delta>0} \quad \forall_{|h|<\delta} \quad \forall_{f\in\mathcal{F}} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^{p(x)} dx < \varepsilon$;

(iii) $\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{R>0} \quad \forall_{f\in\mathcal{F}} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,R)} |f(x)|^{p(x)} dx < \varepsilon$,

to $\mathcal{F}$ jest prezwarta w $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Idea dowodu Twierdzenia 3 opiera się na metodach z pracy [42] i polega na konstrukcji 'dobrego' odwzorowania z rodziny $\mathcal{F}$ w przestrzeń skończenie wymiarową. Zauważmy, że w powyższym twierdzeniu nie zakładamy regularności na wykładnik p. Ponadto, łatwo się przekonać, że implikacja odwrotna w Twierdzeniu 3 nie jest na ogół prawdziwa.

Poza użyciem Twierdzenia 1 do pokazania Twierdzenia 2, Twierdzenie 1 można również zastosować, między innymi, do wykazania zwartości zanurzenia przestrzeni Hajłasza-Sobolewa ze zmiennym wykładnikiem w przestrzenie Lebesgue'a [R1] (bardziej optymalne wyniki można znaleźć w pracy [24]).

Przejdźmy do dyskusji Twierdzenia 1. Twierdzenie to przedstawia charakteryzację zbiorów prezwartych w przestrzeniach Lebesgue'a $L^{p(\cdot)}(X,\mu)$, przy założeniu logarytmicznej hölderowskiej ciągłości wykładnika p, który jest ostro większy niż 1. W metodzie dowodowej Twierdzenia 1 istotny jest warunek (2) na geometrię przestrzeni. Warunek (2) przedyskutujemy w rozdziale C.

Okazuje się, że nie zakładając warunku (2) na miarę przestrzeni możemy scharakteryzować zbiory prezwarte w $L^{p(\cdot)}(X,\mu)$ nawet w przypadku przestrzeni kwazi-Banacha, tj. gdy wykładnik p przyjmuje wartości mniejsze niż 1. W pracy [R2] udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4. *Niech (X,ϱ,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą podwajającą, $p \in \mathcal{P}_{\log}(X,\mu)$ oraz $0 < p_- \leq p_+ < \infty$. Wówczas rodzina $\mathcal{F} \subset L^{p(\cdot)}(X,\mu)$ jest całkowicie ograniczona w $L^{p(\cdot)}(X,\mu)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:*

(a) *$\mathcal{F}$ jest ograniczona w $L^{p(\cdot)}(X,\mu)$;*

(b) $\exists_{0<q<p_-}$
$$\lim_{r\to 0}\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_X\left(\fint_{B(x,r)}|f(x)-f(y)|^q d\mu(y)\right)^{p(x)/q} d\mu(x)=0;$$

(c) *dla pewnego $x_0 \in X$*
$$\lim_{R\to\infty}\sup_{f\in\mathcal{F}}\int\limits_{X\setminus B(x_0,R)}|f(x)|^{p(x)}d\mu(x)=0.$$

Technika dowodu powyższego twierdzenia korzysta z metod w pracy [51]. Wykazujemy najpierw twierdzenie charakteryzujące prezwartość, które orzeka, że całkowita ograniczoność rodziny funkcji $\mathcal{F}$ z przestrzeni $L^{p(\cdot)}(X,\mu)$ jest - dla przestrzeni X o skończonej mierze - równoważna z jednakową całkowalnością oraz całkowitą ograniczonością $\mathcal{F}$ w przestrzeni funkcji mierzalnych L^0 wyposażonych w topologię zbieżności według miary. Następnie - podpierając się twierdzeniami gwarantującymi prezwartość w L^0 - sprawdzamy, że rodzina $\mathcal{F}$ obcięta do kuli o dostatecznie dużym promieniu jest całkowicie ograniczona w L^0. Z kolei, dowód konieczności warunków $(a)-(c)$ bazuje na twierdzeniu o funkcjach maksymalnych.

Z dowodu Twierdzenia 4 otrzymujemy, że bez założenia logarytmicznej hölderowskiej ciągłości, warunki $(a)-(c)$ Twierdzenia 4 implikują prezwartość. Mianowicie, w pracy [R2] udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5. *Niech (X,ϱ,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą podwajającą oraz $0 < p_- \leq p_+ < \infty$. Jeśli rodzina $\mathcal{F} \subset L^{p(\cdot)}(X,\mu)$ spełnia następujące warunki:*

(a) *$\mathcal{F}$ jest ograniczona w $L^{p(\cdot)}(X,\mu)$;*

(b) $\exists_{0<q<p_-}$

$$\lim_{r\to 0}\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_X\left(\fint_{B(x,r)}|f(x)-f(y)|^q d\mu(y)\right)^{p(x)/q}d\mu(x)=0;$$

(c) *dla pewnego* $x_0\in X$

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{f\in\mathcal{F}}\int\limits_{X\setminus B(x_0,R)}|f(x)|^{p(x)}d\mu(x)=0,$$

to $\mathcal{F}$ *jest całkowicie ograniczona w* $L^{p(\cdot)}(X,\mu)$.

A2. Prezwartość w Przestrzeniach Funkcyjnych Banacha

W celu omówienia wyników z pracy [R3], przypomnijmy szerokiej klasy przestrzenie Banacha, jakimi są przestrzenie funkcyjne Banacha. Niech (Ω,μ) będzie przestrzenią σ-skończoną. Przestrzeń unormowaną $(E=E(\Omega,\mu),\|\cdot\|_E)$ taką, że $E\subset L^0(\Omega,\mu)$, nazywamy przestrzenią funkcyjną Banacha ([9, 18]), gdy spełnione są następujące warunki:

$(A1)$ jeśli $f\in E$, to $\||f|\|_E=\|f\|_E$;

$(A2)$ jeśli $0\le g\le f$, to $\|g\|_E\le\|f\|_E$;

$(A3)$ jeśli $0\le f_n\uparrow f$, to $\|f_n\|_E\uparrow\|f\|_E$;

$(A4)$ jeśli $\mu(A)<\infty$, to $\chi_A\in E$;

$(A5)$ jeśli $\mu(A)<\infty$, to istnieje stała $C(A)$ taka, że $\int_A|f|d\mu\le C(A)\|f\|_E$.

Do klasy przestrzeni funkcyjnych Banacha należą, między innymi, klasyczne przestrzenie Lebesgue'a L^p, przestrzenie Orlicza L_Φ, przestrzenie Lorentza $L_{p,q}$, duże przestrzenie Lebesgue'a $L^{p)}$ [32, 45], jak również przestrzenie Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem $L^{p(\cdot)}$ [16].

W pracy [R3] badaliśmy zbiory prezwarte w przestrzeniach funkcyjnych Banacha na przestrzeniach metrycznych z miarą $E(X,\rho,\mu)$. Zakładamy tutaj, że miara μ jest ciągła względem metryki ρ. W przypadku przestrzeni euklidesowej, Caetano, Gogatishvili i Opic [12] scharakteryzowali zwartość w przestrzenaich $E(\mathbb{R}^n)$. Ponadto, praca [31] zawiera twierdzenia charakteryzujące zbiory całkowicie ograniczone w $E(G,\mu)$, gdzie G jest lokalnie zwartą grupą topologiczną wyposażoną w lewoniezmienniczą miarę Haara μ.

W [R3] wykazaliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6. *Niech* (X,ρ,μ) *będzie właściwą przestrzenią metryczną*[6] *z miarą ciągłą względem metryki oraz niech* $E=E(X,\mu)$ *będzie przestrzenią funkcyjną Banacha. Jeśli rodzina* $\mathcal{F}\subset E$ *spełnia następujące warunki:*

(a) $\mathcal{F}$ *jest ograniczona w* E*;*

(b)

$$\lim_{r\to 0}\sup_{f\in\mathcal{F}}\left\|\fint_{B(\cdot,r)}f\,d\mu-f\right\|_E=0;$$

[6]Przestrzeń metryczną nazywamy właściwą, jeżeli zbiory ograniczone są prezwarte.

(c) *dla pewnego* $x_0 \in X$

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\chi_{X\setminus B(x_0,R)}\|_E = 0,$$

to rodzina $\mathcal{F}$ *jest całkowicie ograniczona w* E.

W dowodzie Twierdzenia 6 rozważamy, dla odpowiednio małego h, uśrednioną rodzinę:

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \left\{ \fint_{B(\cdot,h)} f : f \in \mathcal{F} \right\},$$

na kuli $\bar{B}(x_0, R)$ o dużym promieniu R. Pokazujemy, że rodzina $\widetilde{\mathcal{F}}$ jest jednakowo ciągła oraz wspólnie ograniczona. Założenie właściwości przestrzeni pozwala nam zastosować twierdzenie Arzelà-Ascoli na zwartym zbiorze $\bar{B}(x_0, R)$.

Zakładając dodatkowe warunki na przestrzeń funkcyjną E, wykazaliśmy w [R3] twierdzenie orzekające, iż całkowita ograniczoność implikuje warunki (a), (b), (c) z Twierdzenia 6. Sformułowaliśmy, mianowicie, następujące twierdzenie:

Twierdzenie 7. *Niech* (X, ρ, μ) *będzie przestrzenią metryczną z miarą oraz niech* $E = E(X, \mu)$ *oznacza przestrzeń funkcyjną Banacha z absolutnie ciągłą normą. Ponadto, niech operator maksymalny* $\mathcal{M} : E \to E$ *będzie ograniczony i*

$$\lim_{r\to 0} \left\| \fint_{B(\cdot,r)} f d\mu - f \right\|_E = 0$$

dla $f \in E$.

Wówczas, jeśli rodzina $\mathcal{F} \subset E$ *jest całkowicie ograniczona, to*

(a) $\mathcal{F}$ *jest ograniczona w* E*;*

(b)

$$\lim_{r\to 0} \sup_{f\in\mathcal{F}} \left\| \fint_{B(\cdot,r)} f d\mu - f \right\|_E = 0;$$

(c) *dla pewnego* $x_0 \in X$

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\chi_{X\setminus B(x_0,R)}\|_E = 0.$$

Dowód powyższego twierdzenia nie jest zaskakujący i nie wymaga szerszej dyskusji. Twierdzenia 6 oraz 7 mogą być stosowane dla szerokiej klasy przestrzeni funkcyjnych Banacha. W szczególności, dostajemy charakteryzację zbiorów prezwartych w podprzestrzeniach dużych przestrzeni Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem $L^{p(\cdot),\theta}$, które są przykładem nieośrodkowej, nierefleksyjnej i niesymetrycznej (*non-rearragement invariant*) przestrzeni funkcyjnej Banacha [49].

B. Zwarte zanurzenia przestrzeni Sobolewa na przestrzeniach niezwartych

Przypomnijmy, że jeśli Ω jest podzbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$ z brzegiem dostatecznie regularnym oraz $p < n$, to zachodzi twierdzenie Sobolewa o włożeniu, tj. $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, gdzie $p^* := \frac{np}{n-p}$ jest

wykładnikiem Sobolewa [4]. Ponadto, jeśli Ω jest ograniczony, to - na mocy twierdzenia Rellicha-Kondraszowa - mamy zwarte zanurzenie $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, gdzie $p \leq q < p^*$. Łatwo sprawdzić, że ograniczenie zbioru Ω jest istotne[7].

Okazuje się, że gdy ograniczymy się do klasy funkcji radialnie symetrycznych, to zachodzi tzw. twierdzenie Berestyckiego-Lionsa o zwartości stanowiące o tym, że jeśli przez $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ oznaczymy przestrzeń funkcji radialnie symetrycznych (niezmienniczych ze względu na działanie grupy ortogonalnej), to $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, gdzie $p < q < p^*$ [10, 53, 14, 62].

Twierdzenie Berestyckiego-Lionsa zostało przeniesione w pracy Hebeya i Vaugona [44] na przestrzenie Sobolewa określone na zupełnych rozmaitościach riemannowskich (zob. również pracę Skrzypczaka i Tintareva [61]). Pokazano w niej, że gdy G jest zwartą podgrupą grupy izometrii zupełnej rozmaitości riemannowskiej (M, g) i jeśli spełnione są odpowiednie założenia na geometrię rozmaitości i na orbity działania grupy G, wówczas zachodzi zwarte zanurzenie $W_G^{1,p}(M, g) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(M, g)$. Ponadto, Balogh i Kristály udowodnili twierdzenie o zwartości w przypadku grupy Heisenberga [8]. Z kolei, twierdzenie Berestyckiego-Lionsa znalazło swój odpowiednik w przestrzeniach Sobolewa ze zmiennym wykładnikiem $W^{1,p(\cdot)}$ (zob. pracę Fana, Zhao i Zhao [19]).[8]

W pracach [R4] oraz [R5] udowodniliśmy twierdzenia o zwartym zanurzeniu w przypadku przestrzeni Sobolewa na przestrzeni metrycznej z miarą, jak również w przypadku przestrzeni Sobolewa ze zmiennym wykładnikiem na zupełnych rozmaitościach riemannowskich.

Przypomnijmy teraz definicję przestrzeni Sobolewa na przestrzeni metrycznej z miarą (X, ρ, μ) [33]. Powiemy, że funkcja f całkowalna z p-tą potęgą należy do przestrzeni Hajłasza-Sobolewa $M^{1,p}(X)$, jeśli istnieje $g \in L^p(X)$, zwana uogólnionym gradientem, taka że

$$|f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y) \big(g(x) + g(y)\big) \quad \text{p.w.} \quad x, y \in X.$$

Przestrzeń $M^{1,p}(X)$ wyposażona w normę

$$\|f\|_{M^{1,p}(X)} = \|f\|_{L^p(X)} + \inf \|g\|_{L^p(X)},$$

gdzie infimum jest wzięte po wszystkich uogólnionych gradientach funkcji f, jest przestrzenią Banacha. W przypadku przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ z metryką euklidesową i miarą Lebesgue'a dla $p > 1$, przestrzeń $M^{1,p}$ pokrywa się z klasyczą przestrzenią Sobolewa $W^{1,p}$. Więcej informacji dotyczących przestrzeni $M^{1,p}$ można znaleźć w [6, 33, 34, 35, 41, 40, 48].

Aby zaprezentować główny wynik pracy [R4], musimy wprowadzić pojęcie grupy izometrii zachowujących miarę. Niech $\mathrm{Iso}(X)$ oznacza grupę izometrii przestrzeni metrycznej (X, ρ). Wówczas grupę izometrii zachowujących miarę μ definiujemy jako

$$\mathrm{Iso}_\mu(X) = \left\{\phi \in \mathrm{Iso}(X) \mid \phi_\# \mu = \mu\right\}.$$

Zauważmy, że w przypadku rozmaitości riemannowskich, mamy $\mathrm{Iso}_{V_g}(M, g) = \mathrm{Iso}(M, g)$, gdzie V_g jest miarą riemannowską na (M, g).

Niech H będzie ustaloną podgrupą grupy $\mathrm{Iso}_\mu(X)$. Dla x z X oraz $R > 0$, zdefiniujmy następującą wielkość

$$M_H(x, R) = \sup \left\{\mathrm{Card}\{x_i\}_{i \in I} \ : \ x_i \in H(x),\ B(x_i, R) \cap B(x_j, R) = \emptyset \,\text{dla}\, i \neq j\right\},$$

[7]Interesujące jest również pytanie dotyczące zwartości zanurzeń $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, gdy Ω jest zbiorem ograniczonym. O wpływie grupy symetrii na uzwarcenie włożeń Sobolewa na zwartych przestrzeniach metrycznych można przeczytać w pracy [25].

[8]Oprócz przestrzeni Sobolewa w literaturze rozważane były także inne przestrzenie, w których radialna symetria powodowała uzwarcenie. Np., praca [60] zawiera dyskusję podprzestrzeni radialnie symetrycznych dystrybucji w przestrzeniach Biesowa i Triebela-Lizorkina.

gdzie $H(x)$ oznacza orbitę elementu x. Dla ustalonej podgrupy H grupy $\mathrm{Iso}_\mu(X)$, symbolem $M^{1,p}_H(X)$ oznaczać będziemy podprzestrzeń przestrzeni $M^{1,p}(X)$ składającą się z funkcji H-niezmienniczych.

W pracy [R4] udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 8. *Niech (X, ρ, μ) będzie przetrzenią metryczną z s-regularną miarą Ahlforsa taką, że $M^{1,p}(X)$ jest przestrzenią refleksywną. Ponadto, niech $H \lhd Iso_\mu(X)$ spełnia warunek*

$$\lim_{R\to\infty} \inf_{x\in X\setminus B(x_0,R)} M_H(x,r) = \infty \ ,$$

gdzie x_0 jest ustalonym punktem z X oraz $r > 0$. Wtedy, jeśli $s > p > 1$, to

$$M^{1,p}_H(X) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(X)$$

dla każdego $p < q < p^* = \frac{sp}{s-p}$.

Omówmy główne kroki dowodu Twierdzenia 8. Po pierwsze, ciągłość zanurzenia wynika ze Stwierdzenia 3.1 w pracy [R6]. W kolejnym etapie wykazujemy lemat pokryciowy, a następnie, używając wspomnianego lematu pokryciowego oraz odpowiednio dobranych funkcji wycinających, udowadniamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 9. *Niech (X, ρ, μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą s-regularną. Jeśli u_n jest ciągiem ograniczonym w $M^{1,p}(X)$, gdzie $p < s$, oraz jeśli istnieje $r > 0$ takie, że*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in X} \int_{B(y,r)} |u_n|^p d\,\mu = 0,$$

to wtedy

$$u_n \to 0 \quad in \quad L^q(X),$$

gdzie $p < q < p^* = \frac{sp}{s-p}$.

W kolejnym kroku ustalamy dowolny ciąg $u_n \in M^{1,p}_H(X)$. Refleksywność przestrzeni implikuje istnienie podciągu $\{u_{n_k}\}$, który zbiega słabo do u w przestrzeni $M^{1,p}_H(X)$. Niech $v_k := u_{n_k} - u$. Stosując charakteryzację zbiorów prezwartych w L^p [30], twierdzenie o funkcjach maksymalnych oraz metodę przekątniową Cantora sprawdzamy, że ciąg v_k spełnia założenia Twierdzenia 9. Stąd otrzymujemy tezę Twierdzenia 8.

Przejdźmy teraz do opowiedzenia twierdzenia o zwartości z pracy [R5]. Zacznijmy od przypomnienia niebędnych pojęć z geometrii riemannowskiej.

Powiemy, że n-wymiarowa rozmaitość (M, g) ma własność $\mathcal{B}_{vol}(\lambda, \vartheta)$ jeśli ma 'ograniczoną' geometrię w następującym sensie:

- $Rc(g) \geq \lambda(n-1)g$,
- $|B_1(x)|_g \geq \vartheta$ dla wszystkich $x \in M$.

Oznaczmy symbolem $L^{q(\cdot)}_1(M)$ przestrzeń Sobolewa ze zmiennym wykładnikiem (zob. [23]). Niech ponadto, H będzie podgrupą grupy izometrii $\mathrm{Iso}(M, g)$, a $q \in \mathcal{P}(M)$ H-niezmienniczy wykładnik. Wówczas symbolem $L^{q(\cdot)}_{1,H}(M)$ będziemy oznaczać podprzestrzeń $L^{q(\cdot)}_1(M)$ składającą się z H-niezmienniczych funkcji.

W pracy [R5] udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10. *Niech (M, g) będzie zupełną n-wymiarową rozmaitością riemannowską mającą własność $\mathcal{B}_{vol}(\lambda, \vartheta)$ dla pewnych (λ, ϑ). Niech H będzie podgrupą grupy izometrii Iso(M, g) taką, że dla pewnego $R > 0$ zachodzi*

$$\lim_{T\to\infty} \inf_{x\in M\setminus B(o,T)} M_H(x, R) = \infty ,$$

gdzie o jest ustalonym punktem z M. Jeśli $q \in \mathcal{P}(M)$ jest jednostajnie ciągły, H-niezmiennicze oraz $1 < q^- \leq q^+ < n$, to wtedy

$$L^{q(\cdot)}_{1,H}(M) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p(\cdot)}(M)$$

dla każdego $p \in \mathcal{P}(M)$ takiego, że $q \ll p \ll q^*$.

Powyższe twierdzenie może być stosowane np. do zagadnień eliptycznych pochodzenia wariacyjnego (patrz [R5]). Opiszmy pokrótce schemat dowodu Twierdzenia 10. W pierwszym kroku, używając, między innymi, twierdzenia Gromova-Bishopa, wykazujemy twierdzenie o ciągłym zanurzeniu (Twierdzenie 4.2 z pracy [R5]). Następnie, stosujemy metody z pracy Fana, Zhao i Zhao [19] i udowadniamy odpowiednik Twierdzenia 9 w przestrzeniach ze zmiennnym wykładnikiem na rozmaitościach riemannowskich. Ostatni etap dowodu jest bardzo podobny do dowodu Twierdzenia 8.

C. Warunki geometryczne na zanurzenia Sobolewa

W tej części autoreferatu przyjrzymy się dokładniej przestrzeniom, które spełniają warunek (2) z Twierdzenia 1. Wyniki tego rozdziału bazują na artykułach [R6] i [R7]. Zacznijmy od tła historycznego.

Niech Ω będzie podzbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$. Jeśli Ω jest dostatecznie gładkie oraz $p < n$, to zachodzi twierdzenie Sobolewa $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, gdzie $p^* := \frac{np}{n-p}$ [4]. Z drugiej strony, Hajłasz, Koskela i Tuominen [36] wykazali, że jeśli $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, to Ω spełnia tzw. warunek na gęstość miary (*measure density condition*), tzn. istnieje $c > 0$, takie że, dla $x \in \Omega$ i dla $0 < r \leq 1$ spełniona jest nierówność[9]

$$|B(x, r) \cap \Omega| \geq cr^n. \tag{3}$$

W późniejszej pracy Zhou [68] przeniósł wynik Hajłasza, Koskeli i Tuominena na przypadek przestrzeni Slobodeckiego-Sobolewa $W^{s,p}$.

W pracy [R6] badaliśmy związki między zanurzeniami przestrzeni Hajłasza-Sobolewa, a dolną regularnością miary w sensie Ahlforsa. Udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 11. *Niech (X, ρ, μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą podwajającą. Jeśli*

$$M^{1,p}(X) \hookrightarrow L^q(X),$$

gdzie $q > p$, to wówczas istnieje stała $b = b(p, q, C_{pq})$ taka, że

$$\mu(B(x, r)) \geq br^\alpha \quad dla \quad r \in (0, 1],$$

gdzie $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha}$ oraz C_{pq} jest stałą z zanurzenia.

[9] $|\cdot|$ oznacza miarę Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$.

Początek dowodu tego twierdzenia polega na konstrukcji dobrej funkcji wycinającej. Następnie, testujemy nią nierówność wynikającą z zanurzenia $M^{1,p}(X) \hookrightarrow L^q(X)$. W kolejnym etapie, iterujemy otrzymane nierówności i przechodzimy z liczbą iteracji do nieskończoności. Co ciekawe, w powyższym twierdzeniu stała b nie zależy od stałej podwajania. Dzięki procesowi iteracyjnemu i przejściu granicznemu stała podwajania 'znika'. Otwartym pozostaje pytanie, czy zachodzi teza Twierdzenia 11 bez założenia warunku podwajania.

Ponadto, w pracy [R6] otrzymaliśmy poniższe dwa twierdzenia charakteryzujące zanurzenia przestrzeni $M^{1,p}$.

Twierdzenie 12. *Niech (X, ρ, μ) będzie nieograniczoną przestrzenią metryczną z miarą podwajającą taką, że $\mu(B(x,r)) \leq Br^\alpha$ dla $r > 0$ oraz $x \in X$. Załóżmy, że $1 \leq p < q$ oraz $\alpha = \frac{pq}{q-p}$. Wówczas, następujące warunki są równoważne:*

i) istnieje $b > 0$ takie, że dla $x \in X$ oraz $r > 0$ spełniona jest nierówność

$$\mu(B(x,r)) \geq br^\alpha,$$

ii)

$$M^{1,p}(X) \hookrightarrow L^q(X),$$

oraz istnieje $C > 0$ takie, że dla $u \in M^{1,p}(X)$ zachodzi nierówność

$$\|u\|_{L^q(X)} \leq C\|g\|_{L^p(X)},$$

gdzie g jest gradientem Hajłasza funkcji u.

Dowód implikacji $ii) \Rightarrow i)$ przebiega w analogiczny sposób jak dowód Twierdzenia 11. Aby pokazać implikację w drugą stronę (jest to, de facto, treść Stwierdzenia 3.1 z pracy [R6]), stosujemy oszacowania na kulach z ustalonym promieniem z pracy [34]. Następnie, używając nierówności Höldera, przechodzimy z promieniem kuli do nieskończoności.

Łącząc Twierdzenie 11 z wynikami z pracy [33], otrzymujemy następujące twierdzenie charakteryzujące zanurzenia przestrzeni Sobolewa na ograniczonych przestrzeniach metrycznych:

Twierdzenie 13. *Niech (X, ρ, μ) będzie ograniczoną przestrzenią metryczną z miarą podwajającą. Załóżmy, że $p < q$ oraz $\alpha = \frac{pq}{q-p}$. Wówczas, następujące warunki są równoważne:*

i) istnieje $b > 0$ takie, że dla $x \in X$ oraz $0 < r < diamX$, spełniona jest nierówność

$$\mu(B(x,r)) \geq br^\alpha,$$

ii)

$$M^{1,p}(X) \hookrightarrow L^q(X).$$

W pracy [R7] badaliśmy, między innymi, związki między nierównością Trudingera-Mosera a warunkiem (2). Udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 14. *Niech (X, ρ, μ) będzie spójną przestrzenią metryczną z miarą podwajającą. Niech ponadto, $C_d > 2$ oznacza stałą podwajającą oraz $s = \log_2 C_d$. Wówczas, następujące warunki są równoważne:*

i) istnieją β oraz B takie, że[10]

$$\sup_{\|u\|_{M^{1,s}}\leq 1} \int_X \left(e^{\beta|u|^{\frac{s}{s-1}}} - \sum_{k=0}^{\lceil s\rceil -2} \frac{\beta^k |u|^{k\frac{s}{s-1}}}{k!} \right) d\mu < B,$$

ii) istnieje $\theta > 0$ taka, że dla $x \in X$, spełniona jest nierówność

$$\mu(B(x,1)) \geq \theta.$$

Aby pokazać implikację $i) \Rightarrow ii)$, wykorzystujemy nierówność interpolacyjną i pokazujemy zanurzenie przestrzeni $M^{1,s}$ w L^q, gdzie $q > s$. Stosując wyniki z pracy [R6], otrzymujemy tezę. Dowód drugiej implikacji jest bardziej złożony i wymaga, między innymi, skonstruowania funkcji wycinających do 'zlokalizowania' problemu, użycia 'lokalnych' nierówności Trudingera-Mosera z pracy [35], a następnie lematu pokryciowego z pracy [R4], aby 'skleić' całość.

D. Twierdzenie typu Sudakova

Spróbujmy przyjrzeć się warunkom $(A), (B), (C)$ oraz $(A), (B'), (C)$ z twierdzenia Riesza-Kołmogorowa. Pego [55] udowodnił bardzo ciekawe twierdzenie o dulaności. Mianowicie, ograniczona rodzina $\mathcal{K} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ spełnia warunek (B) (odpowiednio (C)) tylko wtedy, gdy $\mathcal{F}(\mathcal{K})$[11] spełnia warunek (C) (odpowiednio (B)). Twierdzenie Pego znalazło również swój odpowiednik w przestrzeniach Lebesgue'a na lokalnie zwartych grupach abelowych [27, 28].

Bardziej zaskakujące okazało się odkrycie Sudakova [63] (praca [43] zawiera krótki dowód tego twierdzenia) z 1957 roku, który zauważył, iż warunki (B) oraz (C) implikują ograniczenie rodziny, tj. warunek (A)[12] (*sic!*). Stąd, do sformułowania klasycznego twierdzenia o zwartości w $L^p(\mathbb{R}^n)$ wystarczą dwa warunki: $(B), (C)$. Twierdzenie Sudakova w przestrzeniach funkcyjnych Banacha określonych na lokalnie zwartych i spójnych grupach topologicznych zostało udowodnione w pracy [31].

W pracy [R8] udowodniliśmy następującą wersję twierdzenia Sudakova na przestrzeniach metrycznych:

Twierdzenie 15. *Niech (X, ρ, μ) będzie spójną przestrzenią metryczną z miarą podwajającą, która jest ciągła względem metryki. Załóżmy ponadto, że kule są prezwarte oraz istnieje $\theta > 0$ takie, że $\mu(B(x,1)) \geq \theta$. Niech $1 < p < \infty$ oraz D będzie ograniczonym podzbiorem X takim, że $X \setminus \overline{D} \neq \emptyset$. Wówczas, jeśli rodzina $\mathcal{F} \subset L^p(D,\mu)$ spełnia warunek*

$$\lim_{r\to 0} \int_X |f(x) - (f)_{B(x,r)}|^p d\mu(x) = 0 \quad \textit{jednostajnie dla } f \in \mathcal{F},$$

gdzie rozszerzyliśmy f zerem poza D, to $\mathcal{F}$ jest ograniczona.

Dowód powyższego twierdzenia polega na zbadaniu operatora uśrednienia po kulach o ustalonym promieniu. Stosując twierdzenie o prezwartości w L^p pokazujemy, że operator uśrednienia jest zwarty, a następnie wykazujemy, że 1 nie jest wartością własną. Teoria Riesza-Schaudera pozwala zakończyć dowód.

5. Syntetyczne omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Lista prac po doktoracie spoza rozprawy hibilitacyjnej:

[10] $\lceil \alpha \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq \alpha\}$.

[11] $\mathcal{F}$ oznacza transfromatę Fouriera.

[12] warunki (B') oraz (C) również implikują warunek (A).

[G1] P. Górka, Brézis-Wainger inequality on Riemannian manifolds. J. Inequal. Appl. 2008, Art. ID 715961, 6 pp.

[G2] K. Bartkowski, P. Górka, One-dimensional Klein-Gordon equation with logarithmic nonlinearities. J. Phys. A 41 (2008), no. 35, 355201, 11 pp.

[G3] P. Górka, Logarithmic Klein-Gordon equation. Acta Phys. Polon. B 40 (2009), no. 1, 59-66.

[G4] P. Górka, Campanato theorem on metric measure spaces. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 34 (2009), no. 2, 523-528.

[G5] M Gaczkowski, P. Górka, Harmonic functions on metric measure spaces: convergence and compactness. Potential Anal. 31 (2009), no. 3, 203-214.

[G6] Y. Giga, P. Górka, P. Rybka, Nonlocal spatially inhomogeneous Hamilton-Jacobi equation with unusual free boundary. Discrete Contin. Dyn. Syst. 26 (2010), no. 2, 493-519.

[G7] P. Górka, Generalized 1D Jörgens theorem. Nonlinear Anal. 72 (2010), no. 6, 2852-2858.

[G8] M. Dudziński, P. Górka, Stochastic evolution of 2-D crystals. Appl. Math. Comput. 216 (2010), no. 1, 205-212.

[G9] P. Górka, P. Rybka, Existence and uniqueness of solutions to singular ODE's. Arch. Math. (Basel) 94 (2010), no. 3, 227-233.

[G10] P. Górka, H. Prado, E. G. Reyes, Functional calculus via Laplace transform and equations with infinitely many derivatives. J. Math. Phys. 51 (2010), no. 10, 103512, 10 pp.

[G11] Y. Giga, P. Górka, P. Rybka, A comparison principle for Hamilton-Jacobi equations with discontinuous Hamiltonians. Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), no. 5, 1777-1785.

[G12] P. Górka, H. Prado, E. G. Reyes, Nonlinear equations with infinitely many derivatives. Complex Anal. Oper. Theory 5 (2011), no. 1, 313-323.

[G13] P. Górka, E. G. Reyes, The modified Camassa-Holm equation. Int. Math. Res. Not. IMRN 2011, no. 12, 2617-2649.

[G14] P. Górka, H. Prado, E. G. Reyes, The initial value problem for ordinary differential equations with infinitely many derivatives. Classical Quantum Gravity 29 (2012), no. 6, 065017, 15 pp.

[G15] P. Górka, E. G. Reyes, The modified Hunter-Saxton equation. J. Geom. Phys. 62 (2012), no. 8, 1793-1809.

[G16] P. Górka, H. Prado, E. G. Reyes, Generalized Euclidean bosonic string equations. Spectral analysis of quantum Hamiltonians, 147-169, Oper. Theory Adv. Appl., 224, Birkher/Springer Basel AG, Basel, 2012.

[G17] P. M. Bies, P. Górka, E. G. Reyes, The dual modified Korteweg-de Vries-Fokas-Qiao equation: geometry and local analysis. J. Math. Phys. 53 (2012), no. 7, 073710, 19 pp.

[G18] M. Dudziński, P. Górka, The almost sure central limit theorem for randomly indexed sums of associated random variables. Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 18 (2012), no. 2, 171-184.

[G19] M. Gaczkowski, P. Górka, Sobolev spaces with variable exponents on Riemannian manifolds. Nonlinear Anal. 92 (2013), 47-59.

[G20] P. Górka, H. Prado, E. G. Reyes, On a general class of nonlocal equations. Ann. Henri Poincare 14 (2013), no. 4, 947-966.

[G21] Y. Giga, P. Górka, P. Rybka, Evolution of regular bent rectangles by the driven crystalline curvature flow in the plane with a non-uniform forcing term. Adv. Differential Equations 18 (2013), no. 3-4, 201-242.

[G22] M. Dudziński, P. Górka, The almost sure central limit theorems for the maxima of sums under some new weak dependence assumptions. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 29 (2013), no. 3, 429-448.

[G23] P. Górka, T. Kostrzewa, E. G. Reyes, The Rellich lemma on compact abelian groups and equations of infinite order. Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 10 (2013), no. 2, 1220030, 11 pp.

[G24] P. Górka, Pego theorem on locally compact abelian groups. J. Algebra Appl. 13 (2014), no. 4, 1350143, 5 pp.

[G25] P. Górka, A. Kurek, E. Lazarte, H. Prado, Parabolic flow on metric measure spaces. Semigroup Forum 88 (2014), no. 1, 129-144.

[G26] P. Górka, T. Kostrzewa, E. G. Reyes, Sobolev spaces on locally compact abelian groups: compact embeddings and local spaces. J. Funct. Spaces 2014, Art. ID 404738, 6 pp.

[G27] P. Górka, A. Macios, The Riesz-Kolmogorov theorem on metric spaces. Miskolc Math. Notes 15 (2014), no. 2, 459-465.

[G28] P. Górka, D. J. Pons, E. G. Reyes, Equations of Camassa-Holm type and the geometry of loop groups. J. Geom. Phys. 87 (2015), 190-197.

[G29] P. Górka, E. G. Reyes, Sobolev spaces on locally compact abelian groups and the bosonic string equation. J. Aust. Math. Soc. 98 (2015), no. 1, 39-53.

[G30] M. Dudziński, P. Górka, The crystalline dynamics of spiral-shaped curves. J. Stat. Phys. 160 (2015), no. 2, 409-416.

[G31] P. M. Bies, P. Górka, Schauder theory in variable Hölder spaces. J. Differential Equations 259 (2015), no. 7, 2850-2883.

[G32] Y. Giga, P. Górka, P. Rybka, Bent rectangles as viscosity solutions over a circle. Nonlinear Anal. 125 (2015), 518-549.

[G33] K. Makuch, P. Górka, Multipole matrix of Green function of Laplace equation. Acta Phys. Polon. B 46 (2015), no. 8, 1487-1498.

[G34] T. Adamowicz, P. Górka, The Liouville theorems for elliptic equations with nonstandard growth. Commun. Pure Appl. Anal. 14 (2015), no. 6, 2377-2392.

[G35] P. Górka, T. Kostrzewa, Sobolev spaces on metrizable groups. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 40 (2015), no. 2, 837-849.

[**G36**] P. Górka, T. Kostrzewa, Pego everywhere. J. Algebra Appl. 15 (2016), no. 4, 1650074, 3 pp.

[**G37**] P. Górka, Ergodic theorem in variable Lebesgue spaces. Period. Math. Hungar. 72 (2016), no. 2, 243-247.

[**G38**] P. M. Bies, P. Górka, Cordes-Nirenberg theory in variable exponent spaces. J. Differential Equations 262 (2017), no. 2, 862-884.

[**G39**] P. Górka, H. Prado, J. Trujillo, The time fractional Schrödinger equation on Hilbert space. Integral Equations Operator Theory 87 (2017), no. 1, 1-14.

[**G40**] M. Gaczkowski, P. Górka, Variable Hajłasz-Sobolev spaces on compact metric spaces. Math. Slovaca 67 (2017), no. 1, 199-208.

[**G41**] P. Górka, A. Słabuszewski, A discontinuous Sobolev function exists, Proc. Amer. Math. Soc. DOI: https://doi.org/10.1090/proc/14164.

Przed doktoratem opublikowane zostały następujące prace, które nie będą tutaj omawiane.

[**D1**] P. Górka, Evolution of 3-D crystals from supersaturated vapor with modified Stefan condition: Galerkin method approach. J. Math. Anal. Appl. 341 (2008), no. 2, 1413-1426.

[**D2**] P. Górka, Quasi-static evolution of polyhedral crystals. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 9 (2008), no. 2, 309-320.

[**D3**] P. Górka, Convergence of logarithmic quantum mechanics to the linear one. Lett. Math. Phys. 81 (2007), no. 3, 253-264.

[**D4**] P. Górka, Elliptic equation with singular terms on Riemannian manifold. Lett. Math. Phys. 79 (2007), no. 2, 193-201.

[**D5**] P. Górka, An overdetermined elliptic problem in a domain with countably rectifiable boundary. Colloq. Math. 107 (2007), no. 1, 7-14.

[**D6**] P. Górka, Logarithmic quantum mechanics: existence of the ground state. Found. Phys. Lett. 19 (2006), no. 6, 591-601.

[**D7**] P. Górka, Critical size of crystals in the plane. Interfaces Free Bound. 7 (2005), no. 1, 99-105.

Równania fizyki matematycznej

Równanie Kleina-Gordona z logarytmiczną nieliniowością

W pracach [G2], [G3] badaliśmy równanie Kleina-Gordona[13] z logarytmiczną nieliniowością w jednym wymiarze przestrzennym. Przy odpowienim założeniu na dane początkowe, w pracy [G2] skonstruowaliśmy słabe rozwiązania dla zagadnienia Cauchy'ego. Ponadto, wykazaliśmy w niej istnienie rozwiązań klasycznych, jak również zbadaliśmy rozwiązania w postaci fal biegnących. Z kolei, w pracy [G3] skonstruowaliśmy słabe rozwiązania dla przypadku, gdy obszar, na którym badamy równanie jest odcinkiem.

Równania Hamiltona-Jacobiego

[13] Równanie Kleina-Gordona jest relatywistyczną wersją równania Schrödingera.

W cylku prac [G6], [G21] i [G32] badamy ewolucję 'powyginanych' prostokątów, opisaną potokiem średniokrzywiznowym z wagą, tj.

$$\beta V = \kappa_\gamma + \sigma, \quad \text{na} \quad \Gamma(t),$$

gdzie κ jest krzywizną, $\Gamma(t)$ krzywą zamkniętą, γ anizotropią, β współczynnikiem kinetycznym, a σ członem wymuszającym. Zapisując zagadnienie w lokalnym układzie współrzędnych, otrzymujemy układ równań różniczkowych zwyczajnych sprzężonych z równaniami Hamiltona-Jacobiego. Przy odpowienim założeniu na dane początkowe wykazujemy istnienie rozwiązań. Następnie, zakładając, że dane początkowe spełniają odpowiednie warunki geometryczne, pokazujemy że rozwiązanie jest rozwiązaniem lepkościowym. To pozwala zastosować zasady porównawcze w celu otrzymania jednoznaczności rozwiązań. Z kolei, w pracy [G11] badamy równanie Hamiltona-Jacobiego z nieciągłym Hamiltonianem. Wykazujemy w niej wersję zasady porównawczej.

Równania nieskończonego rzędu

Seria prac: [G10], [G12], [G14], [G16], [G20] jest poświęcona równaniom nieskończonego rzędu, które pojawiają się w fizyce cząstek elementarnych, nielokalnej kosmologii, czy też w teorii strun. W pracach [G10] i [G14] badamy równania ewolucyjne typu

$$f(\partial_t)u = J(t),$$

gdzie f jest ustaloną funkcją analityczną.
Badamy teorię istnienia w odpowiednio dobranych przestrzeniach funkcyjnych.

Ponadto, w pracach [G12], [G16] i [G20] rozważamy zagadnienia stacjonarne, tj. rówania typu

$$\Delta e^{-\Delta} u - V(x, u) = 0,$$

gdzie V jest ustaloną nieliniowością.
Udowadniamy w nich twierdzenia o istnieniu rozwiązań w przypadku przestrzeni euklidesowej oraz zwartych rozmaitości riemannowskich. Ponadto, otrzymujemy także wyniki o regularności rozwiązań.

Równania typu Camassy-Holma, Huntera-Saxtona oraz KdV

W pracach [G13], [G15] oraz [G17] zajmujemy się tzw. zmodyfikowanymi wersjami równań Camassy-Holma, Huntera-Saxtona oraz Kortewega-de Vriesa-Fokasa-Qiao. Interesują nas aspekty geometryczne (prawa zachowania, symetrie itp.) oraz analityczne (istnienie i jednoznaczność rozwiązań).

Praca [G28] ma charakter geometryczny i dotyczy geometrii riemannowskiej grupy dyfeomorfizmów.[14] Dla grupy dyfeomorfizmów okręgu znajdujemy wzór na krzywiznę sekcyjną.

Analiza na przestrzeniach metrycznych

Klasyczne twierdzenie Campanato charakteryzuje funkcje hölderowsko ciągłe w terminach normy L^p różnicy funkcji i średniej na małych kulkach. W pracy [G4] udowodniliśmy twierdzenie Campananto na przestrzeniach metrycznych wyposażonych w miarę borelowską, która jest ciągła względem metryki oraz spełnia warunek podwajania. Jako wniosek, udowodniliśmy twierdzenie typu Morreya dla funkcji z klasy Hajłasza-Sobolewa.

Niech Ω będzie podzbiorem otwartym przestrzeni metrycznej X. Powiemy, że funkcja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ jest harmoniczna, jeśli spełnia własność wartości średniej, tj.

$$u(x) = \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u(y) d\mu(y),$$

[14] Niektóre równania mogą być interpretowane jako równania geodezyjne na grupie dyfeomorfizmów albo na grupie Virasoro, wyposażonych w odpowiednią metrykę [47].

dla każdej kuli $B(x,r)$ takiej, że $\bar{B}(x,r) \subset \Omega$. W pracy [G5] badaliśmy funkcje harmoniczne[15] określone na przestrzeniach metrycznych z miarą. Udowodniliśmy zasady maksimum oraz nierówność Harnacka, jak również twierdzenia o zbieżności i zwartości.

W pracy [G25] badaliśmy równanie paraboliczne na przestrzeniach metrycznych. Udowodniliśmy twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań. Przy dodatkowych założeniach skonstruowaliśmy globalne w czasie rozwiązania. Ponadto, badaliśmy regularność oraz własności jakościowe rozwiązań.

W [G41] udowodniliśmy, że w przestrzeni Hajłasza-Sobolewa $M^{1,s}$ na przestrzeni metrycznej z miarą s-regularną w sensie Ahlforsa, gdzie $s > 1$, zawsze istnieje funkcja nieciągła. Tym samym, udzieliliśmy pozytywnej odpowiedzi na hipotezę Zhou [67].

Centralne twierdzenia graniczne prawie na pewno

W pracach [G18] i [G22] zajmujemy się centralnymi twierdzeniami granicznymi w sensie prawie na pewno. W [G18] udowadniamy wersję centralnego twierdzenia granicznego prawie na pewno dla sum ciągu stowarzyszonych (*associated*) zmiennych losowych, gdzie sumy są indeksowane niezależnymi zmiennymi losowymi, natomiast w [G22] wykazujemy centralne twierdzenie graniczne prawie na pewno dla maksimów sum ciągów słabo zależnych zmiennych losowych, w sensie definicji z pracy [17].

Przestrzenie funkcyjne

Przestrzenie ze zmiennym wykładnikiem

Prace [G19], [G31], [G34], [G37], [G38] oraz [G40] poświęcone są przestrzeniom i równaniom z niestandardowym wzrostem. Prace te możemy podzielić na dwa cykle.

W pracach [G31], [G34] oraz [G38] badamy równania z niestandardowym wzrostem oraz równania eliptyczne w przestrzeniach z niestandardowym wzrostem. W pracy [G34] rozważamy równania $\mathcal{A}$-harmoniczne z niestandardowym wzrostem na $\mathbb{R}^n$. Modelowym przykładem może być tutaj równanie z $p(x)$-laplasjanem. Wykazujemy różne warianty twierdzenia Liouvillea oraz twierdzenia o nieistnieniu rozwiązań. Z kolei, w pracach [G31] i [G38] zajmujemy się równaniem eliptycznym w przestrzeniach Höldera ze zmiennym wykładnikiem. W pracy [G31] wykazujemy oszacowania Schauderowskie oraz istnienie rozwiązań dla zagadnienia:

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \text{w} \quad \Omega, \\ u &= g \quad \text{na} \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

gdzie: Ω jest obszarem w $\mathbb{R}^n$ z dostatecznie gładkim brzegiem, L jest operatorem eliptycznym, którego współczynniki, f i g należą do odpowieniej przestrzeni Höldera ze zmiennym wykładnikiem. W pracy [G38] badamy słabe rozwiązania równania:

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x)D_j u) + c(x)u = f(x).$$

Przy odpowiednim założeniu na współczynniki a_{ij}, c oraz f pokazujemy, że rozwiązania powyższego zagadnienia należą do przestrzeni Höldera ze zmiennym wykładnikiem. Ponadto, przy mocniejszych założeniach na a_{ij}, c oraz f, udowadniamy, że również gradienty rozwiązań znajdują się w przestrzeniach Höldera ze zmiennym wykładnikiem.

W pracach [G19], [G37] oraz [G40] zajmujemy się przestrzeniami funkcyjnymi ze zmiennym wyładnikiem. W [G19] badamy przestrzenie Sobolewa ze zmiennym wykładnikiem na zwartych rozmaitościach riemannowskich. Udowadniamy tam, między innymi, twierdzenia o znurzeniu, twierdzenie

[15] Kontynuację tych badań można znaleźć w pracy [2].

o zwartym włożeniu i nierówność Poincarégo. Jako zastosowanie, otrzymujemy twierdzenie o rozwiązywalności równania Poissona z $p(x)$-laplasjanem. W [G40] zajmujemy się przestrzeniami Hajłasza-Sobolewa ze zmiennym wykładnikiem na zwartych przestrzeniach metrycznych z miarą podwajającą. Zakładając ciągłość wykładnika, udowadniamy zwartość zanurzeń w przestrzenie Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem oraz przestrzenie Höldera ze zmiennym wykładnikiem. Podkreślmy, że nie zakładamy logarytmicznej hölderowskiej ciągłości wykładników. Z kolei, w artykule [G37] udowadniamy twierdzenie ergodyczne w $L^{p(\cdot)}$ na przestrzeniach probabilistycznych, gdzie wykładnik p jest T-niezmienniczy, a T jest ustaloną transformacją zachowującą miarę probabilistyczną.

Przestrzenie Sobolewa na grupach topologicznych

W cyklu prac: [G23], [G26], [G29], [G35] zajmujemy się przestrzeniami Sobolewa na lokalnie zwartych grupach abelowych. Przypomnijmy jej definicję.

Niech G będzie lokalnie zwartą grupą abelową, a $G^\wedge$ grupą dualną. Dla $s > 0$ oraz wagi $\gamma : G^\wedge \to [0, \infty)$ definiujemy przestrzeń Sobolewa $H^s_\gamma(G)$ jako zbiór tych $f \in L^2(G)$, dla których poniższe wyrażenie jest skończone

$$\int_{G^\wedge} \left(1 + \gamma(\xi)^2\right)^s |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\hat{\mu}_G(\xi).$$

Nasze badania związane ze wspomnianą tematyką rozpoczyna praca [G29]. Udowadniamy w niej podstawowe twierdzenia typu Sobolewa o ciągłym zanurzeniu, jak również odpowiednik twierdzenia Rellicha-Kondraszowa o zwartym włożeniu. Z kolei, w pracach [G23] oraz [G26] udoskonaliliśmy twierdzenia z [G29] oraz badaliśmy przestrzenie Sobolewa na obszarach lokalnie zwartych grup topologicznych. Artykuł [G35] poświęcony jest przestrzeniom Sobolewa na grupach metryzowalnych.[16] Przy założeniu odpowiedniego wzrostu miar kulek w grupie dualnej udowadniamy twierdzenie Sobolewa, twierdzenie Morreya oraz nierówność Trudingera-Mosera. Wyniki te mogą być, w szczególności, stosowane do przestrzeni Sobolewa na grupach p-adycznych $\mathbb{Q}_p^n$ [58].

Zbiory zwarte w przestrzeniach Lebesgue'a

W pracach [G24] oraz [G36] udowadniamy wersję twierdzenia Pego (zob. rozdział **D.** z omównienia rozprawy) na lokalnie zwartych grupach abelowych. Twierdzenie to orzeka, że jeśli G jest lokalnie zwartą grupą abelową oraz F jest ograniczonym podzbiorem w przestrzeni $L^p(G)$, gdzie $p \in [1, 2]$, oraz jeśli F jest jednakowo ciągłe w L^p (ma jednakowy zanik w L^p), to wówczas $\mathcal{F}(F)$ ma jednakowy zanik w L^q (jest jednakowo ciągłe w L^q), gdzie $\mathcal{F}(F) = \left\{\mathcal{F}(f) : f \in F\right\}$ oraz $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Z kolei, w [G27] charakteryzujemy zbiory relatywnie zwarte w przestrzeniach $L^p(X, \mu)$, gdzie X jest przestrzenią metryczną z miarą podwajającą spełniającą warunek (2) z Twierdzenia 1.

Inne tematy

W pracy [G1] udowadniamy nierówność Brézisa-Waingera na zwartych rozmaitościach riemannowskich.

W pracy [G7] rozważamy jednowymiarowe nieliniowe równanie falowe. Stosując twierdzenie o punkcie stałym, wykazujemy istnienie klasycznych rozwiązań oraz rozwiązań okresowych i prawie okresowych.

W pracy [G8] badamy krystaliczną wersję zmodyfikowanego zagadnienia Stefana na płaszczyźnie. Dla zagadnienia zaburzonego członem stochastycznym pokazujemy istnienie słabych rozwiązań. Z kolei, w pracy [G30] zajmujemy się krystaliczną ewolucją spiral na płaszczyźnie. Zagadnienie to jest nieskończonym układem równań różniczkowych zwyczajnych. Udowadniamy istnienie rozwiązań tego układu.

[16] Kontynuację badań przestrzeni Sobolewa na grupach metrycznych można znaleźć w pracy [29].

W artykule [G9] zajmujemy się równaniami zwyczajnymi z osobliwymi polami wektorowymi. Używając przestrzeni wagowych, udowadniamy twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań.

Praca [G33] ma charakter fizyczny. Używając transformaty Fouriera oraz teorii funkcji specjalnych, obliczamy macierz multipolową funkcji Greena.

Artykuł [G39] poświęcony jest równaniu Schrödingera z ułamkową pochodną po czasie rzędu α w przestrzeniach Hilberta. Wykazujemy w nim twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań. Ponadto, badamy zależność rozwiązań od α. W szczególności, interesuje nas zachowanie rozwiązań, gdy $\alpha \to 0$.

6. Referaty wygłoszone na konferencjach naukowych

- *Krytyczne rozmiary kryształów*, konferencja: Forum Równań Różniczkowych Cząstkowych, Będlewo, Polska, 2004.
- *Evolution of crystals in three dimensions*, konferencja: Equadiff 11, Bratysława, Słowacja, 2005.
- *Evolution of polyhedral crystals*, konferencja: ICIAM 07, Zurich, Szwajcaria, 2007.
- *Nierówność Brezisa na rozmaitościach riemannowskich*, konferencja: VI Forum Równań Różniczkowych Cząstkowych, Będlewo, Polska, 2008.
- *Stochastic evolution of crystals*, konferencja w CMM, Santiago de Chile, Chile, 2009.
- *Stochastic evolution of 2D crystals*, konferencja: 8th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Drezno, Niemcy, 2010.
- *Zagadnienie początkowe dla zmodyfikowanego równania Camassa-Holma*, konferencja: VII Froum Równań Różniczkowych Cząstkowych, Będlewo, Polska, 2010.
- *Analysis on metric spaces with metricly continuous measure*, konferencja: International Conference on Functional Analysis, Lwów, Ukraina, 2010.
- *Dynamics of Crystal Growth with Random Noise*, konferencja: ICIAM 2011, Vancouver, Kanada, 2011.
- *Przestrzenie Sobolewa na lokalnie zwartych grupach abelowych*, konferencja: VIII Forum Równań Różniczkowych Cząstkowych, Będlewo, Polska, 2012.
- referat zaproszony *On (pre)compactness in variable exponent spaces*, konferencja: Variable exponent theory and applications, Warszawa, Polska, 2014.
- Cykl wykładów *Poszukiwanie zaginionej zwartości* na konferencji dla studentów Horyzonty, 15-21 marca 2015, Będlewo, Polska.
- *Sobolev embeddings vs lower bound for the measure*, konferencja: Spring Eastern Sectional Meeting Hunter College, City University of New York, New York, USA 2017.
- referat zaproszony *Totally bounded sets in nonstandard function spaces*, konferencja: Operators in Morrey-type Spaces and Applications, Kirsehir, Turcja, 2017.

- referat zaproszony *Totally bounded sets in variable exponent Lebesgue spaces*, konferencja: Nonstandard growth phenomena 2017, Turku, Finlandia, 2017.

8. Wyjazdy w ramach współpracy naukowej

- Universit'e de Paris-Sud, Orsay, Francja, 2006, jeden tydzień.
- Universidad de Talca, Instituto de Matemática y Física, Talca, Chile, 2011, 6 tygodni.
- Universidad Austral, Rosario, Argentyna, 2011, 4 dni.
- Universidad de Santiago de Chile, Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Santiago de Chile, Chile, 2012, 5 miesięcy (w ramach stypendium wyjazdowego dla nauczycieli akademickich Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej).
- Universidad de Santiago de Chile, Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Santiago de Chile, Chile, 2013, 2 tygodnie.
- Universidad de Santiago de Chile, Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Santiago de Chile, Chile, 2014, 2 tygodnie.
- TIFR Centre For Applicable Mathematics, Bangalore, Indie, 2015, 3 tygodnie.
- Universidad de Santiago de Chile, Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Santiago de Chile, Chile, 2015, 2 tygodnie.
- Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbejdżan, 2016, 2 tygodnie.
- Pontificia Universidad Javeriana, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Bogota, Kolumbia, 2016, 2 tygodnie.
- Universidad de Santiago de Chile, Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Santiago de Chile, Chile, 2017, 2 tygodnie.
- Vasile Alecsandri University of Bacău, Bacău, Rumunia, 1 tydzień.
- Universidad de Santiago de Chile, Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Santiago de Chile, Chile, 2018, 2 tygodnie.
- Universidad de Colima, Facultad de Ciencias, Colima, Meksyk, 2018, 2 tygodnie.

9. Udział w krajowych i międzynarodowych projektach badawczych

- *Dynamika powierzchni swobodnych w modelach przejść fazowych*, 2005-2008, grant KBN 1 P03A 037 28, wykonawca.
- *Paraboliczne zagadnienia ewolucji powierzchni w teorii przejść fazowych*, 2008-2011, grant MNiSW N N201 268935, wykonawca.
- *Nonlinear Schrödinger equation with fractional laplacian*, 2009-2011, grant FONDECYT Chile, 3100019, kierownik.

- *Dyfuzja anizotropowa w ewolucji powierzchni swobodnych*, 2011-2015, grant NCN 2011/01/B/ST1/01197, wykonawca.
- *Non Classical Pseudo-Differential Equations: fractional evolutionary equations, and equations with infinitely many derivatives*, 2013-2017, grant FONDECYT Chile, 1130554, wykonawca.
- *Geometryczna teoria funkcji i przekształceń na przestrzeniach metrycznych*, 2015-2017, grant MNiSW 0009/IP3/2015/73, wykonawca.
- *On NonLinear Pseudo Differential Equations: Equations with Infinitely Many Derivatives and Non Local Equations*, 2017-2021, grant FONDECYT Chile 1170571, wykonawca.

10. Nagrody i wyróżnienia

- 2008 - Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej (indywidualna I stopnia) za osiągnięcia naukowe.
- 2009 - Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej (indywidualna I stopnia) za osiągnięcia naukowe.
- 2011 - Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej (indywidualna I stopnia) za osiągnięcia naukowe.
- 2012 - Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej (indywidualna I stopnia) za osiągnięcia naukowe.
- 2012 - stypendium wyjazdowe dla nauczycieli akademickich Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej.
- 2013 - Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej (indywidualna I stopnia) za osiągnięcia naukowe.
- 2014 - Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej (indywidualna I stopnia) za osiągnięcia naukowe.
- 2016 - Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej (indywidualna I stopnia) za osiągnięcia naukowe.

11. Wskaźniki służące do oceny dorobku naukowego

- Sumaryczny *Impact Factor* według listy JCR, zgodnie z rokiem opublikowania : *52*
- Liczby cytowań według bazy *Web of Science*:
  - liczba cytowań: *222*,
  - liczba cytowań bez autocytowań: *116*.
- Indeks Hirscha: *9*.

Według bazy Scopus: liczba cytowań: 242, indeks Hirscha: 9;
Według bazy MathSciNet: liczba cytowań: 171, przez 86 autorów.

12. Działalność organizacyjna, recenzencka, członkowska

- Udział w komitetach organizacyjnych międzynarodowych i krajowych konferencji naukowych.

  1. *VIII Forum on Partial Differential Equations*, 2012, Będlewo, Polska, członek komitetu organizacyjnego.
  2. *Chilean-French-Polish Conference on Nonlinear Evolutionary PDE's*, 2013, Będlewo, Polska, członek komitetu organizacyjnego.
  3. Minisymposium na *6. Forum Matematyków Polskich*, 2015, Warszawa, Polska, członek komitetu organizacyjnego.
  4. Minisymposium Non-archimedean analysis and physics, *V Congreso latinoamericano de Matematicos*, 2016, Barranquilla, Kolumbia, członek komitetu organizacyjnego.

- Recenzje
  – Recenzje dla następujących czasopism: Differential and Integral Equations, Journal of Inequalities and Applications, SIAM Journal of Mathematical Analysis, Journal of Functional Analysis, Filomat, Journal of Nonlinear Analysis, Studia Mathematica, Journal of Applied Mathematics, Classical and Quantum Gravity, Moscow Mathematical Journal, Physica Scripta, Bulletin of the Korean Mathematical Society, Mathematische Nachrichten, Miskolc Mathematical Notes, Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Demonstratio Mathematica.
  – Opisy artykułów dla bazy MathSciNet oraz bazy zbMATH.
  – Recenzje wniosku grantowego dla King Fahd University of Petroleum and Minerals (KFUPM), Arabia Saudyjska.
  – Recenzja wniosku grantowego dla Chilean National Science and Technology Commission (CONICYT - Chile), Chile.

- Członkowstwo w Polskim Towarzystwie Matematycznym oraz Polskim Towarzystwie Fizycznym.

13. Kształcenie kadry

- Opieka naukowa nad doktorantami:

  1. Piotr Bies, opieka naukowa w okresie 2012-2016, Tytuł rozprawy *Równania eliptyczne w przestrzeniach Höldera ze zmiennym wyładnikiem*, Wydział MiNI Politechniki Warszawskiej, promotor pomocniczy, doktorat obroniony w 2016 r.
  2. Michał Gaczkowski, opieka naukowa w okresie 2012-2017, Tytuł rozprawy *Przestrzenie Sobolewa ze zmiennym wykładnikiem na rozmaitościach riemannowskich*, Wydział MiNI Politechniki Warszawskiej, promotor pomocniczy, doktorat obroniony w 2017 r.
  3. Mauricio Bravo Vera, opieka naukowa w okresie 2012-2015, Tytuł rozprawy *Un estudio cualitativo para ecuaciones pseudo diferenciales definidas por un símbolo de tipo elíptico*, Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago de Chile, kopromotor, doktorat obroniony w 2015 r.

4. Tomasz Kostrzewa, opieka naukowa od 2014 r., Tutuł rozprawy *Przestrzenie Sobolewa na grupach metrycznych*, Wydział MiNI Politechniki Warszawskiej, promotor pomocniczy, praca w przygotowaniu.

- Doświadczenie dydaktyczne:

1. Wykłady monograficzne dotyczące analizy matematycznej oraz równań różniczkowych, prowadzone na Wydziale MiNI Politechniki Warszawskiej.
2. Seminaria studenckie z Teorii miary, Teorii ergodycznej, Analizy i Fizyki matematycznej, Przestrzeni ultrametrycznych, Geometrycznej teorii miary, Geometrycznej teorii równań różniczkowych, Przestrzeni Sobolewa, Geometrii metrycznej, Metod analizy w teorii grafów, prowadzone na Wydziale MiNI Politechniki Warszawskiej.
3. Warsztaty dla doktorantów z Analizy globalnej, Przestrzeni Newtonowskich i przestrzeni Beppo-Levi'ego, Równań różniczkowych cząstkowych, Mechaniki klasycznej, Analizy na nieskończenie wymiarowym torusie, prowadzone na Wydziale MiNI Politechniki Warszawskiej.
4. 16 obronionych prac licencjackich, 3 obronione prace magisterskie, Politechnika Warszawska.

Literatura

[1] R. ABOULAICH, D. MESKINE, A. SOUISSI, *New diffusion models in image processing*, Comput. Math. Appl. 56 (4) (2008), 874-882.

[2] T. ADAMOWICZ, M. GACZKOWSKI, P. GÓRKA, *Harmonic functions on metric measure spaces*, arXiv:1601.03919v1.

[3] T. ADAMOWICZ, P. HARJULEHTO, P. HÄSTÖ, *Maximal operator in variable exponent Lebesgue spaces on unbounded quasimetric measure spaces*, Math. Scand. **116** (1) (2015), 5-22.

[4] R. A. ADAMS, Sobolev spaces. Pure and Applied Mathematics Vol. 65. Academic Press, New York-London, 1975.

[5] R. ALVARADO, P. GÓRKA, P. HAJŁASZ, Praca w przygotowaniu.

[6] L. AMBROSIO, P. TILLI, Topics on analysis in metric spaces. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 25. Oxford University Press, Oxford, 2004

[7] S.N. ANTONTSEV, J.F. RODRIGUES, *On stationary thermo-rheological viscous flows*, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat. 52 (1) (2006), 19-36.

[8] Z. M. BALOGH, A. KRISTÁLY, *Lions-type compactness and Rubik actions on the Heisenberg group*, Calc. Var. Partial Differential Equations **48** (2013), 89-109.

[9] C. BENNETT, R. SHARPLEY. Interpolation of operator. Academic Press, 1988.

[10] H. BERESTYCKI, P. L. LIONS, *Existence of a ground state in nonlinear equations of the Klein-Gordon type. Variational inequalities and complementarity problems*, Proc. Internat. School, Erice, 1978, pp. 35-51, Wiley, Chichester, 1980.

[11] A. BJÖRN, J. BJÖRN, Nonlinear Potential Theory on Metric Spaces. EMS Tracts in Mathematics 17, European Math. Soc. Zürich, 2011.

[12] A. CAETANO, A. GOGATISHVILI, B. OPIC, *Compactness in quasi-Banach function spaces and applications to compact embeddings of Besov-type spaces*, Proc. R. Soc. Edinb. **146A** (2016), 905-927.

[13] J. CHEEGER, *Differentiability of Lipschitz functions on metric-measure spaces*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), 428-517.

[14] S. COLEMAN, V. GLAZER, A. MARTIN, *Action minima among solutions to a class of Euclidean scalar field equations*, Comm. Math. Phys. **58** (1978), 211-221.

[15] D. CRUZ-URIBE, A. FIORENZA, Variable Lebesgue spaces. Foundations and harmonic analysis. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, Heidelberg, 2013.

[16] L. DIENING, P. HARJULEHTO, P. HÄSTÖ, M. RŮŽIČKA, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Springer 2010.

[17] P. DOUKHAN, S. LOUHICHI, *A new weak dependence condition and applications to moment inequalities*, Stochastic Process. Appl. **84** (1999), 313-342.

[18] D. E. EDMUNDS, W. D. EVANS. Hardy operators, function spaces and embeddings. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[19] X. Fan, Y. Zhao, D. Zhao, *Compact imbedding theorems with symmetry of Strauss-Lions type for the space* $W^{1,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl. **255** (2001), 333-348.

[20] M. FRÉCHET, *Sur les ensembles compacts de fonctions de carrés sommables*, Acta Littl. Sci. Szeged. **8** (1937), 116-126.

[21] T. FUTAMURA, Y. MIZUTA, T. SHIMOMURA, *Sobolev embeddings for variable exponent Riesz potentials on metric spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **31** (2006), 495-522.

[22] M. GACZKOWSKI, P. GÓRKA, *Harmonic Functions on Metric Measure Spaces: Convergence and Compactness*, Potential Anal. **31** (2009), 203-214.

[23] M. GACZKOWSKI, P. GÓRKA, *Sobolev spaces with variable exponents on Riemannian manifolds*, Nonlinear Anal. **92** (2013), 47-59.

[24] M. GACZKOWSKI, P. GÓRKA, *Variable Hajłasz-Sobolev spaces on compact metric spaces*, Mathematica Slovaca, **67** (2017), 199-208.

[25] M. GACZKOWSKI, P. GÓRKA, D.J. PONS, *Symmetry and compact embeddings for critical exponents in metric-measure spaces*, Preprint 2018.

[26] P. GÓRKA, *Campanato Theorem on Metric Measure Spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. **34** (2009), 523-528.

[27] P. GÓRKA, *Pego theorem on locally compact abelian groups*, J. Algebra Appl. **13**(4) ID 1350143, (2014).

[28] P. GÓRKA, T. KOSTRZEWA, *Pego everywhere*, J. Algebra Appl. **15**(4) ID 1650074, (2016).

[29] P. GÓRKA, T. KOSTRZEWA, *Second kiss of Sobolev spaces on metrizable groups*, Preprint.

[30] P. GÓRKA, A. MACIOS, *The Riesz-Kolmogorov theorem on metric spaces*, Miskolc Math. Notes. **15** (2014), 459-465.

[31] P. GÓRKA, P. POŚPIECH, *Banach function spaces on locally compact groups*, Preprint (2018).

[32] L. GRECO, T. IWANIEC, C. SBORDONE, *Inverting the* p*-harmonic operator*, Manuscripta Math. **92**(2) (1997), 249-258.

[33] P. HAJŁASZ, *Sobolev spaces on an arbitrary metric space*, Potential Anal. **5** (1996), 403-415.

[34] P. HAJŁASZ, *Sobolev spaces on metric-measure spaces. Heat kernels and analysis on manifolds, graphs, and metric spaces (Paris, 2002)*, Contemp. Math. **338** (2003), 173–218.

[35] P. HAJŁASZ, P. KOSKELA, *Sobolev met Poincaré*, Memoirs Amer. Math. Soc. **688** (2000), 1–101.

[36] P. HAJŁASZ, P. KOSKELA, H. TUOMINEN, *Sobolev embeddings, extensions and measure density condition*, J. Funct. Anal. **254** (2008), 1217–1234.

[37] P. HARJULEHTO, P. HÄSTÖ, M. PERE, *Variable exponent Lebesgue spaces on metric spaces: the Hardy-Littlewood maximal operator*, Real Anal. Exchange **30** (2004), 87-103.

[38] P. HARJULEHTO, P. HÄSTÖ, V. LATVALA, *Sobolev embeddings in metric measure spaces with variable dimension*, Math. Z. **254** (2006), 591-609.

[39] P. HARJULEHTO, P. HÄSTÖ, M. PERE, *Variable exponent Sobolev spaces on metric measure spaces.* Funct. Approx. Comment. Math. **36** (2006), 79-94.

[40] J. HEINONEN, Lectures on Analysis on Metric Spaces, Universitext, 2001.

[41] J. HEINONEN, P. KOSKELA, N. SHANMUGALINGAM, J. T. TYSON, Sobolev spaces on metric measure spaces. An approach based on upper gradients. New Mathematical Monographs, 27. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[42] H. HANCHE-OLSEN, H. HOLDEN, *The Kolmogorov-Riesz compactness theorem*, Expo. Math. **28**(4) (2010), 385-394.

[43] H. HANCHE-OLSEN, H. HOLDEN, E. MALINNIKOVA, *An improvement of the Kolmogorov-Riesz compactness theorem*, arXiv:1705.01349.

[44] E. HEBEY, M. VAUGON, *Sobolev spaces in the presence of symmetries*, J. Math. Pures Appl. **76** (1997), 859-881.

[45] T. IWANIEC, C. SBORDONE, *On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses*, Arch. Ration. Mech. Anal. **119**(2) (1992), 129-143.

[46] A. KAŁAMAJSKA, *On compactness of embedding for Sobolev spaces defined on metric spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 24 (1999), no. 1, 123-132.

[47] B. KHESIN, R. WENDT, The geometry of infinite-dimensional groups, Springer 2009.

[48] J. KINNUNEN, O. MARTIO, *The Sobolev capacity on metric spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **21** (1996), 367–382.

[49] V. KOKILASHVILI, A. MESKHI. *Maximal and Calderón-Zygmund operators in grand variable exponent Lebesgue spaces*, Georgian Math. J. (2014), 447–461.

[50] A. N. KOLMOGOROV, *Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel*, Nachr. Ges. Wiss. 9 (1931),60-63. English version: On the compactness of sets of functions in the case of convergence in the mean, w: V. M. Tikhomirov, *Selected works of A. N. Kolmogorov, Volume 1.*, Kluwer, (1991), 147-150.

[51] V. G. KROTOV, *Compactness criteria in the spaces* $L_p, p > 0$, Sb. Math. **203**(7-8) (2012), 1045-1064.

[52] F. LI, Z. LI AND L. PI, LING, *Variable exponent functionals in image restoration*, Appl. Math. Comput. **216**(3) (2010), 870-882.

[53] P. L. LIONS, *Symétrie et compacité dans les espaces de Sobolev*, J. Funct. Anal. **49** (1982), 315-334.

[54] Y. MIZUTA AND T. SHIMOMURA, *Continuity of Sobolev functions of variable exponent on metric spaces*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **80**(6) (2004), 96-99.

[55] R. L. PEGO, *Compactness in L^2 and the Fourier transform*, Proc. Amer. Math. Soc. **95** (1985), 252-254.

[56] H. RAFEIRO, *Kolmogorov compactness criterion in variable exponent Lebesgue spaces*, Proc. A. Razmadze Math. Inst. **150** (2009), 105-113.

[57] M. RIESZ, *Sur les ensembles compacts de fonctions sommables*, Acta. Szeged Sect. Math. **6** (1933), 136-142.

[58] J. J. RODRIGUEZ-VEGA, W. A. ZUNIGA-GALINDO, *Elliptic Pseudo-Differential Equations and Sobolev Spaces over p-adic Fields*, Pacific J. Math. **246** (2010), 407-420.

[59] M. RŮŽIČKA, Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory, Lecture Notes in Math., vol. 1748, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[60] L. SKRZYPCZAK, *Rotation invariant subspaces of Besov and Triebel-Lizorkin space: compactness of embeddings, smoothness and decay properties*, Revista Mat. Iberoamer. **18** (2002), 267-299.

[61] L. SKRZYPCZAK, C. TINTAREV, *A geometric criterion for compactness of invariant subspaces*, Arch. Math. **101** (2013), 259-268.

[62] W. A. STRAUSS, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Comm. Math. Phys. **55** (1977), 149-162.

[63] V. N. SUDAKOV, *Criteria of compactness in functions spaces*, Uspehi Mat. Nauk (N.S.) **12** (1957), 221-224.

[64] J. D. TAMARKIN, *On the compactness of the space Lp*, Bull. Amer, Math. Soc. **32** (1932), 79-84.

[65] A. TULAJKOV, *Zur kompaktheit in raum Lp für p=1*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. I **39** (1933), 167-170.

[66] A. WEIL, *L'intérgation dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, 1951.

[67] X. ZHOU, *Sobolev functions in the critical case are uniformly continuous in s-Ahlfors regular metric space when $s \leq 1$*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), 267-272.

[68] Y. ZHOU, *Fractional Sobolev extension and imbedding*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), 959–979.

Gŏka