Recenzja Rozprawy Doktorskiej mgr Michała Gaczkowskiego

Recenzował Tadeusz Iwaniec, 9 Września, 2016
Dla: Politechnika Warszawska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

1 Uwagi ogólne

Z przyjemnością, ale i poczuciem obowiązku uczestniczę, jako zewnętrzny członek komisji mgr Gaczkowskiego w ocenie jego rozprawy doktorskiej

"Przestrzenie Sobolewa ze zmiennym wykładnikiem na rozmaitościach riemannowskich"

Jestem zaznajomiony z tematyką rozprawy, słyszałem również pochlebne i nieprzychylne opinie na temat rozważanych w niej problemów. Po pierwsze chciałbym zaznaczyć, że Michał Gaczkowski włożył wiele pracy w przedstawienie swojej teorii w sposób czytelny, dokładny, z uwzględnieniem tła historycznego. Jego praca posiada dokładnie opisane główne cele, znaczenie naukowe i przyszłe kierunki badań. W szczególności podobała mi się skromność i umiarkowanie w omawianiu otrzymanych wyników, co jest niezwykłe dla wielu rozpraw doktorskich. Jestem pewien, że po autorze, można się spodziewać takiego samego, wysokiego poziomu pracy w przyszłości.

W mojej końcowej ocenie uważam, że oba czynniki, wyniki zamieszczone w rozprawie i dalsze perspektywy badawcze, są jednakowo ważne.

2 Problematyka

Rozprawa dotyczy przestrzeni $\mathscr{L}_k^{q(\cdot)}(\Omega)$ funkcji zdefiniowanych na podzbiorze $\Omega \subset M$ rozmaitości riemannowskiej. Są one granicami (w sensie normy $\mathscr{L}_k^{q(\cdot)}(\Omega)$) funkcji gładkich, patrz Definicja 1.3.48. Idea stojąca za taką definicją znana jest jako mocne domknięcie domykalnego nieograniczonego operatora różniczkowego $\left\{\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\right\}_{|\alpha|\leqslant k}$. Jest to sposób na obejście problemów ze słabymi pochodnymi. Z drugiej strony słabe domknięcie, które sprawdza się w przypadku klasycznych przestrzeni Sobolewa $\mathscr{W}^{1,p}(\Omega)$ ze stałym wykładnikiem, ma znakomitą historię z wieloma istotnymi zastosowaniami w teorii równań różniczkowych cząstkowych. Istotnie, w ostatnim rozdziale, koncepcja słabych rozwiązań równania $q(x)$-Laplace'a (z dodatkowym nieliniowym członem) pojawia się w naturalny sposób. Istnienie rozwiązania, przy pewnych założeniach na rozmaitość uzyskiwane są za pomocą metod wariacyjnych (bezpośrednie metody rachunku wariacyjnego). Jest to miejsce w którym twierdzenia o włożeniach dla przestrzeni $\mathscr{L}_k^{q(\cdot)}(\Omega)$, rozwijane w rozprawie, odgrywają kluczową rolę w dowodzie Twierdzenia 4.2.1. Jak można było przypuszczać, monotoniczność odwzorowania $X \to |X|^{q-2}X$ odgrywa ważną rolę w oszacowaniach i jest umiejętnie wykorzystane w rozprawie. W dowodzie tego twierdzenia zauważony został wkład wielu matematyków, co dowodzi wiedzy o zgłębianym zagadnieniu. Zastanawia mnie Uwaga 4.2.3. Co oznacza stwierdzenie, że rozwiązanie równania (4.2.3) jest odpowiednio regularne? Czy w ogólności taka regularność nie zachodzi dla słabych rozwiązań?

Zastosowanie rozmaitości riemannowskich nie wydaje się w naturalny sposób umotywowane ani problematyką matematyczną, ani fizyczną interpretacją. Przykład 2.1.4, z użyciem sfery $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, pokazuje złożoność włożeń zwartych, co jest nieuniknione do stworzenia konstruktywnej teorii całek wariacyjnych ze zmiennym wykładnikiem Sobolewa i ich słabych stacjonarnych rozwiązań. Patrząc w ten sposób możemy uznać, że w rozprawie udało się ten cel osiągnąć.

W istocie cel ten został osiągnięty w sposób godny pochwały. Rozprawa doktorska wygląda na wstęp do wyeliminowania niepotrzebnych założeń z przedstawionych w niej twierdzeń.

Wyniki pracy mogłyby być lepiej opisane. Poruszane zagadnienia są skomplikowane i wymagają wysokiej jakości badań ze swojej dziedziny. Są to cechy bardzo dobrej pracy doktorskiej, za które jestem skłonny dać mgr Gaczkowskiemu wysoką ocenę. Posiada on dobrą intuicję co do możliwych kierunków badań, co w końcu doprowadzi go do odpowiedzi na inne pytania dotyczące przestrzeni typu Sobolewa. Wierzę, że w szerszej perspektywie odniesie on sukces. W istocie mocną stroną jego pracy, w szczególności rozprawy, jest to, że łączy ona różniczkowo-geometryczne i analityczne metody z ważnymi nieliniowymi równaniami różniczkowymi. Wyniki te znajdą więc zastosowanie w innych naukach teoretycznych, a także inżynieryjnych.

3 Wnioski

Zwykle czuję się niekomfortowo porównując młodych badaczy, zwłaszcza gdy są oni pod opieką znakomitych naukowców (prof. Krzysztof Chełmiński wraz z współautorem pracy Gaczkowskiego Przemysławem Górką). Jednakże, nie zawaham się stwierdzić, że po porównaniu do recenzowanych przeze mnie wcześniej, praca Michała Gaczkowskiego jest bardzo obiecująca. Według mnie świadczy ona o wysokich standardach Politechniki Warszawskiej.

Tadeusz Iwaniec John Raymond French Distinguished Professor

Syracuse University