Streszczenie rozprawy doktorskiej

Michał Gaczkowski

W rozprawie definiujemy przestrzenie Sobolewa ze zmiennym wykładnikiem na zupełnych rozmaitościach riemannowskich. Rozszerzajamy w ten sposób teorię przestrzeni Sobolewa na rozmaitościach o zmienny wykładnik.

Praca rozpoczyna się od opisania podstawowych własności przestrzeni ze zmiennym wykładnikiem w tym przestrzeni Sobolewa i Höldera. Następnie wprowadzane są przestrzenie Sobolewa ze stałym, a później zmiennym wykładnikiem na rozmaitościach riemannowskich. W szczególności podana jest interpretacja tych przestrzeni jako podzbioru przestrzeni Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem.

Dla takich przestrzeni wykazywane są włożenia ciągłe oraz zwarte. Rozważane są różne założenia na wykładnik oraz na samą rozmaitość. Szczególnie istotny jest przypadek zwartych włożeń na niezwartych rozmaitościach. Rozważana jest wówczas podprzestrzeń przestrzeni Sobolewa niezmiennicza ze względu na działanie odpowiedniej podgrupy izometrii. W rezultacie otrzymano nowe warunki na zwarte włożenia, nawet w przypadku stałego wykładnika.

W ostatnim rozdziale rozprawy umieszczone zostały dwa zastosowania wprowadzonej teorii. Obydwa związane są z operatorem $\Delta_{p(x)}$. Na zwartych rozmaitości wykazane jest istnienie i jednoznaczność zagadnienia Poissona. Warto zwrócić uwagę jak istotną rolę w dowodzie istnienia odgrywała zwartość rozmaitości, gdyż w literaturze znajdujemy przykład, gdy podobny problem nie ma rozwiązania na odcinku $[0,1]$.

Następnie rozważany jest problem nieliniowy z $\Delta_{p(x)}$. Używając Twierdzenia o Przełęczy Górskiej wykazano istnienie nietrywialnych rozwiązań. Podobne wyniki były znane na zbiorach ograniczonych. Użycie zwartych włożeń Sobolewa umożliwiło uzyskanie podobnego rezultatu na niezwartych rozmaitościach.