AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko: Agata Pilitowska (poprzednie nazwisko Trakul)

2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:

- stopień naukowy doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki
  Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej
  Politechnika Warszawska, 1997
  tytuł rozprawy doktorskiej: "Modes of submodes" ("Mody podmodów")
- dyplom magistra inżyniera podstawowych problemów techniki (z wyróżnieniem)
  Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej
  Politechnika Warszawska, 1988
  tytuł pracy magisterskiej: "Bikraty"

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:

- od 1998 adiunkt
  Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
  (do 1999r. Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej)
  Politechnika Warszawska
- 1989 - 1998 asystent
  Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej
  Politechnika Warszawska
- 1988 - 1989 asystent stażysta
  Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej
  Politechnika Warszawska

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz.U. Nr 65, poz. 595 ze zm.):

Tytuł osiągnięcia naukowego: ***Równości entropiczne a algebry pochodne***

Cykl publikacji wchodzących w skład rozprawy:

[**A1**] A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *The lattice of subvarieties of semilattice ordered algebras*, 2014, Order 31(2), 217-238. (w spisie literatury pozycja [85])

[**A2**] A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *Varieties generated by modes of submodes*, 2012, Algebra Universalis 68, 221-236. (w spisie literatury pozycja [84])

[**A3**] K. Adaricheva, A. Pilitowska, D. Stanovský, *Complex algebras of subalgebras*, 2008, Algebra i Logika 47(6), 655–686 (w jęz. ros.). Tłumacz. w jęz. ang.: Algebra and Logic 47(6) (2008), 367–383. (w spisie literatury pozycja [2])

[**A4**] E. Lehtonen, A. Pilitowska, *Generalized entropy in expanded semigroups and in algebras with neutral element*, 2014, Semigroup Forum 88(3), 702-714. (w spisie literatury pozycja [60])

[**A5**] E. Lehtonen, A. Pilitowska, *Entropicity and generalized entropic property in idempotent n-semigroups*, 2015, Semigroup Forum 91(1), 260-281. (w spisie literatury pozycja [61])

[**A6**] P. Jedlička, A. Pilitowska, D. Stanovský, A. Zamojska-Dzienio, *The structure of medial quandles*, 2015, Journal of Algebra 443, 300-334. (w spisie literatury pozycja [46])

Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników:

Równości entropiczne a algebry pochodne

1. Wprowadzenie

Rezultaty prezentowane w rozprawie wchodzą w zakres algebry uniwersalnej, ale mają swoje korzenie zarówno w klasycznych działach algebry takich jak teoria grup, półgrup, pierścieni, modułów, jak też w geometrii, topologii czy logice. Przez (abstrakcyjną) algebrę (A, Ω) typu $\tau : \Omega \to \mathbb{N}$ rozumiemy zbiór A wraz ze zbiorem Ω operacji określonych na A. Do podstawowych konstrukcji algebraicznych należą podalgebry, różnego typu produkty oraz obrazy homomorficzne. Przez homomorfizm rozumiemy przekształcenie zachowujące strukturę algebry. *Rozmaitością* (*quasirozmaitością*) nazywamy niepustą klasę algebr podobnych (tego samego typu), która jest zamknięta ze względu na podalgebry, obrazy homomorficzne oraz produkty proste (obrazy izomorficzne, podalgebry oraz produkty zredukowane). Słynne twierdzenie Birkhoffa orzeka, że klasa algebr jest rozmaitością wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór równości, który spełniają wszystkie algebry w tej klasie. Podobnie, klasa algebr jest quasirozmaitością wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór quasirówności (implikacji), który spełniają wszystkie algebry w tej klasie.

Wymienione konstrukcje nie zawsze są wystarczające do przedstawienia jasnego opisu struktury algebr w (quasi)rozmaitościach. Spośród wielu innych sposobów konstrukcji algebr wybraliśmy algebry potęgowe, algebry podalgebr oraz sumy algebr. Wszystkie będziemy wspólnie określać jako *algebry pochodne* [87].

Algebry potęgowe zostały wprowadzone przez Jónssona i Tarskiego [50]. Dla danego zbioru A, niech $\mathcal{P}_{>0}A$ oznacza zbiór wszystkich niepustych podzbiorów A. Dla dowolnej n-argumentowej operacji $f\colon A^n \to A$ w naturalny sposób definiujemy jej *operację kompleksową* (nazwa odnosi się do ang. słowa *complex*) na (niepustych) podzbiorach zbioru A:

$$(1)\qquad f\colon (\mathcal{P}_{>0}A)^n \to \mathcal{P}_{>0}A;\quad (A_1, \ldots, A_n) \mapsto f(A_1, \ldots, A_n) := \{f(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\}.$$

Algebrą potęgową (*podzbiorów*) algebry (A, Ω) nazywamy algebrę $(\mathcal{P}_{>0}A, \Omega)$, gdzie Ω jest zbiorem operacji kompleksowych określonych przez (1). Jeżeli zbiór AS (niepustych) podalgebr algebry (A, Ω) jest zamknięty na operacje kompleksowe to algebrę (AS, Ω) będziemy nazywać *algebrą podalgebr* algebry (A, Ω).

Ogólnie, *sumą* algebr (A_i, Ω), dla $i \in I$, indeksowaną przez elementy innej algebry (I, Ω), nazywamy algebrę (A, Ω) określoną na rozłącznej sumie zbiorów A_i w taki sposób, aby algebry (A_i, Ω) były podalgebrami (A, Ω) oraz (I, Ω) była jej algebrą ilorazową. Do zdefiniowania operacji w algebrze (A, Ω) wykorzystuje się dodatkowe funkcje określone między składnikami. W zależności od właściwości tych przekształceń, otrzymujemy różne rodzaje sum. Do znanych tego typu konstrukcji należą sumy nad półkratami powszechnie stosowane w teorii półgrup. Bardzo ważnym przykładem są *sumy Płonki* nad Ω-półkratami (czyli tzw. funktorialne sumy nad Ω-półkratami). W szczególności, sumy Płonki półgrup to tzw. silne półkraty półgrup (ang. strong semilattices of semigroups). W naszym przypadku istotną rolę odgrywają również sumy, w których algebrą indeksującą jest półgrupa prawo (lub lewo) zerowa.

Motywacją do badań tego typu konstrukcji jest fakt, że algebry w pewnych klasach mogą być reprezentowane właśnie jako algebry pochodne. Mają one także ciekawe zastosowania zarówno teoretyczne, jak i praktyczne. A co jest równie ważne, posiadają przejrzysty opis.

Jednym ze sposobów charakteryzacji algebr jest wskazanie równości (par termów), które te algebry spełniają. (Mówimy, że dla pary termów $t = t(x_1, \dots, x_n)$ i $u = u(x_1, \dots, x_n)$, algebra (A, Ω) spełnia równość $t \approx u$, jeśli dla dowolnych $a_1, \dots, a_n \in A$, $t(a_1, \dots, a_n) = u(a_1, \dots, a_n)$. Stosując zapis $t(x_1, \dots, x_n)$ przyjmujemy, że zmienne termu t należą do zbioru $\{x_1, \dots, x_n\}$.) Z drugiej strony równości, które spełniają algebry determinują ich ogólną strukturę. Do klasycznych przykładów należy twierdzenie, mówiące o tym, że skończona grupa jest przemienna wtedy i tylko wtedy, gdy jest produktem grup cyklicznych, czy też fakt, że skończona krata jest algebrą Boole'a wtedy i tylko wtedy, gdy jest produktem dwuelementowej kraty.

Ważną rolę w opisie algebr pochodnych odgrywają dwa typy równości. Powiemy, że term t jest *liniowy*, jeśli wszystkie zmienne występują w t co najwyżej raz. Równość $t \approx u$ jest *liniowa*, jeśli oba termy t i u są liniowe. Natomiast równość $t \approx u$ jest *regularna*, jeśli w obu termach t i u występują te same zmienne. W szczególności rozważać będziemy równości entropiczne i idempotentne.

Algebrę (A, Ω) nazywamy *entropiczną* (*medialną*), jeśli dla każdej pary jej operacji fundamentalnych $f \colon A^n \to A$ i $g \colon A^m \to A$ spełniona jest równość *entropiczna*:

$$g(f(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, f(a_{m1}, \dots, a_{mn})) \approx f(g(a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, g(a_{1n}, \dots, a_{mn})). \tag{2}$$

Mówimy wówczas, że operacje f i g są entropiczne. Równoważnie, algebra jest entropiczna, jeśli jej operacje bazowe są homomorfizmami odpowiednich produktów. O rozmaitości $\mathcal{V}$ powiemy, że jest entropiczna, jeśli jest rozmaitością algebr entropicznych. Równości entropiczne są liniowe.

Powiemy, że algebra (A, Ω) spełnia warunek *uogólnionej entropiczności*, jeśli dla każdej n-argumentowej operacji $f \in \Omega$ i m-argumentowej operacji $g \in \Omega$, istnieją m-argumentowe termy $t_1, \dots, t_n$ takie, że w algebrze (A, Ω) prawdziwa jest równość:

$$g(f(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, f(a_{1m}, \dots, a_{nm})) \approx f(t_1(a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, t_n(a_{n1}, \dots, a_{nm})). \tag{3}$$

Uogólniona entropiczność nie musi być równością liniową ponieważ termy $t_1, \dots, t_n$ nie muszą być liniowe.

Algebra (A, Ω) jest *idempotentna*, jeśli każda jej bazowa operacja jest idempotentna, tzn.

$$f(a, \dots, a) \approx a. \tag{4}$$

Równoważnie, algebra (A, Ω) jest idempotentna, jeśli każdy jednoelementowy podzbiór A jest jej podalgebrą. Rozmaitość $\mathcal{V}$ jest idempotentna, jeśli jest rozmaitością algebr idempotentnych.

Algebry idempotentne i entropiczne, nazywamy *modami* lub *algebrami modowymi* [94, 99]. Algebry potęgowe modów są entropiczne, ale bardzo rzadko idempotentne. Natomiast dla każdej algebry modowej istnieje jej algebra podalgebr, która również jest idempotentna i entropiczna. Co więcej, algebry podalgebr istnieją dla każdej algebry spełniającej warunek uogólnionej entropiczności. Stąd naturalnym polem do badania takich struktur są algebry spełniające równości entropiczne lub idempotentne.

Wyniki wszystkich prac wchodzących w skład rozprawy należą do nurtu badań, których celem jest ustalenie zależności między rodzajem równości (w tym przypadku entropiczności, uogólnionej entropiczności, idempotentności) spełnionych w algebrach (i klasach algebr), a strukturą tych algebr lub algebr pochodnych. Znanych jest wiele tego typu twierdzeń. I tak na przykład, rozmaitość $\mathcal{V}$ jest zdefiniowana przez równości liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozmaitością zamkniętą na algebry potęgowe [40, Theorem 2 (Rozdział 63)]. Natomiast rozmaitość $\mathcal{V}$ algebr typu $\tau\colon \Omega \to \mathbb{N}$ jest zdefiniowana przez równości regularne wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozmaitością zamkniętą na 2-elementowe Ω-półkraty [40, Theorem 1 (Rozdział 63)]. W przypadku, gdy $\mathcal{V}$ jest idempotentną rozmaitością zdefiniowaną przez równości nieregularne, jej regularyzacja (rozmaitość zdefiniowana przez równości regularne prawdziwe w $\mathcal{V}$) pokrywa się z klasą sum Płonki algebr z $\mathcal{V}$. Natomiast idempotentna półgrupa (banda) jest entropiczna (normalna) wtedy i tylko wtedy, gdy jest silną półkratą idempotentnych półgrup rektangularnych.

Praca [A1] poświęcona jest algebrom uporządkowanym półkratowo. Klasa półkratowo uporządkowanych algebr z ustalonej rozmaitości $\mathcal{V}$ tworzy rozmaitość $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$. Rozszerzając wyniki znane dla półkratowo uporządkowanych półgrup oraz algebr modowych opisano algebry wolne w rozmaitości $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$. Następnie podano opis kraty podrozmaitości takiej rozmaitości w odniesieniu do kraty podrozmaitości rozmaitości $\mathcal{V}$. W zaprezentowanym opisie wykorzystano tzw. *rozszerzone algebry potęgowe*, algebry potęgowe z dodatkową operacją sumy mnogościowej, które są naturalnym uogólnieniem wprowadzonych przez Jónssona i Tarskiego potęgowych algebr Boole'a z operatorami.

Praca [A2] dotyczy rozmaitości generowanych przez algebry podalgebr modów z ustalonej rozmaitości $\mathcal{V}$. Pokazano w niej, że takie rozmaitości są zdefiniowane dokładnie przez równości liniowe i idempotentne prawdziwe w $\mathcal{V}$. Przedstawiona charakteryzacja jest analogiczna do tej, którą podali Grätzer i Lakser w [42] dla rozmaitości generowanych przez algebry potęgowe. Jednocześnie daje ona pozytywną odpowiedź na pytanie postawione w [90, Problem 9.4].

W pracy [A3] udowodniono, że warunek uogólnionej entropiczności jest konieczny i wystarczający na to, aby dla każdej algebry należącej do $\mathcal{V}$ istniała jej algebra podalgebr. Tym samym uzyskano charakteryzację rozmaitości algebr spełniających warunek uogólnionej entropiczności analogiczną do charakteryzacji rozmaitości entropicznych przedstawionej przez Evansa [28] i Klukovitsa [55]. Ponadto pokazano, że entropiczność i uogólniona entropiczność są równoważne m.in. dla algebr z elementem neutralnym. W pracy została również postawiona hipoteza (nierozstrzygnięta do dziś), że nie istnieją nieentropiczne algebry z jedną, co najmniej binarną idempotentną operacją bazową, które spełniają warunek uogólnionej entropiczności. Prace [A4] i [A5] częściowo potwierdzają tę hipotezę.

Twierdzenie Eckmanna-Hiltona mówi, że dwie binarne operacje entropiczne określone na tym samym zbiorze, ze wspólnym elementem neutralnym są równe, przemienne i łączne. Głównym wynikiem w pracy [A4] jest uogólnienie tego twierdzenia na operacje n-argumentowe a także pokazanie, że algebra z elementem neutralnym jest entropiczna wtedy i tylko wtedy, gdy jest reduktem przemiennego monoidu. Ponadto pokazano, że w przypadku półgrup z inwersją (półgrup z pewną dodatkową operacją unarną) warunki przemienności, entropiczności i uogólnionej entropiczności są równoważne.

Praca [A5] dotyczy n-półgrup - algebr z jedną n-argumentową operacją spełniającą prawo uogólnionej łączności. Dla każdego $n \geq 2$, skonstruowano nieidempotentną i nieentropiczną n-półgrupę, która ma własność uogólnionej entropiczności. Następnie podano szereg przykładów n-półgrup idempotentnych, które potwierdzają hipotezę sformułowaną w [A3]. W szczególności pokazano, że jest ona prawdziwa dla idempotentnych n-półgrup, które są reduktami półgrup oraz dla idempotentnych n-półgrup skracalnych. Udowodniono także, że dla półgrup spełniających równość $x^n \approx x$, warunki entropiczności i uogólnionej entropiczności są równoważne.

W pracy [A6] badano quandle medialne, czyli idempotentne i entropiczne, lewe quasigrupy. Pokazano, że każdy quandel medialny można przedstawić jako algebrę pochodną tzw. sumę sieci afinicznych. Taka konstrukcja pozwala skutecznie rozstrzygać, kiedy dwa quandle medialne są izomorficzne. Na jej podstawie zostały opracowane algorytmy służące do określenia liczby nieizomorficznych quandli medialnych niskich rzędów. Uzyskane wyniki istotnie poprawiają znane wcześniej rezultaty.

Main Theorem [A2] o równościach spełnionych w rozmaitościach generowanych przez algebry podalgebr oraz Theorem 3.14 [A6] o reprezentacji quandli medialnych uważam za najważniejsze wyniki prezentowanej rozprawy.

2. Rozmaitości generowane przez algebry kompleksowe

Rozszerzenie definicji operacji określonej na zbiorze A do operacji zdefiniowanej na podzbiorach tego zbioru jest szeroko wykorzystywane i jest naturalnym uogólnieniem mnożenia warstw w grupach. Na przykład, operacje kresu górnego i kresu dolnego w kracie ideałów kraty rozdzielnej $(L, \vee, \wedge)$ są kompleksowymi operacjami odpowiednio $\vee$ oraz $\wedge$ a w teorii języków formalnych, produkt dwóch języków jest operacją kompleksową konkatenacji.

Algebry kompleksowe, czyli algebry potęgowe oraz algebry podalgebr algebry (A, Ω), niejednokrotnie dostarczają nowego, czasami nawet wygodniejszego języka do opisu algebry (A, Ω). Uzasadnione są zatem pytania o własności algebry (A, Ω), które będą dziedziczone przez algebry kompleksowe jak i te do jakiego stopnia algebry kompleksowe determinują algebrę (A, Ω). Do klasycznych zagadnień pojawiających się w tym kontekście należą pytania o (quasi)równości spełnione przez algebry potęgowe oraz pytania kiedy izomorfizm algebr potęgowych implikuje izomorfizm algebr, od których one pochodzą tzw. *problem globalnego determinizmu*.

Systematyczne badania algebr potęgowych półgrup, czasami nazywanych *algebrami globalnymi*, rozpoczęli Tamura i Shafer [111]. Almeida [4] opisał pseudorozmaitości generowane przez algebry potęgowe półgrup. Algebry potęgowe dowolnych algebr były badane m.in. w [32, 102, 41]. Grätzer i Lakser [42] pokazali, że rozmaitość generowana przez wszystkie algebry potęgowe algebr z danej rozmaitości $\mathcal{V}$ jest zdefiniowana dokładnie przez równości liniowe prawdziwe w $\mathcal{V}$. Brink [15] oraz Bošnjak i Madarász [11] badali relacje określone na algebrach potęgowych. Natomiast najciekawsze wyniki dotyczące globalnego determinizmu uzyskano m.in. w [63, 56, 43]. Bargenda, Brink i Vajner [8] przedstawili algebry potęgowe w ujęciu kategoryjnym.

Algebry potęgowe mają bardzo liczne zastosowania. Okazały się być przydatne m.in. do reprezentacji innych algebr. Trnková [112] opisała potęgową reprezentację dla przemiennych półgrup a Ježek [47] przedstawił taką reprezentację dla dowolnych grupoidów (algebr z jedną operacją binarną). Rezultat Trnkovej dowodzi, że klasa produktów algebr potęgowych podalgebr addytywnej półgrupy nieujemnych liczb całkowitych jest rozmaitością. Jednak w przypadku dowolnych algebr takie klasy mogą być bardzo złożone. Szendrei [110] pokazała, że nie muszą być nawet aksjomatyzowalne.

Algebry kompleksowe są w naturalny sposób uporządkowane przez relację inkluzji i tym samym stanowią przykład tzw. *algebr uporządkowanych* [29, 10, 18]. Odgrywają one istotną rolę m.in. w logice, zarówno jako modele teorii pierwszego (i wyższych) rzędu, jak i ze względu na algebraiczną semantykę nieklasycznych logik, które wyrosły w XX wieku w lingwistyce, filozofii, matematyce i informatyce. Na przykład, kratowo uporządkowane grupy pełnią podstawową rolę w badaniu algebr logik, natomiast MV-algebry są algebraicznym odpowiednikiem nieskończenie wartościowej logiki Łukasiewicza.

W szczególności algebry potęgowe można traktować jako algebry Boole'a (podzbiorów) i przedstawiać jako tzw. *algebry Boole'a z operatorami* wprowadzone przez Jónssona i Tarskiego [50] do uogólnienia twierdzenia o reprezentacji Stone'a dla algebr Boole'a. Ogólny opis rozmaitości algebr Boole'a z operatorami, które można reprezentować przez potęgowe algebry Boole'a (z operatorami) podał Goldblatt [38]. Przykładami takich rozmaitości są m.in. rozmaitości algebr domknięć, algebr relacyjnych, algebr cylindrycznych czy też algebr modalnych. Ostatni przykład określa dobrze znaną dualność między modelami algebraicznymi jakimi są algebry modalne a odpowiadającymi im modelami relacyjnymi, czyli modelami Kripkego. Jedną z prób aksjomatyzacji klas potęgowych algebr Boole'a z operatorami podjęli Hodkinson, Mikulas i Venema [44]. Jipsen [49] pokazał, że rozmaitości generowane przez potęgowe algebry Boole'a (z operatorami) półgrup nie są skończenie bazowalne.

Algebry potęgowe można także rozważać jako algebry uporządkowane kratowo lub półkratowo. Zarówno w algebrach Boole'a z operatorami jak i algebrach uporządkowanych (pół)kratowo operacje bazowe są monotoniczne względem relacji porządkującej i stąd takie algebry są algebrami uporządkowanymi w sensie opisanym w [18].

Dla danej klasy $\mathcal{K}$ algebr podobnych, niech $\mathrm{H}(\mathcal{K})$, $\mathrm{S}(\mathcal{K})$ oraz $\mathrm{P}(\mathcal{K})$ oznaczają, odpowiednio, klasę wszystkich obrazów homomorficznych, podalgebr i produktów algebr z klasy $\mathcal{K}$. Stąd $\mathrm{HSP}(\mathcal{K})$ oznacza najmniejszą rozmaitość zawierającą $\mathcal{K}$.

A. Algebry uporządkowane półkratowo

Niech $\mho$ będzie rozmaitością wszystkich algebr (A, Ω) ustalonego typu $\tau\colon \Omega \to \mathbb{N}$ i niech $\mathcal{V} \subseteq \mho$ będzie podrozmaitością $\mho$. Algebrę $(A, \Omega, +)$ nazywamy *półkratowo uporządkowaną $\mathcal{V}$-algebrą*, jeśli $(A, \Omega) \in \mathcal{V}$, $(A, +)$ jest (górną) półkratą oraz wszystkie operacje ze zbioru Ω są rozdzielne względem operacji $+$, tzn. dla każdej $0 \neq n$-argumentowej operacji $\omega \in \Omega$ oraz $a_1, \ldots, a_i, b_i, \ldots, a_n \in A$:

$$\omega(a_1, \ldots, a_i + b_i, \ldots, a_n) = \omega(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) + \omega(a_1, \ldots, b_i, \ldots, a_n). \tag{5}$$

Klasa wszystkich półkratowo uporządkowanych $\mathcal{V}$-algebr tworzy rozmaitość oznaczaną $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$.

Przykładami półkratowo uporządkowanych algebr są addytywnie idempotentne półpierścienie, kraty dystrybutywne, czy też *modały* - półkratowo uporządkowane algebry idempotentne i entropiczne (algebry modowe) [94]. Algebra $(\mathbb{R}, \underline{\mathbb{R}}, max)$ określona na zbiorze liczb rzeczywistych, gdzie $\underline{\mathbb{R}}$ jest zbiorem binarnych operacji średniej ważonej $\underline{p} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $(x, y) \mapsto (1 - p)x + py$, dla każdego $p \in \mathbb{R}$, jest przykładem modału.

Algebra $(\mathcal{P}_{>0}A, \Omega, \cup)$, gdzie $\cup$ oznacza sumę mnogościową zbiorów, jest kolejnym przykładem półkratowo uporządkowanej algebry. Będziemy ją nazywać *rozszerzoną algebrą potęgową*. Algebra $(\mathcal{P}_{>0}^{<\omega}A, \Omega, \cup)$ wszystkich skończonych niepustych podzbiorów A jest jej podalgebrą. Rozszerzone algebry potęgowe są uogólnieniem *algebr Boole'a z operatorami*, które wprowadzili Jónsson i Tarski [50].

Podrozmaitości danej rozmaitości algebr $\mathcal{R}$ tworzą kratę zupełną $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ ze względu na relację zawierania. Mimo, że ta krata jest często bardzo skomplikowana, to jakakolwiek wiedza o jej strukturze daje ważne narzędzie do analizy rozmaitości $\mathcal{R}$. Jak wiadomo, teorie równościowe można bezpośrednio scharakteryzować poprzez algebraiczną strukturę algebr wolnych, a dokładniej krata $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ jest dualnie izomorficzna z kratą w pełni niezmienniczych kongruencji algebry $F_{\mathcal{R}}(X)$ wolnej w $\mathcal{R}$, o przeliczalnym (nieskończonym) zbiorze generatorów X.

W pracy [A1] podaliśmy opis kraty $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_{\mho}}$ podrozmaitości rozmaitości $\mathcal{S}_{\mho}$ w odniesieniu do kraty $\mathcal{L}_{\mho}$ podrozmaitości (dowolnej) rozmaitości $\mho$. Kluczową rolę w tym opisie odgrywają rozszerzone algebry potęgowe algebr wolnych. Postać takiej kraty dla dowolnej rozmaitości nie była dotąd znana. Opisane były kraty podrozmaitości tylko dla bardzo szczególnych rozmaitości półkratowo uporządkowanych algebr. McKenzie i Romanowska [62] pokazali, że jest dokładnie 5 rozmaitości półkratowo uporządkowanych półkrat. Ghosh, Pastijn i Zhao [66, 34, 65] rozszerzyli ten wynik dowodząc, że krata wszystkich podrozmaitości rozmaitości półkratowo uporządkowanych półgrup idempotentnych jest dystrybutywna i zawiera 78 elementów. Kuřil i Polák [59] przedstawili opis kraty podrozmaitości rozmaitości wszystkich półkratowo uporządkowanych półgrup stosując tzw. *dopuszczalne operatory domknięcia* (ang. admissible closure operators). W swoim opisie oparli się na własnościach półgrup. Kearnes [53] pokazał, że z każdą rozmaitością $\mathcal{S}$ entropicznych modałów (*modów półkratowych*) można związać przemienny półpierścień, którego krata kongruencji jest dualnie izomorficzna z kratą wszystkich podrozmaitości rozmaitości $\mathcal{S}$.

Niech $F_{\mathcal{V}}(X)$ oznacza algebrę wolną w rozmaitości $\mathcal{V} \subseteq \mho$, o przeliczalnym (nieskończonym) zbiorze generatorów X. W pracy [A1] pokazaliśmy, że algebra $(\mathcal{P}_{>0}^{<\omega}F_{\mathcal{V}}(X), \Omega, \cup)$ ma własność uniwersalności w rozmaitości $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$ [A1, Theorem 3.1]. W szczególności opisaliśmy algebry wolne w rozmaitośći $\mathcal{S}_{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{S}_{\mho}$, uogólniając rezultaty z [59, 114, 96] dla półkratowo uporządkowanych półgrup oraz modałów.

Twierdzenie 2.1 (A1, Corollary 3.3). *Algebra $(\mathcal{P}_{>0}^{<\omega}F_{\mathcal{V}}(X), \Omega, \cup)$ jest wolna nad zbiorem X w rozmaitości $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\mathcal{P}_{>0}^{<\omega}F_{\mathcal{V}}(X), \Omega, \cup) \in \mathcal{S}_{\mathcal{V}}$.*

Stąd algebra $(\mathcal{P}_{>0}^{<\omega}F_{\mho}(X), \Omega, \cup)$ jest wolna nad zbiorem X w rozmaitości $\mathcal{S}_{\mho}$. Zasadniczą trudność w opisie kraty $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_{\mho}}$ podrozmaitości rozmaitości $\mathcal{S}_{\mho}$ stanowił fakt, że dla dwóch różnych podrozmaitości $\mathcal{V}, \mathcal{W} \subseteq \mho$, rozmaitości $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$ i $\mathcal{S}_{\mathcal{W}}$ mogą być równe [A1, Example 3.5]. Niech A będzie zbiorem. Aby wyselekcjonować tylko te rozmaitości $\mathcal{V} \subseteq \mho$, które wyznaczają różne podrozmaitości $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$, dla relacji $\Theta \subseteq \mathcal{P}_{>0}A \times \mathcal{P}_{>0}A$ została zdefiniowana relacja $\widetilde{\Theta} \subseteq A \times A$ (podobna relacja dla półgrup została podana w [59]):

$$(t, u) \in \widetilde{\Theta} \quad \Leftrightarrow \quad (\{t\}, \{u\}) \in \Theta.$$

Niech $\mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}(F_{\mathcal{V}}(X))$ będzie zbiorem wszystkich w pełni niezmienniczych kongruencji algebry $(F_{\mathcal{V}}(X), \Omega)$ i oznaczmy przez $\mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}_{>0}^{<\omega}F_{\mathcal{V}}(X))$ zbiór wszystkich w pełni niezmienniczych kongruencji algebry $(\mathcal{P}_{>0}^{<\omega}F_{\mathcal{V}}(X), \Omega, \cup)$. Jeżeli $\Theta \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}_{>0}^{<\omega}F_{\mathcal{V}}(X))$ to również $\widetilde{\Theta} \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}(F_{\mathcal{V}}(X))$

[A1, Lemma 3.7]. Stąd każda kongruencja $\Theta \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mathcal{V}}(X))$ określa podrozmaitość $\mho_{\widetilde{\Theta}} := \mathrm{HSP}((F_{\mho}(X)/\widetilde{\Theta}, \Omega))$ rozmaitości $\mho$. Z drugiej strony, dla każdej podrozmaitości $\mathcal{S}_{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{S}_{\mho}$, istnieje kongruencja $\Theta \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X))$ taka, że $\mathcal{S}_{\mathcal{V}} = \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}$. W [A1] pokazaliśmy, że podrozmaitości rozmaitości $\mathcal{S}_{\mho}$ są dwojakiego rodzaju. Niech

$$\mathrm{Con}^{\Re}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X)) := \{\Theta \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X)) \mid \Theta = \bigcap \Phi,\ \Phi \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X)),\ \widetilde{\Phi} = \widetilde{\Theta}\}.$$

Ponieważ dla $\Theta_1 \neq \Theta_2 \in \mathrm{Con}^{\Re}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X))$, $\mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta}_1}} \neq \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta}_2}}$ [A1, Theorem 3.14], to dla każdej kongruencji $\Theta \in \mathrm{Con}^{\Re}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X))$, podrozmaitości

$$\mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta}}} := \mathrm{HSP}((\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X)/\Theta, \Omega, \cup)),$$

stanowią tzw. *główne węzły* (ang. main knots) kraty $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_{\mho}}$ [A1, Theorem 4.1, Corollary 4.4].

Niech $\mathcal{L}^{\Re}(\mho) := \{\mho_{\widetilde{\Theta}} \subseteq \mho \mid \Theta \in \mathrm{Con}^{\Re}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X))\}$.

Twierdzenie 2.2 (A1, Corollary 4.8). *Krata* $(\{\mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta}}} \mid \Theta \in \mathrm{Con}^{\Re}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X))\}, \subseteq)$ *wszystkich głównych węzłów jest izomorficzna z kratą* $(\mathcal{L}^{\Re}(\mho), \subseteq)$. *Dla* $\mho_{\widetilde{\Theta}_1}, \mho_{\widetilde{\Theta}_2} \in \mathcal{L}^{\Re}(\mho)$*:*

$$\mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta}_1}} \vee \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta}_2}} = \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta}_1} \vee \mho_{\widetilde{\Theta}_2}} = \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta_1 \cap \Theta_2}}} \ \text{ oraz } \ \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta}_1}} \cap \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta}_2}} = \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta_1 \vee \Theta_2}}}.$$

Należy przy tym zwrócić uwagę, że rozmaitość $\mho_{\widetilde{\Theta_1 \cap \Theta_2}}$ równa jest rozmaitości $\mho_{\widetilde{\Theta}_1} \vee \mho_{\widetilde{\Theta}_2}$, ale rozmaitości $\mho_{\widetilde{\Theta_1 \vee \Theta_2}}$ i $\mho_{\widetilde{\Theta}_1} \cap \mho_{\widetilde{\Theta}_2}$ nie muszą być równe.

Z drugiej strony dla każdej podrozmaitości $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_{\mho}$, która nie jest głównym węzłem istnieje najmniejszy główny węzeł, w którym jest ona zawarta. Aby scharakteryzować podrozmaitości drugiego typu wprowadziliśmy pojęcie podrozmaitości zachowujących rozmaitość $\mathcal{V}$.

Powiemy, że nietrywialna podrozmaitość $\mathcal{K}$ rozmaitości $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$ *zachowuje* $\mathcal{V}$, jeśli $\mathcal{K} \nsubseteq \mathcal{S}_{\mathcal{W}}$ dla żadnej właściwej podrozmaitości $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$.

Dla $\Theta, \Psi \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X))$, nietrywialna podrozmaitość $\mathcal{S} = \mathrm{HSP}((\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X)/\Psi, \Omega, \cup)) \subseteq \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}$ zachowuje $\mho_{\widetilde{\Theta}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\widetilde{\Psi} = \widetilde{\Theta}$. Zatem każda podrozmaitość $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_{\mho}$ jest albo głównym węzłem $\mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}$ albo zachowuje $\mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}$, dla pewnej kongruencji $\Theta \in \mathrm{Con}^{\Re}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X))$.

Niech dla $\Theta \in \mathrm{Con}^{\Re}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X))$

$$\mathrm{Con}^{\mathrm{id}}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}(X)) := \{\psi \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}(X)) \mid \widetilde{\psi} = id_{F_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}(X)} \text{ i } (\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}(X)/\psi, \Omega) \in \mho_{\widetilde{\Theta}}\}.$$

Twierdzenie 2.3 (A1, Theorem 5.4). *Niech* $\Theta \in \mathrm{Con}^{\Re}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X))$.
$(\mathrm{Con}^{\mathrm{id}}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}(X)), \subseteq)$ *tworzy półkratę zupełną, dualnie izomorficzną z półkratą wszystkich podrozmaitości rozmaitości* $\mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}$*, które zachowują* $\mho_{\widetilde{\Theta}}$.

Stąd dowolna podrozmaitość $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_{\mho}$ może być jednoznacznie opisana przez dwie kongruencje: $\Theta \in \mathrm{Con}^{\Re}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X))$ oraz $\alpha^{\widetilde{\Theta}} \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}(X))$.

Aby podać kompletny opis kraty $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_{\mho}}$ wprowadziliśmy jeszcze dwie relacje. Niech $\Theta \in \mathrm{Con}^{\Re}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X))$, $\Psi \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X))$ i $\psi \in \mathrm{Con}^{\mathrm{id}}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}(X))$. Dla podzbiorów $Q, R \in \mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X)$, $Q^{\widetilde{\Theta}}, R^{\widetilde{\Theta}} \in \mathcal{P}^{<\omega}_{>0}(F_{\mho}(X)/\widetilde{\Theta})$ oraz $Q^{\widetilde{\Psi}}, R^{\widetilde{\Psi}} \in \mathcal{P}^{<\omega}_{>0}(F_{\mho}(X)/\widetilde{\Psi})$:

$$(Q^{\widetilde{\Psi}}, R^{\widetilde{\Psi}}) \in \delta_{\Psi} \ \Leftrightarrow\ (Q, R) \in \Psi \ \text{ oraz}$$

$$(Q, R) \in \Delta_{\psi} \ \Leftrightarrow\ (Q^{\widetilde{\Theta}}, R^{\widetilde{\Theta}}) \in \psi.$$

Niech dla $\alpha^{\widetilde{\Theta}} \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}(X))$, $\mathcal{S}^{\alpha^{\widetilde{\Theta}}}_{\mho_{\widetilde{\Theta}}} := \mathrm{HSP}((\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X)/\alpha^{\widetilde{\Theta}}, \Omega, \cup))$. Główny rezultat pracy [A1] stanowi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.4 (A1, Theorem 5.12). *Krata*

$$(\mathcal{L}(\mathcal{S}_{\mho}) = \{\mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}^{\alpha^{\widetilde{\Theta}}} \mid \Theta \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}^{\Re}(\mathcal{P}_{>0}^{<\omega} F_{\mho}(X)),\ \alpha^{\widetilde{\Theta}} \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}^{\mathrm{id}}(\mathcal{P}_{>0}^{<\omega} F_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}(X))\}, \subseteq)$$

jest kratą wszystkich podrozmaitości rozmaitości $\mathcal{S}_{\mho}$. *Dla* $\mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}^{\alpha^{\widetilde{\Theta}}}, \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Psi}}}^{\beta^{\widetilde{\Psi}}} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_{\mho})$

$$\mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}^{\alpha^{\widetilde{\Theta}}} \vee \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Psi}}}^{\beta^{\widetilde{\Psi}}} = \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta \cap \Psi}}}^{\delta_{\Delta_{\alpha^{\widetilde{\Theta}}} \cap \Delta_{\beta^{\widetilde{\Psi}}}}} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}^{\alpha^{\widetilde{\Theta}}} \cap \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Psi}}}^{\beta^{\widetilde{\Psi}}} = \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Delta_{\alpha^{\widetilde{\Theta}}} \vee \Delta_{\beta^{\widetilde{\Psi}}}}}}^{\delta_{\Delta_{\alpha^{\widetilde{\Theta}}} \vee \Delta_{\beta^{\widetilde{\Psi}}}}} = \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Upsilon}}}^{\delta_{\Delta_{\alpha^{\widetilde{\Theta}}} \vee \Delta_{\beta^{\widetilde{\Psi}}}}},$$

gdzie $\Upsilon := \bigcap\limits_{\substack{\Phi \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}_{>0}^{<\omega} F_{\mho}(X)) \\ \widetilde{\Phi} = \widetilde{\Delta_{\alpha^{\widetilde{\Theta}}} \vee \Delta_{\beta^{\widetilde{\Psi}}}}}} \Phi \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}^{\Re}(\mathcal{P}_{>0}^{<\omega} F_{\mho}(X))$.

Opis kraty $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_{\mho}}$ przedstawiony w Twierdzeniu 2.4 nie wymaga znajomości wszystkich w pełni niezmienniczych kongruencji algebry $(\mathcal{P}_{>0}^{<\omega} F_{\mho}(X), \Omega, \cup)$. Z drugiej strony, znając zbiór $\mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}_{>0}^{<\omega} F_{\mho}(X))$ opis ten można istotnie uprościć. Każda podrozmaitość $\mathcal{S}$ równa jest rozmaitości $\mathrm{HSP}((\mathcal{P}_{>0}^{<\omega} \mathrm{F}_{\mho}(\mathrm{X})/\Psi, \Omega, \cup))$, dla pewnej kongruencji $\Psi \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}_{>0}^{<\omega} F_{\mho}(X))$. Niech $\Theta \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}^{\Re}(\mathcal{P}_{>0}^{<\omega} F_{\mho}(X))$ będzie taka, że $\widetilde{\Psi} = \widetilde{\Theta}$. Wtedy kongruencję $\alpha^{\widetilde{\Theta}}$ można zastąpić przez kongruencję $\delta^{\Psi} \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}^{\mathrm{id}}(\mathcal{P}_{>0}^{<\omega} F_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}(X))$ i wówczas $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Theta}}}^{\alpha^{\widetilde{\Theta}}} = \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Psi}}}^{\delta_{\Psi}}$. Stąd dla $\Psi, \Phi \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}_{>0}^{<\omega} F_{\mho}(X))$ i $\mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Psi}}}^{\delta_{\Psi}}, \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Phi}}}^{\delta_{\Phi}} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_{\mho})$:

$$\mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Psi}}}^{\delta_{\Psi}} \vee \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Phi}}}^{\delta_{\Phi}} = \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Psi \cap \Phi}}}^{\delta_{\Psi \cap \Phi}} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Psi}}}^{\delta_{\Psi}} \cap \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Phi}}}^{\delta_{\Phi}} = \mathcal{S}_{\mho_{\widetilde{\Psi \vee \Phi}}}^{\delta_{\Psi \vee \Phi}}. \tag{6}$$

Dla dowolnej rozmaitości $\mathcal{V} \subseteq \mho$, w oparciu o (6), podany jest algorytm [A1, Rozdział 6] znajdowania kraty $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_{\mathcal{V}}}$, jeśli znana jest krata $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$. W szczególności, postępując zgodnie z tym algorytmem uzyskamy opis kraty podrozmaitości rozmaitości modałów dowolnego typu. Jak bardzo złożona może to być krata pokazują wyniki z prac [82, 83, 86].

Algorytm pozwala także skutecznie wskazać te podrozmaitości $\mathcal{V} \subseteq \mho$, które wyznaczają główne węzły w kracie $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_{\mho}}$. A mianowicie, jeżeli zbiór

$$\mathrm{Con}_{\mathcal{V}} := \{\psi \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}_{>0}^{<\omega} F_{\mathcal{V}}(X)) \mid \widetilde{\psi} = id_{F_{\mathcal{V}}(X)} \text{ oraz } (\mathcal{P}_{>0}^{<\omega} F_{\mathcal{V}}(X)/\psi, \Omega) \in \mathcal{V}\}$$

nie jest pusty, to $\mathcal{S}_{\mathcal{V}} \neq \mathcal{S}_{\mathcal{W}}$, dla żadnej właściwej podrozmaitości $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. Stąd, jeśli $\mathcal{V}$ jest zdefiniowana tylko przez równości liniowe to $id_{\mathcal{P}_{>0}^{<\omega} F_{\mathcal{V}}(X)} \in \mathrm{Con}_{\mathcal{V}}$ i $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$ jest głównym węzłem w kracie $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_{\mho}}$.

Niech $\mathcal{M}$ będzie rozmaitością algebr idempotentnych i entropicznych typu $\tau\colon \Omega \to \mathbb{N}$ i niech $(A, \Omega) \in \mathcal{M}$. Zdefiniujmy relację $\alpha \subseteq \mathcal{P}_{>0}A \times \mathcal{P}_{>0}A$:

$$X \,\alpha\, Y \quad \Leftrightarrow \quad \langle X \rangle = \langle Y \rangle,$$

gdzie $\langle X \rangle$ jest podalgebrą (A, Ω) generowaną przez zbiór X. Ponieważ $\widetilde{\alpha} = id_A$, to na mocy [A2, Theorem 2.5], $\alpha \in \mathrm{Con}_{\mathcal{M}}$ i $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ jest głównym węzłem w kracie $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_{\mho}}$. Podobnie będzie dla każdej liniowej podrozmaitości $\mathcal{M}$. Kongruencję α wykorzystamy jeszcze w następnym podrozdziale.

B. Algebry podalgebr

Można teraz postawić pytanie o dokładniejszą np. równościową charakteryzację głównych węzłów w kracie $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_{\mho}}$. Z Twierdzenia 2.1 wynika, że do takiej charakteryzacji niezbędna będzie aksjomatyzacja algebr podzbiorów i pewnych ich algebr ilorazowych.

Dla dowolnej rozmaitości $\mathcal{V} \subseteq \mho$, Grätzer i Lakser [42] scharakteryzowali równości w rozmaitości:

$$\mathcal{V}\Sigma := \mathrm{HSP}(\{(\mathcal{P}_{>0}A, \Omega) \mid (A, \Omega) \in \mathcal{V}\}).$$

Analogiczną charakteryzację dla półgrup podał Almeida [5, Rozdział 11]. Oczywiście, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}\Sigma$.

Twierdzenie 2.5 (Grätzer-Lakser)**.** *Niech $\mathcal{V} \subseteq \mho$. Rozmaitość $\mathcal{V}\Sigma$ spełnia dokładnie te równości, które są konsekwencjami równości liniowych prawdziwych w $\mathcal{V}$.*

Wniosek 2.6. [42] *Niech $\mathcal{V} \subseteq \mho$. $\mathcal{V}\Sigma = \mathcal{V}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{V}$ jest zdefiniowana przez równości liniowe.*

Rozmaitość $\mathcal{V}\Sigma_{<\omega} := \mathrm{HSP}(\{(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0}A, \Omega) \mid (A, \Omega) \in \mathcal{V}\})$ generowana przez algebry potęgowe podzbiorów skończonych jest podrozmaitością $\mathcal{V}\Sigma$. Z analizy dowodu Twierdzenia 2.5 wynika, że obie rozmaitości są równe, tzn. $\mathcal{V}\Sigma_{<\omega} = \mathcal{V}\Sigma$ oraz, że algebra $(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0}F_{\mathcal{V}}(X), \Omega, \cup)$ spełnia dokładnie te równości, które są konsekwencjami równości liniowych prawdziwych w $\mathcal{V}$. To implikuje, że algebra $(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0}F_{\mathcal{V}}(X), \Omega, \cup)$ jest wolna w rozmaitości $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{V}$ jest zdefiniowana przez równości liniowe [86].

W przypadku, gdy $\mathcal{V}$ jest zdefiniowana również przez równości nieliniowe, główny węzeł w kracie $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_{\mho}}$ będzie wyznaczony przez pewien obraz homomorficzny algebry $(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0}F_{\mathcal{V}}(X), \Omega, \cup)$. Na przykład, dla dowolnej algebry (A, Ω), algebra $(\mathcal{P}_{>0}A, \Omega)$ jest idempotentna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy (niepusty) podzbiór A jest podalgebrą (A, Ω) [86] (algebry spełniające taki warunek nazywane są *konserwatywnymi*). To sugeruje, że w przypadku rozmaitości idempotentnych, istotną rolę odgrywać będą algebry podalgebr.

Niech dla algebry (A, Ω), AS będzie zbiorem wszystkich jej (niepustych) podalgebr. Ogólnie, zbiór AS nie musi być zamknięty na operacje kompleksowe. Ale jeśli tak jest, tzn. dla dowolnej n-argumentowej operacji $f \in \Omega$ i dla $A_1, \ldots, A_n \in AS$, $f(A_1, \ldots, A_n) \in AS$, to (AS, Ω) jest podalgebrą $(\mathcal{P}_{>0}A, \Omega)$ i algebrę (AS, Ω) nazywamy *algebrą podalgebr* algebry (A, Ω). Mówimy wtedy, że algebra (A, Ω) ma *własność domknięcia na podalgebry.* Algebra (AP, Ω) wszystkich skończenie generowanych podalgebr (A, Ω) jest podalgebrą (AS, Ω). Na przykład, niech I^0 oznacza otwarty przedział jednostkowy w $\mathbb{R}$. Wtedy $(\mathbb{R}S, \{\underline{p} \mid p \in I^0\})$ jest algebrą podzbiorów wypukłych przestrzeni $\mathbb{R}$.

Romanowska i Smith pokazali, że algebry podalgebr istnieją dla wszystkich algebr entropicznych. Stąd każda algebra entropiczna ma własność domknięcia na podalgebry. Udowodnili również, że jeżeli algebra (A, Ω) jest idempotentna to algebra (AS, Ω) (jeśli istnieje) też jest idempotentna i (A, Ω) można zanurzyć w jej algebrę podalgebr. Zatem, jeśli (A, Ω) jest algebrą modową, to (AS, Ω) również jest algebrą modową spełniającą wszystkie równości liniowe prawdziwe w (A, Ω). Taka własność "samo-powielania" jest jedną z ważniejszych konsekwencji połączenia idempotentności i entropiczności w algebrach modowych. Co więcej, jeżeli (A, Ω) jest algebrą modową to $(AS, +)$ jest (górną) półkratą z operacją $A_1 + A_2 := \langle A_1 \cup A_2 \rangle$ określoną dla $A_1, A_2 \in AS$. Ponieważ obie struktury, modową i półkratową, łączy prawo rozdzielności (5), algebra $(AS, \Omega, +)$ jest modałem. Algebra $(AP, \Omega, +)$ jest jej podalgebrą. Algebry modowe podmodów i ogólnie, modały, były szczegółowo badane w monografii [94] a także m.in. w [105, 106, 93, 96, 97, 80, 79, 70, 71].

Algebra $(AS, \Omega, +)$ jest izomorficzna z algebrą ilorazową $(\mathcal{P}_{>0}A/\alpha, \Omega, \cup)$ oraz $(AP, \Omega, +) \cong (\mathcal{P}^{<\omega}_{>0}A/\alpha, \Omega, \cup)$ [A2, Theorem 3.3, Corollary 3.4].

Romanowska i Smith pokazali [94], że dla każdej podrozmaitości $\mathcal{V}$ modów zdefiniowanej przez równości liniowe, algebrą wolną w $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$ jest $(F_{\mathcal{V}}(X)P, \Omega, +)$. Uzasadnione jest zatem pytanie, postawione w [90, Problem 9.6] (a wcześniej w [70]), o równości spełnione przez algebry podalgebr. Ogólnie, nie ma uniwersalnej techniki, aby określić jakie nieliniowe równości będą spełnione w takich algebrach.

Niech $\mathcal{V} \subseteq \mho$ będzie rozmaitością, w której każda algebra ma własność domknięcia na podalgebry i niech

$$\mathcal{VS} := \mathrm{HSP}(\{(AS, \Omega) \mid (A, \Omega) \in \mathcal{V}\}).$$

Oczywiści $\mathcal{VS}$ jest podrozmaitością $\mathcal{V}\Sigma$ i spełnia wszystkie równości liniowe prawdziwe w $\mathcal{V}$. Rozmaitość $\mathcal{VP} := \mathrm{HSP}(\{(AP, \Omega) \mid (A, \Omega) \in \mathcal{V}\})$ jest jej podrozmaitością. Charakteryzacja rozmaitości $\mathcal{VS}$, podobna do przedstawionej przez Grätzera i Laksera w Twierdzeniu 2.5 dla rozmaitości $\mathcal{V}\Sigma$, nie jest znana. Dla rozmaitości $\mathcal{V}$ algebr idempotentnych otrzymujemy:

$$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{VS} \subseteq \mathcal{IV} \subseteq \mathcal{V}\Sigma,$$

gdzie $\mathcal{IV}$ oznacza idempotentną podrozmaitość $\mathcal{V}\Sigma$. Warto w tym miejscu podkreślić, że inkluzja $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{VS}$ nie musi zachodzić ogólnie. Na przykład dla rozmaitości $\mathcal{A}$ grup abelowych, $\mathcal{AS}$ jest rozmaitością półkrat. Z drugiej strony, jeśli rozmaitość $\mathcal{V}$ jest zdefiniowana tylko przez równości liniowe, to $\mathcal{VS} \subseteq \mathcal{V}$. Zatem, jeżeli idempotentna rozmaitość zdefiniowana jest przez równości liniowe to $\mathcal{VS} = \mathcal{V}$. To sugeruje pytanie, czy dla rozmaitości idempotentnych liniowość będzie warunkiem koniecznym, aby rozmaitości $\mathcal{VS}$ i $\mathcal{V}$ pokrywały się. Następująca hipoteza (której inspiracja pochodzi z [70]), została postawiona w [A2]:

Hipoteza 2.7 (A2, Conjecture 1.3)**.** *Idempotentna rozmaitość $\mathcal{V}$ taka, że każda algebry $(A, \Omega) \in \mathcal{V}$ ma własność domknięcia na podalgebry, pokrywa się z rozmaitością $\mathcal{VS}$ wtedy i tylko wtedy, gdy baza równościowa rozmaitości $\mathcal{V}$ składa się z równości idempotentnych i liniowych.*

Hipoteza nie jest prawdziwa bez założenia idempotentności. W [A3, Example 5.10] pokazaliśmy, że istnieje nieidempotentna rozmaitość $\mathcal{V}$ entropicznych grupoidów $(G, \cdot)$ zdefiniowana przez równości nieliniowe $(x \cdot x) \cdot y \approx x \cdot y$ oraz $y \cdot (x \cdot x) \approx y \cdot x$, dla której $\mathcal{V} = \mathcal{VS}$.

Częściowe rozwiązanie długo otwartego problemu [90, Problem 9.5] stanowi najważniejszy wynik pracy [A2]. Niech $\mathcal{M} \subseteq \mho$ będzie rozmaitością wszystkich modów typu $\tau\colon \Omega \to \mathbb{N}$.

Twierdzenie 2.8 (A2, Main Theorem)**.** *Niech $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$ będzie podrozmaitością modów i niech $\mathcal{V}\Sigma$ będzie lokalnie skończona. Rozmaitość $\mathcal{VS}$ spełnia dokładnie te równości, które są konsekwencjami równości idempotentnych i liniowych prawdziwych w $\mathcal{V}$.*

Jako bezpośredni wniosek z Twierdzenia 2.8 otrzymujemy potwierdzenie Hipotezy 2.7, a tym samym pozytywną odpowiedź na [90, Problem 9.5], w przypadku rozmaitości $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$ modów, dla której rozmaitość $\mathcal{V}\Sigma$ jest lokalnie skończona.

Wniosek 2.9 (A2, Corollary 3.16)**.** *Niech $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$ i niech $\mathcal{V}\Sigma$ będzie lokalnie skończona. Wtedy $\mathcal{V} = \mathcal{VS}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{V}$ zdefiniowana jest dokładnie przez równości idempotentne i liniowe.*

Twierdzenie 2.8 dowodzimy (w sposób całkowicie odmienny od tego, który zaprezentowali Grätzer i Lakser w [42]) pokazując, że każda algebra ilorazowa algebry z lokalnie skończonej rozmaitości $\mathcal{V}\Sigma$, która należy do $\mathcal{IV}$, należy także do podrozmaitości $\mathcal{VS}$. W tym celu, dla algebry (A, Ω), definiujemy relację $\rho \subseteq \mathcal{P}_{>0}A \times \mathcal{P}_{>0}A$:

$$X \,\rho\, Y \quad \Leftrightarrow \quad \text{istnieją } k\text{-argumentowy term } t \text{ i } m\text{-argumentowy term } s \text{ takie, że}$$
$$X \subseteq t(Y, Y, \ldots, Y) \quad \text{i} \quad Y \subseteq s(X, X, \ldots, X).$$

W przypadku, gdy (A, Ω) jest algebrą modową, ρ jest *$\mathcal{I}$-repliką* algebry $(\mathcal{P}_{>0}A, \Omega, \cup)$, to znaczy, jest najmniejszą kongruencją w zbiorze wszystkich kongruencji γ algebry $(\mathcal{P}_{>0}A, \Omega, \cup)$, takich że algebra ilorazowa $(\mathcal{P}_{>0}A/\gamma, \Omega, \cup)$ jest idempotentna. Ponadto, kongruencje ρ i α pokrywają się, gdy ograniczymy je tylko do podalgebry $(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0}A, \Omega, \cup)$.

Założenie o lokalnej skończoności rozmaitości $\mathcal{V}\Sigma$ jest istotne, aby w serii lematów [A2, Lemma 3.6, 3.7, 3.8, 3.10] pokazać, że rozmaitość $\rho\mathcal{V}\Sigma^{\cup}_{<\omega} := \mathrm{HSP}(\{(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0}A/\rho, \Omega, \cup) \mid (A, \Omega) \in \mathcal{V}\})$ równa jest idempotentnej podrozmaitości $\mathcal{IV}\Sigma^{\cup}_{<\omega}$ rozmaitości $\mathcal{V}\Sigma^{\cup}_{<\omega} := \mathrm{HSP}(\{(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0}A, \Omega, \cup) \mid (A, \Omega) \in \mathcal{V}\})$. A to już implikuje, że $\mathcal{VS} = \mathcal{VP} = \mathrm{HSP}(\{(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0}A/\rho, \Omega) \mid (A, \Omega) \in \mathcal{V}\})$ [A2, Theorem 3.12 i 3.14].

Algebry idempotentne i entropiczne (algebry modowe) były intensywnie badane od późnych lat 30-tych ubiegłego stulecia i nadal pozostają w kręgu zainteresowania badaczy. Dzieje się tak, gdyż algebry modowe obecne są m.in. w geometrii afinicznej, programowaniu liniowym, kombinatoryce, teorii agregacji, teorii zbiorów wypukłych, geometrii różniczkowej, teorii węzłów oraz w wielu problemach CSP. Znajdują też liczne zastosowania w informatyce, fizyce, biologii, ekonomii, czy też w wielokryteriowych metodach podejmowania decyzji. Algebry modowe w systematycznym ujęciu zostały przedstawione w dwóch monografiach Romanowskiej i Smitha [94, 99]. Jednymi z najważniejszych przykładów modów są idempotentne redukty i podredukty (podalgebry reduktów) modułów nad przemiennymi pierścieniami R z jednością. Pełny idempotentny redukt R-modułu jest równoważny przestrzeni afinicznej nad pierścieniem R i dlatego nazywany jest *R-przestrzenią afiniczną* lub bardziej ogólnie, przestrzenią afiniczną.

C. Własność uogólnionej entropiczności

Niech (A, Ω) i (B, Ω) będą algebrami podobnymi i niech $\mathrm{Map}(A, B)$ będzie zbiorem wszystkich przekształceń $\varphi\colon A \to B$. Dla n-argumentowej operacji $f \in \Omega$ i funkcji $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{Map}(A, B)$ odwzorowanie

$$f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\colon A \to B; \qquad f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(a) := f(\varphi_1(a), \ldots, \varphi_n(a))$$

nazywamy *indukowanym przez f*. Zbiór $\mathrm{Map}(A, B)$ wraz z operacjami indukowanymi przez operacje z Ω tworzy algebrę $(\mathrm{Map}(A, B), \Omega)$ typu $\tau\colon \Omega \to \mathbb{N}$.

Powiemy, że algebra (A, Ω) ma *własność domknięcia na endomorfizmy* (ang. the endomorphism closure property), jeśli dla każdej n-argumentowej operacji $f \in \Omega$ i endomorfizmów $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{End}(A)$ algebry (A, Ω), indukowane przez f przekształcenie $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ jest również endomorfizmem tej algebry. Innymi słowy, $(\mathrm{End}(A), \Omega)$ jest podalgebrą $(\mathrm{Map}(A, B), \Omega)$. Evans [27, 28] i Klukovits [55] podali następującą charakteryzację rozmaitości algebr entropicznych.

Twierdzenie 2.10 (Evans, Klukovits). *Rozmaitość $\mathcal{V}$ jest entropiczna wtedy i tylko wtedy, gdy każda algebra w $\mathcal{V}$ ma własność domknięcia na endomorfizmy.*

Dla rozmaitości $\mathcal{V}$, rozmaitość $\mathcal{VS}$ jest określona tylko pod warunkiem, że każda algebra $(A, \Omega) \in \mathcal{V}$ ma własność domknięcia na podalgebry. Oczywiście warunku tego nie spełniają wszystkie rozmaitości. Przykładem jest rozmaitość generowana przez grupę S_3. Jak już wspomnieliśmy, warunkiem wystarczającym na to, aby istniała rozmaitości $\mathcal{VS}$ jest np. założenie, żeby rozmaitość $\mathcal{V}$ była entropiczna. Nie jest to jednak warunek konieczny.

Niech $\mathcal{V}$ będzie rozmaitością grupoidów. Evans [27] pokazał, że każdy grupoid $(A, \cdot) \in \mathcal{V}$ ma własność domknięcia na podalgebry wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją binarne termy t_1 i t_2 takie, że równość

$$(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) \approx t_1(a, c) \cdot t_2(b, d) \tag{7}$$

jest spełniona w $\mathcal{V}$. W pracy [A3] uogólniliśmy wynik Evansa na przypadek rozmaitości algebr dowolnego typu otrzymując rezultat analogiczny do charakteryzacji Evansa i Klukovitsa.

Twierdzenie 2.11 (A3, Proposition 2.2)**.** *Rozmaitość $\mathcal{V}$ spełnia warunek uogólnionej entropiczności wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{V}$ ma własność domknięcia na podalgebry.*

Fakt, że uogólniona entropiczność gwarantuje istnienie rozmaitości $\mathcal{VS}$ znany był już wcześniej [70]. Dowód implikacji w drugą stronę opiera się na własnościach algebr wolnych w $\mathcal{V}$.

Uogólniony warunek entropiczności jest szczególnym przypadkiem rektangularnej uogólnionej bisymetrii (ang. the rectangular generalized bisymmetry), która odgrywa istotną rolę w agregacji zgodnej oraz w modelach mikroekonomicznych [1].

Warto zwrócić uwagę, że samo istnienie algebry endomorfizmów $(\mathrm{End}(A), \Omega)$ nie implikuje, że algebra (A, Ω) jest entropiczna [26]. Podobnie, dla pojedynczej algebry (A, Ω) istnienie algebry (AS, Ω) nie gwarantuje, że (A, Ω) ma własność uogólnionej entropiczności [A3, Example 2.3].

Podobną odpowiedniość, ale w węższym sensie, uzyskali Bošnjak i Madarász [14], pokazując, że rozmaitość $\mathcal{V}$ algebr (A, Ω) ma *własność domknięcia na retrakcje* (idempotentne endomorfizmy) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej n-argumentowej operacji $f \in \Omega$ spełnia równość *diagonalną*:

$$f(f(a_{11}, \ldots, a_{n1}), \ldots, f(a_{1n}, \ldots, a_{nn})) \approx f(a_{11}, \ldots, a_{nn}). \tag{8}$$

Bošnjak i Madarász również badali klasy algebr posiadających własność domknięcia na podalgebry [13]. W oparciu o nasze rezultaty pokazali, że klasa algebr skończonych ustalonego typu, która ma własność domknięcia na podalgebry nie jest zamknięta na skończone produkty proste oraz nie jest globalnie zdeterminowana.

Podobnie jak zbiór podalgebr algebry modowej (A, Ω), również zbiór $\mathrm{Hom}(A, B)$ homomorfizmów z algebry modowej (A, Ω) w algebrę modową (B, Ω) ma strukturę algebry typu $\tau\colon \Omega \to \mathbb{N}$, tzn. dla dowolnej operacji $f \in \Omega$ oraz homomorfizmów $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{Hom}(A, B)$, odwzorowanie indukowane $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ należy do $\mathrm{Hom}(A, B)$. Algebra $(\mathrm{Hom}(A, B), \Omega)$ jest tzw. *modem homomorfizmów.* Adaricheva, Romanowska i Smith [3] pokazali, że dla modów spełniających równość diagonalą (8), algebra homomorfizmów modów jest podalgebrą algebry $((A \times B)S, \Omega)$.

Hipoteza 2.7 pozostaje nierozstrzygnięta w przypadku rozmaitości idempotentnych, ale nieentropicznych. Nie jest znany żaden przykład idempotentnej i nieentropicznej rozmaitości $\mathcal{V}$, dla której $\mathcal{VS} = \mathcal{V}$. Rozmaitości $\mathcal{V}$ generowane przez algebry przedstawione w [A3, Example 3.1] mają własność domknięcia na podalgebry, ale $\mathcal{V} \neq \mathcal{VS}$.

Hipotezy 2.7 nie można też wzmocnić w tym sensie, że istnieje idempotentny grupoid $(G, \cdot)$, posiadający algebrę podalgebr (mimo, że nie spełnia warunku (3)), dla którego $\mathrm{HSP}((GS, \cdot)) =$

HSP$((G,\cdot))$, ale HSP$((G,\cdot))$ nie jest zdeterminowana przez równości liniowe i idempotentne [A3, Rozdział 6].

Pozostaje więc pytanie o równości spełnione w rozmaitości $\mathcal{VS}$, w przypadku dowolnej idempotentnej rozmaitości $\mathcal{V}$ spełniającej warunek (3). Aby na nie (przynajmniej częściowo) odpowiedzieć wprowadziliśmy dla pary termów pojęcie tzw. półliniowego prekursora.

Równość $t^* \approx \widetilde{s}$ nazywamy *półliniowym prekursorem* uporządkowanej pary termów (t,s), jeżeli istnieją termy $r_{ij}(a_{i1},\dots,a_{ik_i})$, takie, że

$$\tilde{s} = s^*(r_{11}(\overline{a_1}),\dots,r_{1l_1}(\overline{a_1}),\dots,r_{n1}(\overline{a_n}),\dots,r_{nl_n}(\overline{a_n})),$$

gdzie $\overline{a_i} = (a_{i1},\dots,a_{ik_i})$, s^* jest liniowym termem, z którego otrzymujemy term s oraz t^* jest liniowym termem, z którego otrzymujemy term t.

Twierdzenie 2.12 (A3, Theorem 5.3)**.** *Niech $\mathcal{V}$ będzie rozmaitością spełniającą warunek* (3)*. Wtedy $\mathcal{VS}$ spełnia równość $t \approx s$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją półliniowe prekursory par (t,s) oraz (s,t), oba prawdziwe w $\mathcal{V}$.*

Mimo, że Twierdzenie 2.12 nie rozwiązuje problemu w sposób konstruktywny, to jest bardzo wygodnym narzędziem do sprawdzania, które z równości prawdziwych w rozmaitości $\mathcal{V}$ nie będą spełnione w $\mathcal{VS}$.

3. Entropiczność i uogólniona entropiczność w algebrach z operacją łączną

Każda półgrupa przemienna jest entropiczna. Ta obserwacja jest również prawdziwa w ogólniejszym przypadku. Klasyczną definicję prawa łączności operacji binarnej można rozszerzyć na operację o dowolnej liczbie argumentów w następujący sposób. Niech $1 < n \in \mathbb{N}$. Powiemy, że operacja $f\colon A^n \to A$ jest *łączna*, jeśli dla dowolnych $a_1,\dots,a_{2n-1} \in A$

$$\begin{aligned}
&f(f(a_1,\dots,a_n),a_{n+1},\dots,a_{2n-1})\\
&= \dots = f(a_1,\dots,a_r,f(a_{r+1},\dots,a_{r+n}),a_{r+n+1},\dots,a_{2n-1})\\
&= \dots = f(a_1,\dots,a_{n-1},f(a_n,\dots,a_{2n-1})).
\end{aligned}$$

Algebrę (A,f) z jedną n-argumentową operacją łączną f nazywamy *n-półgrupą.* Przykładem takich algebr są n-półgrupy Aczéla [16].

Dla $1 \le i < j \le n$, operacja $f\colon A^n \to A$ jest *(i,j)-przemienna*, jeśli dla $a_1,\dots,a_n \in A$

$$f(a_1,\dots,a_i,\dots,a_j,\dots,a_n) = f(a_1,\dots,a_{i-1},a_j,a_{i+1},\dots,a_{j-1},a_i,a_{j+1},\dots,a_n).$$

$(1,n)$-przemienną operację nazywamy *półprzemienną.* Operacja f jest *przemienna* (*totalnie symetryczna*), jeśli dla każdej permutacji $\sigma \in S_n$, $f(a_1,\dots,a_n) = f(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(n)})$.

Dörnte [21] udowodnił, że

Twierdzenie 3.1 (Dörnte)**.** *Każda n-półgrupa półprzemienna jest entropiczna.*

Stąd w szczególności, entropiczne są n-półgrupy, w których n-argumentowa operacja jest słabo prawie-zgodna (ang. weak near-unanimity) [A5, Proposition 5.1, Corollary 5.2]. Ale oczywiście nie każda półgrupa entropiczna musi być przemienna (np. półgrupy prawo lub lewo-zerowe). Natomiast każdy entropiczny monoid jest przemienny. W oparciu o Twierdzenie Eckmanna-Hiltona możemy scharakteryzować wszystkie entropiczne grupoidy z elementem neutralnym.

Twierdzenie 3.2 (Eckmann-Hilton)**.** *Niech $f, g\colon A^2 \to A$ będą entropicznymi operacjami binarnymi ze wspólnym elementem neutralnym. Wtedy $f = g$ oraz f jest przemienna i łączna.*

Zatem grupoid z elementem neutralnym jest entropiczny wtedy i tylko wtedy, gdy jest przemiennym monoidem. Co więcej, jak pokazał Evans [27], lupa (grupa) jest entropiczna wtedy i tylko wtedy, gdy jest grupą abelową. W pracy [A4] pokazaliśmy, że Twierdzenie Eckmanna-Hiltona jest prawdziwe także dla operacji o większej niż dwa liczbie arumentów. W tym celu wprowadziliśmy pojęcie ciągu neutralnego. Powiemy, że ciąg $(e_1, \dots, e_{n-1}) \in A^{n-1}$ jest *neutralny* dla operacji $f\colon A^n \to A$, jeśli dla każdego $a \in A$ i dowolnej permutacji $\sigma \in S_{n-1}$

$$\begin{aligned} f(a, e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n-1)}) = \dots = f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(r)}, a, e_{\sigma(r+1)}, \dots, e_{\sigma(n-1)}) \\ = \dots = f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n-1)}, a) = a. \end{aligned}$$

Ciąg jest neutralny dla algebry (A, Ω), jeśli jest neutralny dla każdej operacji $f \in \Omega$. Element $e \in A$ nazywamy *neutralnym* dla operacji $f\colon A^n \to A$, gdy ciąg $(e, \dots, e)$ jest neutralny dla f. *Uogólnionym n-monoidem* (*n-monoidem*) nazywamy n-półgrupę z ciągiem neutralnym (z elementem neutralnym). Z kolei n-półgrupę (A, f) nazywamy *n-grupą*, jeśli dla każdego $i \leq n$ oraz $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, c \in A$ istnieje jednoznacznie wyznaczony $b \in A$ taki, że $f(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n) = c$. (Zgodnie z tą definicją, monoid jest 2-monoidem zaś grupa jest 2-grupą.)

Twierdzenie 3.3 (A4, Theorem 2.5)**.** *Niech $f, g\colon A^n \to A$ będą n-argumentowymi operacjami entropicznymi ze wspólnym ciągiem neutralnym. Wtedy $f = g$ oraz f jest łączna i przemienna* (*totalnie symetryczna*)*.*

Dowód Twierdzenia 3.3 przebiega dwuetapowo. Wykorzystując własności kwadratów łacińskich najpierw pokazujemy, że operacje są równe i totalnie symetryczne a następnie dowodzimy, że są łączne.

Głazek i Gleichgewicht pokazali [37], że n-grupy są entropiczne wtedy i tylko wtedy, gdy są półprzemienne. Na mocy Twierdzenia 3.3 oraz 3.1 otrzymujemy analogiczny wynik dla (uogólnionych) n-monoidów: (uogólniony) n-monoid jest entropiczny wtedy i tylko wtedy, gdy jest półprzemienny [A4, Theorem 4.3].

Związek entropiczności w (uogólnionych) n-monoidach z przemiennością nie jest przypadkowy. Wykorzystując własność n-argumentowych operacji łącznych opisaną przez Couceirę i Marichala [16] pokazaliśmy, że prawdziwe jest następujące twierdzenie, będące głównym wynikiem pracy [A4].

Twierdzenie 3.4 (A4, Theorem 2.8)**.** *Każda algebra (A, Ω) z elementem neutralnym jest entropiczna wtedy i tylko wtedy, gdy jest reduktem pewnego przemiennego monoidu.*

Entropiczność implikuje przemienność nie tylko w przypadku algebr z elementem neutralnym. *Półgrupą z inwersją* (ang. inverse semigroup) nazywamy algebrę $(A, \cdot, ^{-1})$ typu $(2, 1)$ taką, że $(A, \cdot)$ jest półgrupą oraz dla każdego $a, b \in A$:

- $aa^{-1}a = a$,
- $(a^{-1})^{-1} = a$,
- $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$,
- $aa^{-1}a^{-1}a = a^{-1}aaa^{-1}$.

Twierdzenie 3.5 (A4, Theorem 3.4)**.** *Półgrupa z inwersją $(A, \cdot, ^{-1})$ jest entropiczna wtedy i tylko wtedy, gdy $(A, \cdot)$ jest przemienna.*

Oprócz n-grup i (uogólnionych) n-monoidów przykładem algebr, dla których Twierdzenie Dörnte'a można odwrócić są n-półgrupy Mal'ceva. Niech $n \geq 3$. n-półgrupę (A, f) nazywamy *n-półgrupą Mal'ceva*, jeśli dla $a, b \in A$,

$$f(a, b, \ldots, b) = a \quad \text{oraz} \quad f(b, \ldots, b, a) = a.$$

Twierdzenie 3.6 (A5, Theorem 3.5)**.** *n-półgrupa Mal'ceva jest entropiczna wtedy i tylko wtedy, gdy jest półprzemienna.*

Ogólnie, własność entropiczności i uogólnionej entropiczności nie są równoważne, nawet dla algebr unarnych [A3, Example 4.1 i 4.3]. Ale przy pewnych dodatkowych założeniach mogą być. Jest tak na przykład dla algebr z elementem neutralnym.

Twierdzenie 3.7 (A3, Proposition 4.5)**.** *Niech (A, Ω) będzie algebrą z elementem neutralnym. Wtedy (A, Ω) ma własność uogólnionej entropiczności wtedy i tylko wtedy, gdy jest entropiczna.*

W szczególności, Twierdzenie 3.7 implikuje, że własność uogólnionej entropiczności jest równoważna entropiczności (a w konsekwencji przemienności) w n-grupach i w n-monoidach.

Jednak posiadanie elementu neutralnego nie jest warunkiem koniecznym takiej równoważności. Na przykład przemienny grupoid posiadający własność uogólnionej entropiczności, przy założeniu, że jeden z termów t_1 lub t_2 w (7) jest liniowy, jest entropiczny [A3, Proposition 4.8].

Własność uogólnionej entropiczności jest równoważna entropiczności także w różnych klasach algebr z operacją łączną. Wykorzystując charakteryzację rozmaitości Clifforda półgrup z inwersją przez 5-cio elementową półgrupę Brandta pokazaliśmy, że

Twierdzenie 3.8 (A4, Theorem 3.4)**.** *Półgrupa z inwersją spełnia warunek uogólnionej entropiczności wtedy i tylko wtedy, gdy jest entropiczna.*

Z klasyfikacji rozmaitości idempotentnych półgrup wynika, że warunek uogólnionej entropiczności i entropiczności są równoważne dla półgrup idempotentnych (bezpośredni dowód tego faktu został przedstawiony w [A3, Proposition 3.11]). W [A5] rezultat ten rozszerzyliśmy na dowolną półgrupę n-cykliczną. Grupoid $(A, \cdot)$ nazywamy *n-cyklicznym*, jeśli dla każdego $x \in A$ spełniony jest warunek $x^n = x$.

Twierdzenie 3.9 (A5, Theorem 6.8)**.** *Półgrupa n-cykliczna ma własność uogólnionej entropiczności wtedy i tylko wtedy, gdy jest entropiczna.*

W dowodzie Twierdzenia 3.9 skorzystaliśmy z faktu, że w pełni regularne półgrupy (ang. completely regular semigroups), których elementy idempotentne tworzą entropiczną podpółgrupę są bandami normalnymi grup [67, Theorem 4.1, Corollary 4.3].

Z drugiej strony, interesujący i bardzo istotny Przykład 3.10 pokazuje, że oba rozważane warunki nie są równoważne dla dowolnych n-półgrup.

Przykład 3.10 (A5, Proposition 2.3)**.** Niech $n \geq 2$. Oznaczmy przez $[n]$ zbiór $\{1, \ldots, n\}$. Niech $\varepsilon_n \colon [n] \times [n] \to [n] \times [n]$ będzie funkcją taką, że $(i, j) \mapsto (j, i)$. Permutację σ zbioru $[n] \times [n]$ nazwiemy *transpozycją przetasowaną* (ang. shuffle-transposition), jeśli dla każdej pary $(i, j) \in [n] \times [n]$, istnieje $k \in [n]$ takie, że $\sigma((i, j)) = (k, i)$.

Odwzorowanie $\beta \colon [n] \times [n] \to [n^2]$, $(i, j) \mapsto (i-1)n+j$, jest bijekcją. Będziemy identyfikować permutację σ zbioru $[n] \times [n]$ z permutacją $\beta \circ \sigma \circ \beta^{-1}$ zbioru $[n^2]$. W szczególności, powiemy, że permutacja σ zbioru $[n^2]$ jest transpozycją przetasowaną, jeśli $\beta^{-1} \circ \sigma \circ \beta$ jest transpozycją przetasowaną.

Niech $[n^2]^*$ będzie wolnym monoidem nad alfabetem $[n^2]$. Dla $w \in [n^2]^*$, oznaczmy przez $|w|$ długość słowa w. Niech $W = \{w \in [n^2]^* : 1 \leq |w| < n^2\}$ oraz $A = W \cup \{\top, \bot\}$. Niech ponadto $\sigma\colon [n] \times [n] \to [n] \times [n]$ będzie taka, że $\sigma((i,j)) := ((i+j) \bmod n, i)$. Permutacja σ jest transpozycją przetasowaną na zbiorze $[n^2]$, ale co jest tutaj kluczowe, nie generuje transpozycji ε_n. Dowód tego faktu [A5, Lemma 2.2] opiera się na spostrzeżeniu, że dla każdej liczby naturalnej $k \geq 1$,

$$\sigma^k((i,j)) = ((F_{k+1}i + F_k j) \bmod n, (F_k i + F_{k-1} j) \bmod n),$$

gdzie F_k są liczbami Fibonacciego.

Na zbiorze A definiujmy operację $f\colon A^n \to A$ następująco:

$$f(w_1, \ldots, w_n) := \begin{cases} w_1 \cdots w_n, & \text{jeśli } w_1, \ldots, w_n \in W \text{ i } |w_1 \cdots w_n| < n^2, \\ \top, & \text{jeśli } w_1, \ldots, w_n \in W,\ |w_1 \cdots w_n| = n^2 \text{ i} \\ & w_1 \cdots w_n = \sigma^p(1) \cdots \sigma^p(n^2) \text{ dla pewnego } p \in \mathbb{N}, \\ \bot, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Algebra (A, f) jest nieentropiczną n-półgrupą mającą własność uogólnionej entropiczności.

Półgrupa skonstruowana w Przykładzie 3.10 nie jest idempotentna, ale jak już wcześniej zauważyliśmy, równoważność obu warunków zachodzi dla band. To nasuwa dość naturalne pytanie, w jakiej korelacji będzie entropiczność i uogólniona entropiczność w algebrach idempotentnych.

Przykład [A3, Example 3.1.] pokazuje, że istnieją idempotentne i nieentropiczne algebry, które mają własność uogólnionej entropiczności. Ponieważ algebry w tym przykładzie mają zawsze co najmniej dwie, co najmniej binarne operacje podstawowe, w [A3] została postawiona następująca hipoteza:

Hipoteza 3.11 (A3, Conjecture 3.2). *Każda idempotentna algebra (A, f) z jedną podstawową n-argumentową operacją, dla $n \geq 2$, posiadająca własność uogólnionej entropiczności jest entropiczna.*

Problem pozostaje otwarty, nawet dla grupoidów, niemniej Hipoteza 3.11 została potwierdzona przy pewnych dodatkowych założeniach. I tak np. idempotentny, lewo (prawo) skracalny grupoid spełniający (7) jest entropiczny [A3, Proposition 3.13] oraz idempotentna algebra (A, f) z n-argumentową operacją totalnie symetryczną, która spełnia (3) jest entropiczna (dla $n = 2$ [A3, Proposition 3.12]; dla $n > 2$ [24, 25]).

Dla n-półgrup idempotentnych (A, f) udało się potwierdzić Hipotezę 3.11 w przypadku, gdy (A, f) jest reduktem pewnej półgrupy lub, gdy jest skracalna, co stanowi główny rezultat pracy [A5]. Niech $n \geq 3$.

Twierdzenie 3.12 (A5, Theorem 6.2). *Niech dla $n \geq 3$, idempotentna n-półgrupa (A, f) będzie reduktem n-cyklicznej półgrupy $(A, \cdot)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

1. *(A, f) jest entropiczna,*
2. *(A, f) ma własność uogólnionej entropiczności,*
3. *$(A, \cdot)$ jest entropiczna,*
4. *$(A, \cdot)$ ma własność uogólnionej entropiczności.*

Twierdzenie 3.13 (A5, Proposition 3.4). *Idempotentna skracalna n-półgrupa ma własność uogólnionej entropiczności wtedy i tylko wtedy, gdy jest entropiczna.*

Co ciekawe, idempotentne n-półgrupy są skracalne wtedy i tylko wtedy, gdy są n-półgrupami Mal'ceva [A5, Proposition 3.3].

Idempotentne n-półgrupy były ostatnio badane w [6] w kontekście problemu *absorpcji* algebry przez jej podalgebrę - pojęcia znajdującego zastosowanie w zagadnieniach związanych z problemami CSP [7]. Warto też wspomnieć, że w teorii agregacji prawo entropiczności operacji n-argumentowych z łączną operacją binarną znane jest pod nazwą *uogólnionych równań Cauchy'ego* [39, Section 2.5.2].

4. Reduktywność i quandle medialne

W przypadku rozmaitości $\mathcal{V}$ algebr modowych, Twierdzenie 2.8 zostało udowodnione przy założeniu lokalnej skończoności rozmaitości $\mathcal{V}\Sigma$. Jak wynika z przykładu [A2, Example 3.9] założenie jest istotne, aby udowodnić, że idempotentna replika algebry wolnej (o n generatorach) w rozmaitości $\mathcal{V}\Sigma^{\cup}_{<\omega}$ należy do rozmaitości $\rho\mathcal{V}\Sigma^{\cup}_{<\omega}$ [A2, Lemma 3.10]. Z drugiej strony, inny przykład pokazuje, że Twierdzenie 2.8 może być prawdziwe także dla rozmaitości $\mathcal{V}$ grupoidów modowych, dla których $\mathcal{V}\Sigma$ nie jest lokalnie skończona.

Powiemy, że grupoid $(B, \cdot)$ jest (prawo) *m-reduktywny*, jeśli spełnia równość:

$$(((x\underbrace{y)y)\ldots)y}_{m-\text{razy}} \approx y. \tag{9}$$

Grupoid $(B, \cdot)$ jest *reduktywny*, jeśli jest m-reduktywny dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Jeżeli $(B, \cdot)$ jest idempotentna i entropiczna, równość (9) jest równoważna równości liniowej [79]:

$$(((xz_1)z_2)\ldots)z_m \approx (((yz_1)z_2)\ldots)z_m. \tag{10}$$

Zatem, jeśli $(B, \cdot)$ jest m-reduktywnym grupoidem modowym, to algebra podalgebr $(BS, \cdot)$ jest również m-reduktywna.

2-reduktywne grupoidy modowe znane są pod nazwą *grupoidów różniczkowych* lub *LIR-grupoidów* i były badane m.in. w [91, 92, 98]. Romanowska i Roszkowska [91] opisały kratę podrozmaitości rozmaitości grupoidów różniczkowych, a Kravchenko [57] pokazał, że krata quasirozmaitości takich grupoidów jest znacznie bardziej złożona.

Przykład 4.1 (A2, Example 3.17)**.** Niech $\mathcal{D}$ będzie rozmaitością grupoidów różniczkowych i niech $xy^i := (\ldots((x\underbrace{y)y)\ldots)y}_{i-razy}$. Każda nietrywialna podrozmaitość $\mathcal{D}_{i,i+j}$ rozmaitości $\mathcal{D}$ jest zdefiniowana przez jedną dodatkową równość:

$$xy^i \approx xy^{i+j}, \tag{11}$$

dla pewnych $i, j \in \mathbb{N}$, $j > 0$ [91]. Jak pokazano w [79], $\mathcal{D}_{i,i+j}\mathcal{S} = \mathcal{D}_{i,i+j}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{D}_{i,i+j} = \mathcal{D}_{1,0} = \mathcal{LZ}$, gdzie $\mathcal{LZ}$ jest rozmaitością półgrup lewo-zerowych. W każdym innym przypadku, $\mathcal{D}_{i,i+j}\mathcal{S} = \mathcal{D}$. Ale rozmaitość $\mathcal{D}\Sigma$ nie jest lokalnie skończona, ponieważ zawiera jako podrozmaitość rozmaitość $\mathcal{D}$, która nie jest lokalnie skończona.

Binarne mody reduktywne, w szczególności grupoidy różniczkowe, mają bardzo wiele intrygujących własności oraz są źródłem wielu ciekawych przykładów i kontrprzykładów w teorii algebr modowych, o czym piszemy więcej w dalszej części autoreferatu.

Grupoid $(B, \cdot)$ nazywamy (lewo) *n-symetrycznym*, jeśli spełnia równość:

$$\underbrace{x(x(\dots(x}_{n-\text{razy}}\, y))) \approx y.$$

Grupoid $(B, \cdot)$ jest *symetryczny*, jeśli jest n-symetryczny dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

Płonka [88, 89] badał symetryczne grupoidy różniczkowe w kontekście algebr, które dla każdego $n \in \mathbb{N}$, mają dokładnie n operacji pochodnych zależnych od wszystkich n zmiennych. (Lewo) m-reduktywne i (prawo) n-symetryczne grupoidy modowe odgrywają istotną rolę w klasyfikacji skończonych algebr modowych. Powiemy, że algebra (A, Ω) jest *abelowa* (w sensie Freese'a - McKenziego), jeśli jest diagonalnie normalna tzn. przekątna $\{(a, a) \mid a \in A\}$ jest klasą kongruencji produktu $(A, \Omega) \times (A, \Omega)$, lub równoważnie, (A, Ω) spełnia pewne quasirówności zwane *warunkiem termowym* (ang. term condition). Kearnes [52] zaobserwował, że idempotentne grupoidy abelowe są entropiczne. Pokazał także, że każdy skończony idempotentny abelowy grupoid $(G, \cdot)$ daje się przedstawić w postaci produktu $(A, \cdot) \times (L, \cdot) \times (R, \cdot)$, gdzie $(A, \cdot)$ jest równoważna pewnej przestrzeni afinicznej, natomiast $(L, \cdot)$ oraz $(R, *)$, gdzie $x * y = y \cdot x$, należą do rozmaitości $\mathcal{D}_{m,n}$ lewo m-reduktywnych i prawo n-symetrycznych grupoidów modowych. Rozmaitość $\mathcal{D}_{m,n}$ oraz rozmaitość $\mathcal{V}_{s,t}$ lewo s-symetrycznych i prawo t-symetrycznych modów binarnych są niezależne [79], tzn. $\mathcal{D}_{m,n} \vee \mathcal{V}_{s,t} = \mathcal{D}_{m,n} \times \mathcal{V}_{s,t}$.

Lewo n-symetryczne grupoidy $(Q, \cdot)$ są lewymi quasigrupami (tzn. dla każdego $x, y \in Q$, równanie $x \cdot u = y$ ma jednoznaczne rozwiązane $u \in Q$). Z drugiej strony każda skończona lewa quasigrupa jest n-symetryczna dla pewnego n. Stąd w przypadku grupoidów skończonych, klasa lewo symetrycznych modów reduktywnych pokrywa się z klasą reduktywnych lewych quasigrup modowych. Lewe quasigrupy modowe można równoważnie zdefiniować jako algebry modowe $(Q, \cdot, \backslash)$ z dwiema binarnymi operacjami, które spełniają równości: $x \cdot (x \backslash y) \approx y \approx x \backslash (x \cdot y)$.

Zauważmy jeszcze, że bezpośrednio z Twierdzenia 2.12 otrzymujemy, że dla rozmaitości $\mathcal{V}$ grupoidów modowych, rozmaitość $\mathcal{VS}$ jest n-symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{V} = \mathcal{LZ}$. Podobnie, dla rozmaitości $\mathcal{LQ}$ lewych quasigrup modowych $(Q, \cdot, \backslash)$ rozmaitość $\mathcal{LQS}$ nie jest rozmaitością lewych quasigrup.

Lewe quasigrupy modowe to tzw. *quandle medialne* (entropiczne). Grupoid $(Q, \cdot)$ nazywamy *quandlem*, jeśli jest idempotentną, lewo-rozdzielną (dla każdego $a \in Q$ lewe translacje $L_a \colon Q \to Q$; $q \mapsto a \cdot q$, są homomorfizmami), lewą quasigrupą. Bardzo ważnym przykładem quandli medialnych są *quandle afiniczne* $(A, *) = \mathrm{Aff}(A, f)$ (zwane również *quandlami Aleksandra*), gdzie dla grupy abelowej $(A, +)$ i jej automorfizmu f, operację binarną definiujemy jako $x * y = (1 - f)(x) + f(y)$ (1 oznacza automorfizm identycznościowy).

Quandle medialne badali wcześniej Joyce [51] oraz Romanowska i Smith [99, Rozdział 8.6]. Z ich prac wynika, że quandel $(Q, \cdot)$ jest medialny wtedy i tylko wtedy, gdy podgrupa grupy lewych przesunięć generowana przez wszystkie złożenia $L_a L_b^{-1}$, dla $a, b \in Q$, jest przemienna. Ale dla quandli medialnych można podać znacznie bardziej konstruktywny opis wykorzystując do tego algebry pochodne, w tym przypadku odpowiednie sumy.

W pracy [A6] pokazaliśmy, że w przypadku quandli medialnych $(Q, \cdot)$, na każdej orbicie tranzytywnego działania grupy lewych przesunięć na zbiorze Q, można zdefiniować strukturę grupy przemiennej i każda orbita (jako podquandel) jest quandlem afinicznym. Ten fakt pozwala w elegancki sposób określić binarną operację na rozłącznej sumie orbit, co stanowi najważniejszy wynik [Theorem 3.14] tej pracy. Co najistotniejsze, taką konstrukcję można przeprowadzić w jednoznaczny sposób. Inspiracją była dla nas praca Roszkowskiej-Lech [101], która badała quandle inwolutarne (2-symetryczne), ale jej rezultaty są bardzo silnie związane z postacią normalną słów w takich algebrach. Mimo, że wcześniej znane były różne twierdzenia dotyczące rozkładu quandli na orbity (najnowsze w [23, 64]), to żadne z nich nie wprowadzało dodatkowej struktury na orbitach ani nie pozwalało rozstrzygnąć, czy dwa quandle są izomorficzne. Jedyne pełne twierdzenie o rozkładzie na orbity było podane przez Pierce'a [68] dla quandli inwolutarnych.

Zasadniczym elementem naszej konstrukcji są wprowadzone przez nas tzw. sieci afiniczne.

Siecią afiniczną (ang. affine mesh) nad niepustym zbiorem I nazywamy trójkę

$$\mathcal{A} = ((A_i)_{i\in I},\ (\varphi_{i,j})_{i,j\in I},\ (c_{i,j})_{i,j\in I}) = (A_i; \varphi_{i,j}; c_{i,j}),$$

gdzie $(A_i, +)$ są grupami abelowymi, $\varphi_{i,j} : A_i \to A_j$ homomorfizmami tych grup, oraz $c_{i,j} \in A_j$ stałymi, spełniającymi dla dowolnych $i, j, j', k \in I$ następujące warunki:

(M1) $1 - \varphi_{i,i}$ jest automorfizmem grupy $(A_i, +)$;
(M2) $c_{i,i} = 0$;
(M3) $\varphi_{j,k}\varphi_{i,j} = \varphi_{j',k}\varphi_{i,j'}$;
(M4) $\varphi_{j,k}(c_{i,j}) = \varphi_{k,k}(c_{i,k} - c_{j,k})$.

Sumą sieci afinicznej (ang. sum of an affine mesh) $\mathcal{A} = (A_i; \varphi_{i,j}; c_{i,j})$ nad zbiorem I jest binarna algebra zdefiniowana na rozłącznej sumie zbiorów A_i, wraz z operacją określoną dla $a \in A_i$ i $b \in A_j$ następująco:

$$a * b = c_{i,j} + \varphi_{i,j}(a) + (1 - \varphi_{j,j})(b).$$

Sieć afiniczną $\mathcal{A} = (A_i; \varphi_{i,j}; c_{i,j})$ nad zbiorem I nazywamy *nierozkładalną* (ang. indecomposable), jeśli każda grupa $(A_j, +)$ jest generowana przez wszystkie elementy $c_{i,j}$ oraz $\varphi_{i,j}(a)$, dla $i \in I$ oraz $a \in A_i$.

Twierdzenie 4.2 (A6, Theorem 3.14). *Grupoid $(Q, \cdot)$ jest quandlem medialnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą nierozkładalnej sieci afinicznej. Orbity quandla $(Q, \cdot)$ pokrywają się z grupami abelowymi sieci.*

Wprowadzenie sieci nierozkładalnych gwarantuje jednoznaczność konstrukcji a wraz z Twierdzeniem 4.2 pozwala sformułować twierdzenie o izomorficznych quandlach medialnych.

Dwie sieci afiniczne $\mathcal{A} = (A_i; \varphi_{i,j}; c_{i,j})$ i $\mathcal{A}' = (A'_i; \varphi'_{i,j}; c'_{i,j})$, nad tym samym zbiorem indeksów I, nazywamy *pokrewnymi* (ang. homologous), jeśli istnieje permutacja π zbioru I, izomorfizmy grup $\psi_i : A_i \to A'_{\pi i}$, oraz stałe $d_i \in A'_{\pi i}$, takie, że dla każdego $i, j \in I$,

(H1) $\psi_j\varphi_{i,j} = \varphi'_{\pi i,\pi j}\psi_i$,
(H2) $\psi_j(c_{i,j}) = c'_{\pi i,\pi j} + \varphi'_{\pi i,\pi j}(d_i) - \varphi'_{\pi j,\pi j}(d_j)$.

Twierdzenie 4.3 (A6, Theorem 4.2). *Niech $\mathcal{A} = (A_i; \varphi_{i,j}; c_{i,j})$ i $\mathcal{A}' = (A'_i; \varphi'_{i,j}; c'_{i,j})$ będą dwiema nierozkładalnymi sieciami afinicznymi nad tym samym zbiorem indeksów I. Wtedy sumy sieci $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ są izomorficznymi quandlami wtedy i tylko wtedy, gdy sieci $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ są pokrewne.*

Twierdzenie 4.2 umożliwia bardzo praktyczną charakteryzację medialnych quandli reduktywnych.

Twierdzenie 4.4 (A6, Proposition 6.2). *Niech $\mathcal{A} = (A_i;\ \varphi_{i,j};\ c_{i,j})$ będzie nierozkładalną siecią afiniczną nad zbiorem I. Wtedy suma sieci $\mathcal{A}$ jest m-reduktywna wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi_{i,i}^{m-1} = 0$, dla każdego $i \in I$.*

W szczególności, quandle z jednoelementowymi orbitami są zawsze 2-reduktywne.

W ciągu ostatniej dekady pojawiło się bardzo dużo prac dotyczących quandli. Między innymi w kręgu zainteresowania znalazła się klasyfikacja quandli skończonych. Hou [45] opisał quandle afiniczne rozmiaru p, p^2, p^3 i p^4, gdy p jest liczbą pierwszą. Vendramin [113] zastosował reprezentację Galkina [31] do określenia liczby quandli spójnych (posiadających tylko jedną orbitę) do rozmiaru 35. W pracy [A6] poprawiliśmy dotychczasowe rezultaty i podaliśmy liczbę nieizomorficznych quandli medialnych do 13 elementów (a nawet więcej w kilku wybranych przypadkach). Zastosowane algorytmy zliczające opracowaliśmy w oparciu o przedstawione powyżej wyniki. Wykorzystaliśmy również lemat Burnside'a o liczbie orbit.

Nasze obliczenia pokazują, że zaskakująco mało (skończonych) quandli medialnych nie jest 2-reduktywnych, a prawie wszystkie są reduktywne [A6, Table 1, 2, 3]. Blackburn [9] podał asymptotyczne ograniczenie na liczbę nieizomorficznych quandli rzędu n. Między innymi pokazał, że ograniczenie górne wynosi 2^{cn^2}, gdzie $c \approx 1.5566$. Dla quandli medialnych łatwo ten wynik poprawić, uzyskując górne ograniczenie równe $2^{\frac{1}{2}n^2}$. Stosując naszą teorię można podać jeszcze lepszy wynik w przypadku medialnych quandli 2-reduktywnych.

Wniosek 4.5 (A6, Corollary 8.2). *Liczba nieizomorficznych 2-reduktywnych quandli medialnych rzędu n równa jest co najwyżej $2^{\frac{1}{4}n^2}$.*

Sądzimy, że ograniczenie górne na liczbę quandli medialnych nie jest jeszcze optymalne. Wyniki obliczeniowe sugerują następującą hipotezę:

Hipoteza 4.6 (A6, Conjecture 8.3). *Liczba nieizomorficznych quandli medialnych rzędu n jest równa co najwyżej $2^{\frac{1}{4}n^2}$.*

Dodajmy jeszcze, że quandle odgrywają istotną rolę w topologii. W teorii węzłów bada się algebraiczne niezmienniki klas równoważności węzłów. Istnieje wiele takich niezmienników, ale z reguły nie są one łatwo obliczalne. W 1982 Joyce [47] pokazał, że tzw. *quandel węzła* jest algebrą w naturalny sposób związaną z węzłem i jest silnym niezmiennikiem. Quandle znalazły zastosowanie nie tylko w naukach matematycznych (geometria różniczkowa, teoria grafów), ale także w chemii oraz inżynierii genetycznej.

Przedstawiona w Twierdzeniu 4.2 konstrukcja jest bardzo skutecznym narzędziem badania quandli medialnych i daje dobre podstawy do dalszych prac. W nieopublikowanych jeszcze materiałach wykorzystujemy ją m.in. do opisania podprosto-nierozkładalnych quandli medialnych oraz quandli abelowych. W szczególności pokazaliśmy, że każdy skończony podprosto nierozkładalny quandel medialny jest albo spójny (i wtedy afiniczny) albo reduktywny. Również w oparciu o tę konstrukcję udowodniliśmy, że wszystkie quandle abelowe są quasi-afiniczne (tzn. są podreduktami modułów), co daje kolejny przykład potwierdzający hipotezę, że wszystkie abelowe algebry modowe zanurzają się w moduły.

Efektem naszych intensywnych badań quandli medialnych są dwie prace w ostatnim czasie wysłane do publikacji:

[**E1**] P. Jedlička, A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *Subdirectly irreducible medial quandles*, 2015, (http://arxiv.org/abs/1511.06529).

[**E2**] P. Jedlička, A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *Free medial quandles*, 2015, (http://arxiv.org/abs/1512.06275).

A także jedna praca w przygotowaniu:

[**E3**] P. Jedlička, A. Pilitowska, D. Stanovský, A. Zamojska-Dzienio, *Subquandles of affine quandles*, 2016.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych

Prace opublikowane po doktoracie, które nie weszły do zasadniczej części rozprawy habilitacyjnej:

[**B1**] A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *Closure operators on algebras*, 2015, International Journal of Algebra and Computation 25, No. 6, 1055–1074. (w spisie literatury pozycja [86])

[**B2**] A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *On some congruences of power algebras*, 2012, Central European Journal of Mathematics 10(3), 987–1003. (w spisie literatury pozycja [83])

[**B3**] A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *Representation of modals*, 2011, Demonstratio Mathematica 44(3), 535–556. (w spisie literatury pozycja [82])

[**B4**] A. Pilitowska, A. Romanowska, *Embedding modes into semimodules, Part III*, 2011, Demonstratio Mathematica 44(4), 791-800. (w spisie literatury pozycja [78])

[**B5**] A. Pilitowska, A. Romanowska, *Embedding modes into semimodules, Part II*, 2011, Demonstratio Mathematica 44(4), 781-790. (w spisie literatury pozycja [77])

[**B6**] A. Pilitowska, A. Romanowska, *Embedding modes into semimodules, Part I*, 2011, Demonstratio Mathematica 44(3), 523-534. (w spisie literatury pozycja [76])

[**B7**] A. Pilitowska, *Linear identities in graph algebras*, 2009, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 50(1), 11–24. (w spisie literatury pozycja [74])

[**B8**] A. Pilitowska, A. Romanowska, D. Stanovský, *Varieties of differential modes embeddable into semimodules*, 2009, International Journal of Algebra and Computation 19, No. 5, 669–680. (w spisie literatury pozycja [81])

[**B9**] A. Kravchenko, A. Pilitowska, A. Romanowska, D. Stanovský, *Differential modes*, 2008, International Journal of Algebra and Computation 18, No. 3, 567–588. (w spisie literatury pozycja [58])

[**B10**] A. Pilitowska, *Interval bilattices and some other simple bilattices*, 2002, Relational Methods in Computer Science (H.C.M. de Swart, ed.), Lecture Notes in Computer Science 2561, 190-196. (w spisie literatury pozycja [73])

[**B11**] A. Pilitowska, *The lattice of subvarieties of the variety of some ternary modes*, 2001, Contributions to General Algebra 13, 265-273. [częściowo związana z wynikami z rozprawy doktorskiej] (w spisie literatury pozycja [72])

[**B12**] A. Pilitowska, A. Romanowska, *Reductive modes*, 1998, Periodica Math. Hungarica 36(1), 67-78. (w spisie literatury pozycja [75])

Publikacje wchodzące w skład rozprawy doktorskiej:

- **[C1]** A. Pilitowska, *Enrichments of affine spaces and algebras of subalgebras*, 1999, Discussiones Math., Algebra and Stochastic Methods 19, 207-225. (w spisie literatury pozycja [71])
- **[C2]** A. Pilitowska, *Identities for classes of algebras closed under the complex structures*, 1998, Discussiones Math., Algebra and Stochastic Methods 18, 85-109. (w spisie literatury pozycja [70])
- **[C3]** A. Pilitowska, A. Romanowska, B. Roszkowska-Lech, *Products of mode varieties and algebras of subalgebras*, 1996, Mathematica Slovaca 46(5), 497-514. (w spisie literatury pozycja [79])
- **[C4]** A. Pilitowska, A. Romanowska, J.D.H. Smith, *Affine spaces and algebras of subalgebras*, 1995, Algebra Universalis 34, 527-540. (w spisie literatury pozycja [80])

Prace opublikowane przed doktoratem, które nie wchodziły w skład rozprawy doktorskiej:

- **[D1]** A. Pilitowska, *Free P-bilattices*, 1991, Demonstration Mathematica 24, (1-2), 121–127. (w spisie literatury pozycja [69])
- **[D2]** A. Romanowska, A. Trakul, *On the structure of some bilattices*, 1989, Universal and Applied Algebra (K. Hałkowska, B. Stawski, eds.), World Scientific, 235-253. (w spisie literatury pozycja [100])

Prace, które nie wchodzą w skład rozprawy habilitacyjnej zasadniczo dotyczą następującej tematyki:

- Kongruencji w rozszerzonych algebrach potęgowych.
- Problemu zanurzania modów w półmoduły nad przemiennymi półpierścieniami.
- Charakteryzacji algebr reduktywnych.
- Konstrukcji bikrat.
- Struktury algebr podalgebr przestrzeni afinicznych.

Wyniki uzyskane w pracach [B1]-[B3] stanowią uzupełnienie opisu kraty podrozmaitości rozmaitości algebr uporządkowanych półkratowo podanej w [A1], w szczególności rozmaitości modałów (półkratowo uporządkowanych algebr modowych). Jak już zauważyliśmy, algebry potęgowe modów są entropiczne, ale bardzo rzadko idempotentne. W pracy [A2] zdefiniowane były dwie kongruencje, α oraz ρ, rozszerzonych algebr potęgowych modów, tzw. *kongruencje idempotentne*, dla których algebra ilorazowa jest idempotentna. W pracy [B2] opisujemy więcej takich kongruencji. Między innymi prezentujemy rodzinę kongruencji idempotentnych wyznaczonych przez tzw. Γ-sinki.

Niech (M,Ω) będzie algebrą idempotentną i entropiczną i niech $\Gamma \subseteq \Omega$. Podalgebra (S,Ω) algebry (M,Ω) jest Γ-*sinkiem*, jeżeli dla każdej n-argumentowej operacji $\nu \in \Gamma$ oraz $i = 1,\dots,n$, $\nu(M,\dots,\underbrace{S}_{i},\dots,M) \subseteq S$ (Ω-sink jest sinkiem wg definicji podanej w [94]). Niech $\langle X\rangle_\Gamma$ będzie Γ-sinkiem generowanym przez podzbiór $X \subseteq M$ ($\langle\varnothing\rangle_\Gamma := \varnothing$). Zbiór wszystkich niepustych Γ-sinków tworzy półkratę $(S_\Gamma(M),+)$ z operacją $S_1 + S_2 := \langle S_1 \cup S_2\rangle_\Gamma$. Dla każdego podzbioru

$\Gamma \subseteq \Omega$, relacja $\alpha_\Gamma \subseteq \mathcal{P}_{>0}M \times \mathcal{P}_{>0}M$:

$$X\alpha_\Gamma Y \quad \Leftrightarrow \quad \langle X\rangle_\Gamma = \langle Y\rangle_\Gamma$$

jest idempotentną kongruencją algebry $(\mathcal{P}_{>0}M, \Omega, \cup)$. Algebra ilorazowa $(\mathcal{P}_{>0}M/\alpha_\Gamma, \Omega, \cup)$ jest izomorficzna z modałem $(S_\Gamma(M), \Omega, +)$. Zbiór uporządkowany $(\{\alpha_\Gamma \mid \Gamma \subseteq \Omega\}, \subseteq)$ jest ograniczoną półkratą górną, w której $\sup(\alpha_{\Gamma_1}, \alpha_{\Gamma_2}) = \alpha_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$. Co więcej, dla algebry wolnej $(F_\mathcal{V}(X), \Omega)$ w rozmaitości $\mathcal{V}$ modów, relacja α_Γ jest w pełni niezmienniczą kongruencją algebry $(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_\mathcal{V}(X), \Omega, \cup)$. Zatem dla rozmaitości $\mathcal{M}$ wszystkich Ω-modów, każda algebra $(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_\mathcal{M}(X)/\alpha_\Gamma, \Omega, \cup)$ określa nietrywialną podrozmaitość w rozmaitości modałów. Żadna z tych rozmaitości nie jest rozmaitością modów półkratowych (entropicznych modałów).

Niech $\mathcal{P}M$ oznacza zbiór wszystkich podzbiorów zbioru M. Odwzorowanie

$$\mathcal{C}_\Gamma \colon \mathcal{P}M \to \mathcal{P}M, \quad X \mapsto \langle X\rangle_\Gamma$$

jest algebraicznym operatorem domknięcia na zbiorze M spełniającym warunki:

(O1) $\mathcal{C}_\Gamma(\varnothing) = \varnothing$,

(O2) $\omega(\mathcal{C}_\Gamma(T_1), \ldots, \mathcal{C}_\Gamma(T_n)) \subseteq \mathcal{C}_\Gamma(\omega(T_1, \ldots, T_n))$, dla $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{P}^{<\omega}_{>0} M$,

(O3) $\varphi(\{r\}) \subseteq \mathcal{C}_\Gamma(\varphi(T))$, dla każdego endomorfizmu φ algebry $(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} M, \Omega, \cup)$, $T \in \mathcal{P}^{<\omega}_{>0} M$ i $r \in \mathcal{C}_\Gamma(T)$.

Fuchs [30] określił operatory domknięcia na monoidzie, które spełniają warunek (O2) mianem *dopuszczalnych* (ang. admissible) i zastosował je do badania związków Galois w teorii języka. W pracy [B1] pokazujemy zależności, jakie zachodzą między operatorami domknięcia określonymi na dowolnej algebrze (A, Ω) a kongruencjami rozszerzonej algebry podzbiorów $(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} A, \Omega, \cup)$. Ogólnie, dla dowolnej relacji kongruencji Θ algebry $(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} A, \Omega, \cup)$,

$$\mathcal{C}_\Theta \colon \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A; \;\; \mathcal{C}_\Theta(T)\colon = \{a \in A \mid \exists (U \in \mathcal{P}^{<\omega}_{>0} T) \;\; U \cup \{a\} \;\Theta\; U\}$$

jest algebraicznym operatorem domknięcia spełniającym warunki (O1)-(O2). Jeżeli dodatkowo kongruencja Θ jest w pełni niezmiennicza, to operator $\mathcal{C}_\Theta$ spełnia także warunek (O3). Z drugiej strony, jeżeli $\mathcal{C} \colon \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ jest operatorem domknięcia na A spełniającym warunki (O1)-(O2), to relacja $\Upsilon_\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}^{<\omega}_{>0} A \times \mathcal{P}^{<\omega}_{>0} A$:

$$(Q, R) \in \Upsilon_\mathcal{C} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{C}(Q) = \mathcal{C}(R)$$

jest kongruencją algebry $(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} A, \Omega, \cup)$. Jeżeli $\mathcal{C}$ spełnia również warunek (O3), to relacja $\Upsilon_\mathcal{C}$ jest kongruencją w pełni niezmienniczą.

Niech $\mho$ będzie rozmaitością wszystkich Ω-algebr, $\mathcal{V} \subseteq \mho$ oraz $(F_\mathcal{V}(X), \Omega)$ będzie algebrą wolną (na zbiorze X) w rozmaitości $\mathcal{V}$. Wtedy krata wszystkich podrozmaitości rozmaitości $\mathrm{HSP}((\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_\mathcal{V}(X), \Omega, \cup))$ jest izomorficzna z kratą $(\mathrm{Clo}_{\mathrm{fi}}(F_\mathcal{V}(X)), \leq)$ wszystkich algebraicznych operatorów domknięcia na $(F_\mathcal{V}(X), \Omega)$ spełniających warunki (O1)-(O3), gdzie dla $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathrm{Clo}_{\mathrm{fi}}(F_\mathcal{V}(X))$, $\mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow \Upsilon_{\mathcal{C}_2} \subseteq \Upsilon_{\mathcal{C}_1}$. Ponadto, dla dowolnej kongruencji $\Theta \in \mathrm{Con}_{\mathrm{fi}}(\mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_\mho(X))$, półkrata zupełna wszystkich podrozmaitości rozmaitości $\mathcal{S}_{\mho_{\tilde{\Theta}}}$, które zachowują $\mho_{\tilde{\Theta}}$, jest izomorficzna z półkratą $(\mathrm{Clo}^{\mathbf{0}}_{\mathrm{fi}}(F_{\mho_{\tilde{\Theta}}}(X)), \leq)$ wszystkich algebraicznych operatorów domknięcia $\mathcal{C}$ na algebrze $(F_{\mho_{\tilde{\Theta}}}(X), \Omega)$, które spełniają warunki (O1)-(O3) oraz

(O4) $\mathcal{C}(\{t\}) = \mathcal{C}(\{u\}) \;\;\Leftrightarrow\;\; t = u$,

(O5) jeżeli $s/\widetilde{\Theta} \in \mathcal{C}(Q^{\widetilde{\Theta}})$ to $s(P_1^{\widetilde{\Theta}}, \ldots, P_n^{\widetilde{\Theta}}) \subseteq \mathcal{C}(\{q(P_1^{\widetilde{\Theta}}, \ldots, P_n^{\widetilde{\Theta}}) \mid q \in Q\})$,
dla $\{s\}, Q, P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X)$ (dla $A \in \mathcal{P}^{<\omega}_{>0} F_{\mho}(X)$, $A^{\widetilde{\Theta}} = \{a/\widetilde{\Theta} \mid a \in A\}$).

Kuřil i Polák [59] opisali element największy w półkracie $(\mathrm{Clo}^{\mathbf{0}}_{\mathrm{fi}}(F_{\mathcal{V}}(X), \leq)$ w przypadku, gdy $\mathcal{V}$ jest rozmaitością n-cyklicznych półgrup. W pracy [B1] rozszerzyliśmy ich rezultat i opisaliśmy element największy w półkracie $(\mathrm{Clo}^{\mathbf{0}}_{\mathrm{fi}}(F_{\mathcal{V}}(X), \leq)$, w przypadku gdy $\mathcal{V}$ jest rozmaitością n-półgrup idempotentnych. Tym samym otrzymaliśmy opis kraty podrozmaitości rozmaitości półkratowo uporządkowanych n-półgrup idempotentnych.

Niech $(M, \Omega, +)$ będzie modałem i niech $(\langle X\rangle_\Omega, \Omega)$ będzie podalgebrą (M, Ω) generowaną przez zbiór $X \subseteq M$. W pracy [B3], dla rozmaitości $\mathcal{V}$ algebr modowych, opisujemy klasę $\mathcal{MV}$ wszystkich modałów $(M, \Omega, +)$, dla których istnieje niepusty zbiór generatorów $X \subseteq M$ taki, że $(\langle X\rangle_\Omega, \Omega) \in \mathcal{V}$. Klasa $\mathcal{MV}$ jest zamknięta na obrazy homomorficzne i skończone podproste produkty, ale nie tworzy rozmaitości. Stąd $\mathcal{MV}$ jest przykładem tzw. *formacji algebr* [104]. Pokazaliśmy, że każda algebra w klasie $\mathcal{MV}$ jest obrazem homomorficznym algebry skończenie generowanych (niepustych) podalgebr pewnej algebry wolnej w $\mathcal{V}$. Natomiast każdy modał $(M, \Omega, +)$ generowany przez X jest obrazem homomorficznym modału $(\langle X\rangle_\Omega P, \Omega, +)$. Została również podana charakteryzacja algebr wolnych w quasirozmaitości Ω-podreduktów modałów z ustalonej rozmaitości.

Możliwość zanurzenia algebry w inną algebrę, o bogatszej strukturze, dostarcza ważnych narzędzi do jej badania. Stąd pytania o istnienie takich zanurzeń są jednymi z klasycznych problemów algebry uniwersalnej. Słynne twierdzenie Mal'ceva o zanurzaniu półgrup w grupy, było w pewnym sensie inspiracją rozwoju algebry uniwersalnej. Jeżeli bogatsza struktura, w którą zanurzamy, jest (pół)modułem, to takie zanurzenie pozwala reprezentować operacje algebry jako kombinacje liniowe, dając tzw. liniową reprezentację. Ježek i Kepka [48] pokazali, że każdy grupoid entropiczny z surjektywnymi operacjami bazowymi zanurza się jako podredukt w półmoduł nad przemiennym półpierścieniem. W szczególności, każdy grupoid entropiczny i idempotentny zanurza się w taki półmoduł. Nie jest to już prawdą dla algebr modowych z operacjami o większej niż dwa ilości argumentów. Stronkowski [108, 109] pokazał, że algebra modowa zanurza się, jako podredukt, w półmoduł nad przemiennym półpierścieniem wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia tzw. równości Szendrei. Pokazał również, że istnieją wolne algebry modowe, które nie spełniają równości Szendrei. Natomiast Stanovský [107] przedstawił przykład 3-elementowej algebry z jedną ternarną operacją, która nie jest zanurzalna w półmoduł nad przemiennym półpierścieniem. W pracy [B9] pokazaliśmy, że algebra Stanovský'ego należy do rozmaitości $\mathcal{D}_3$ tzw. *ternarnych modów różniczkowych* (D, f), które są naturalnym ternarnym odpowiednikiem grupoidów różniczkowych. Rozmaitość $\mathcal{D}_3$ można zdefiniować przez jedną dodatkową równość reduktywności: $f(x, f(y_1, z_1, z_2), f(y_2, t_1, t_2)) \approx f(x, y_1, y_2)$ lub równoważnie przez $f(x, f(x, y_1, z_1), f(x, y_2, z_2)) \approx x$.

Motywacją do zbadania rozmaitości $\mathcal{D}_3$ było uzyskanie nowej klasy algebr modowych, które nie spełniają równości Szendrei i tym samym nie są zanurzalne w półmoduły nad przemiennymi półpierścieniami. Podobnie jak w przypadku binarnym istotną rolę w opisie modów różniczkowych odgrywa konstrukcja tzw. $\mathcal{LZ} \circ \mathcal{LZ}$-sumy. Niech $(A_i)_{i\in I}$ będzie indeksowaną rodziną zbiorów wraz z odwzorowaniami $h_{i,jk} : A_i \to A_i$ określonymi dla każdej trójki $(i, j, k) \in I^3$ i spełniającymi warunki:

(a) $h_{i,ii}$ jest odzorowaniem identycznościowym na A_i,
(b) $h_{i,jk}h_{i,mn} = h_{i,mn}h_{i,jk}$.

$\mathcal{LZ} \circ \mathcal{LZ}$-*sumą* nazywamy ternarną algebrę zdefiniowaną na rozłącznej sumie zbiorów A_i wraz z operacją $f(a_i, b_j, c_k) := h_{i,jk}(a_i)$, gdzie $a_i \in A_i$, $b_j \in A_j$ oraz $c_k \in A_k$. Taka suma jest oczywiście modem różniczkowym oraz, co istotne, każdy mod różniczkowy można reprezentować w postaci $\mathcal{LZ} \circ \mathcal{LZ}$-sumy. Korzystając z takiej reprezentacji opisaliśmy algebry wolne oraz równości spełnione w $\mathcal{D}_3$ i w pewnych jej podrozmaitościach (w podrozmaitości Szendrei, hemisemiprojektywnej oraz semiprojektywnej). W przeciwieństwie do przypadku binarnego, gdzie podrozmaitości grupoidów różniczkowych były zdefiniowane przez jedną dodatkową równość, krata podrozmaitości rozmaitości modów różniczkowych jest bardziej złożona. Chociaż właściwe nietrywialne skończenie bazowalne podrozmaitości nadal można zdefiniować przez jedną dodatkową równość (choć liczba zmiennych w takich równościach bardzo szybko rośnie), to podajemy przykład podrozmaitości $\mathcal{D}_3$, która nie jest skończenie bazowalna. Wszystkie opisane w pracy [B9] rezultaty można rozszerzyć na algebry, w których operacja f jest n argumentowa, dla dowolnego $n > 3$. Algebry należące do podrozmaitości hemisemiprojektywnej zdefiniowane są przez równości $f(x, x, y) \approx f(x, y, x) \approx x$ i stanowią przykład algebr modowych, które nie zanurzają się w półmoduły nad przemiennymi półpierścieniami.

W pracy [B8] opisujemy podrozmaitości Szendrei (podrozmaitości spełniające równości Szendrei) w rozmaitości $\mathcal{D}_3$. Równości Szendrei są w rozmaitości $\mathcal{D}_3$ równoważne jednej równości $f(x, y, z) \approx f(f(x, y, z), x, z)$. Najważniejszy rezultat stanowi, że krata takich podrozmaitości jest dualnie izomorficzna z niemodularną kratą kongruencji wolnego przemiennego monoidu o 2 generatorach. W konsekwencji, wszystkie rozmaitości Szendrei modów różniczkowych są skończenie bazowalne.

Ponieważ mody są algebrami idempotentnymi, więc zanurzanie ich w (pół)moduły jest w istocie zanurzaniem w pełny idempotentny redukt takich (pół)modułów. W przypadku modułów, takie pełne idempotentne redukty to dokładnie przestrzenie afiniczne. W przypadku półmodułów nad ustalonym półpierścieniem S takie pełne redukty idempotentne zwane są S-*przestrzeniami półafinicznymi*.

Problemem ściśle związanym z zanurzalnością algebr modowych w podredukty (pół)modułów jest problem konstrukcji przemiennego (pół)pierścienia definiującego rozmaitość (pół)modułów, której idempotentne podredukty należą do zadanej rozmaitości modów. Istnieje ogólna metoda znajdowania takiego przemiennego pierścienia, aby wszystkie algebry modowe z danej rozmaitości $\mathcal{V}$, które zanurzają się w przestrzenie afiniczne, zanurzały się w przestrzenie afiniczne nad tym właśnie pierścieniem. Klasa przestrzeni afinicznych nad tym pierścieniem nosi nazwę *afinizacji* rozmaitości $\mathcal{V}$.

Dla danej rozmaitości $\mathcal{V}$ algebr modowych (M, Ω), podrozmaitość $Sz(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$ modów Szendrei jest generowana przez klasę Ω-reduktów przestrzeni półafinicznych nad odpowiednim półpierścieniem $S(\mathcal{V})$. Każda algebra modowa z $\mathcal{V}$, która zanurza się w półmoduł będzie podreduktem $S(\mathcal{V})$-półmodułu. Klasa półafinicznych $S(\mathcal{V})$-przestrzeni nazywana jest *półafinizacją* rozmaitości $\mathcal{V}$. W cyklu trzech prac [B4]-[B6] opisujemy ogólną konstrukcję półpierścienia $S(\mathcal{V})$ półafinizacji a następnie stosujemy ją do wyznaczenia półpierścieni $S(\mathcal{V})$ dla wybranych rozmaitości $\mathcal{V}$. Konstrukcja półpierścienia $S(\mathcal{V})$ jest podobna do konstrukcji pierścienia afinizacji. Niech $\mathcal{V}$ będzie rozmaitością Ω-modów typu $\tau \colon \Omega \to \mathbb{N}$. Półpierścieniem półafinizacji rozmaitości $\mathcal{V}$ jest półpierścień ilorazowy wolnego przemiennego półpierścienia $\mathbb{N}[\{X_{\omega i} \mid \omega \in$

$\Omega,\ 1 \le i \le \tau(\omega)\}]$ nad zbiorem $\{X_{\omega i} \mid \omega \in \Omega,\ 1 \le i \le \tau(\omega)\}$ przez kongruencję generowaną przez zbiór $\{(\sum_{i=1}^{\tau(\omega)} X_{\omega i}, 1) \mid \omega \in \Omega\}$.

W szczególności, równoważne rozmaitości algebr modowych mają izomorficzne półpierścienie półafinizacji, natomiast półpierścień $S(\widetilde{\mathcal{V}})$ regularyzacji $\widetilde{\mathcal{V}}$ nieregularnej rozmaitości $\mathcal{V}$ otrzymujemy z półpierścienia $S(\mathcal{V})$ przez dodanie nowego elementu zerowego. Ponadto, wykorzystując przedstawioną konstrukcję szczegółowo opisaliśmy półpierścienie półafinizacji m.in. dla rozmaitości grupoidów modowych, przestrzeni afinicznych, algebr barycentrycznych, modów różniczkowych i modów półkratowych. W przypadku modów półkratowych otrzymany półpierścień jest zgodny z półpierścieniem opisanym przez Kearnesa w [53].

Kearnes [54] pokazał, że każda lokalnie skończona rozmaitość $\mathcal{V}$ algebr modowych jest kresem górnym rozmaitości $\mathcal{V}_5$ modów półkratowych, rozmaitości $\mathcal{V}_2$ przestrzeni afinicznych i rozmaitości $\mathcal{V}_1$ modów silnie rozwiązalnych, oraz rozmaitości $\mathcal{V}_1$ i $\mathcal{V}_2$ są niezależne, czyli $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2) \vee \mathcal{V}_5$. Rozmaitości $\mathcal{V}_2$ i $\mathcal{V}_5$ są dość dobrze zbadane, jednak stosunkowo niewiele wiadomo o klasie modów silnie rozwiązalnych. Przykładem takich algebr są mody różniczkowe i reduktywne grupoidy modowe. W pracy [B12] przedstawiamy konstrukcję lewo m-reduktywnych Ω-modów (M, Ω), czyli takich które spełniają równość $x_1 \cdot (x_2 \cdot \ldots (x_n \cdot y) \ldots) \approx x_1 \cdot (x_2 \cdot \ldots (x_n \cdot z) \ldots)$ dla pewnego binarnego termu $x \cdot y$ algebry (M, Ω). Pokazujemy, że rozmaitość $\mathcal{R}_m$ lewo m-reduktywnych Ω-modów, pokrywa się z produktem Mal'ceva $\mathcal{R}_k \circ \mathcal{R}_{m-k}$, dla dowolnego $1 \le k < m$. W szczególności, $\mathcal{R}_m = (\mathcal{LZ})^m$. Co więcej, $\mathcal{R}_m \circ \mathcal{R}'_p = \mathcal{R}_m \times \mathcal{R}'_p$, gdzie $\mathcal{R}'_p$ jest rozmaitością prawo p-reduktywnych Ω-modów.

Grätzer i Lakser, korzystając z Twierdzenia 2.5, opisali wszystkie podrozmaitości algebr potęgowych krat oraz grup. Pokazali, że jest dokładnie jedna nietrywialna rozmaitość algebr potęgowych krat i są dokładnie 3 nietrywialne rozmaitości algebr potęgowych grup. W pracy [B7] zostały opisane rozmaitości potęgowych entropicznych algebr grafowych. *Algebrą grafową* związaną z (nieskierowanym) grafem $G = (V, E)$ nazywamy grupoid $A(G) = (V \cup \{0\}, \cdot)$, w którym

$$a \cdot b = \begin{cases} a, & \text{jeśli} \quad (a,b) \in E, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Shallon [103] pokazała, że wiele skończonych algebr grafowych jest nieskończenie bazowalnych. Z drugiej strony, algebry grafowe są skończenie bazowalne wtedy i tylko wtedy, gdy są entropiczne [19]. W pracy [B7] została znaleziona baza równościowa dla wszystkich równości liniowych spełnionych w entropicznych algebrach grafowych. Ten rezultat został wykorzystany do pokazania, że jest dokładnie 7 nietrywialnych rozmaitości algebr potęgowych entropicznych algebr grafowych.

Bikratą nazywamy algebrę posiadającą strukturę dwóch krat wraz z jednoargumentową operacją inwolucji. W latach 80-tych XX wieku Ginsberg [35, 36] wprowadził bikraty jako ramy dla wnioskowania z niepełną informacją i próbę algebraizacji pewnych logik nieklasycznych. W pracy [D2] podaliśmy twierdzenie (obecnie znane w literaturze pod nazwą *Product Representation Theorem*) o reprezentacji dla tzw. ograniczonych P-bikrat, nazwanych później *bikratami splecionymi* (ang. bounded interlaced bilattices). W pracy [D1] zostały opisane wolne P-bikraty natomiast w [B10] przedstawiono konstrukcję tzw. *bikrat interwałowych* w oparciu o rodzinę przedziałów kraty ograniczonej i pokazano, że są one proste. Warto zwrócić uwagę, że od czasu pierwszych prac Ginsberga ukazało się bardzo dużo publikacji dotyczących tej tematyki. W szczególności pełną informację na temat twierdzenia o reprezentacji produktowej można znaleźć w [20].

Ważną klasę modów stanowią przestrzenie afiniczne nad przemiennym pierścieniem R. Algebry podprzestrzeni przestrzeni afinicznych nie są przestrzeniami afinicznymi. Romanowska i Smith [95] badali mody podprzestrzeni przestrzeni afinicznych nad ciałami. W pracy [C4] opisano strukturę algebr podalgebr przestrzeni afinicznych nad dowolnymi przemiennymi pierścieniami z jednością. Pokazano, że pewne redukty takich algebr można skonstruować jako sumy Płonki reduktów przestrzeni afinicznych nad odpowiednią przestrzenią rzutową. W pracy [C3] rezultaty z [C4] zostały rozszerzone na algebry podalgebr modów należących do produktu rozmaitości, z których co najmniej jedna jest rozmaitością przestrzeni afinicznych. W [C1] opisano algebry podalgebr pewnych nieidempotentnych reduktów modułów nad przemiennymi pierścieniami z jednością. Zastosowana metoda nie pozwoliła jednak na opisanie pełnej struktury algebr podprzestrzeni afinicznych.

Aby ominąć tę trudność, w pracy [B11] opisano przestrzenie afiniczne jako pewne ternarne $(E, \overline{R})$ redukty R-modułów $(E, +, R)$. Dla każdego R-modułu, jego podmoduły tworzą podalgebrę $(ESM, \overline{R})$ algebry $(ES, \overline{R})$. Algebry podmodułów $(ESM, \overline{R})$ są modami półkratowymi, stąd generują rozmaitość modów półkratowych $\mathcal{V}(R)$. W pracy pokazano, że półpierścień związany z rozmaitością $\mathcal{V}(R)$ jest izomorficzny z półpierścieniem skończenie generowanych ideałów pierścienia R. Jako wniosek przedstawiono opis kraty wszystkich podrozmaitości $\mathcal{V}(\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}))$.

W pracy [C2] pokazano, że wiele równości definiujących przestrzenie afiniczne jest konsekwencjami równości liniowych, są one zatem spełnione w algebrach podalgebr przestrzeni afinicznych.

6. Referaty wygłoszone na konferencjach naukowych:

- *Entropy and generalized entropy in n-semigroups* (wykład plenarny), konferencja Algebra Across the Borders, Astana, Kazachstan, 2015.
- *Affine and abelian quandles*, konferencja Loops'15, Ohrid, Macedonia, 2015.
- *Abelian quandles*, konferencja AAA90 Workshop on General Algebra, Nowy Sad, Serbia, 2015.
- *Algebry uporządkowane półkratowo*, konferencja Oblicza Algebry, Kraków, 2015.
- *Reductive medial quandles*, konferencja AAA89 Workshop on General Algebra, Drezno, Niemcy, 2015.
- *Entropicity and generalized entropic property in idempotent n-semigroups*, konferencja Algebras and Clones Fest, Praga, Czechy, 2014.
- *Power representation of semilattice ordered algebras*, konferencja AAA87 Workshop on General Algebra, Linz, Austria, 2014.
- *Semilattice ordered algebras - congruences, closure operators and subvarieties*, konferencja AAA85 Workshop on General Algebra, Luksemburg, 2013.

- *Commuting operations in aggregation*, konferencja AAA84 Workshop on General Algebra, Drezno, Niemcy, 2012.
- *Semilattice ordered algebras - the lattice of subvarieties*, Conference on Universal Algebra and Lattice Theory, Szeged, Węgry, 2012.
- *Closure operators and semilattice ordered algebras*, The 50th Summer School on Algebra and Ordered Sets, Novy Smokovec, Słowacja, 2012.
- *Identities in varieties generated by algebras of subalgebras*, konferencja AAA81 Workshop on General Algebra, Salzburg, Austria, 2011.
- cykl dwóch wykładów plenarnych:
  - *Survey on aggregation theory*
  - *Bisymmetry and commuting functions*

  konferencja Algebra Across the Borders, Yeshiva University, Nowy Jork, USA, 2011.
- *Power representation of modals*, International Conference on Algebras and Lattices, Praga, Czechy, 2010.
- *Ternary differential modes*, Summer School on General Algebra and Ordered Sets, Stara Leśna, Słowacja, 2009.
- *Complex graph algebra*, konferencja AAA74 Workshop on General Algebra, Tampere, Finlandia, 2007.
- *Modes not embeddable into semimodules*, konferencja Algorithmic Complexity and Universal Algebra, Szeged, Węgry, 2007.
- *Complex condition in algebras of subalgebras*, konferencja AAA70 Workshop on General Algebra, Wiedeń, Austria, 2005.
- *Complex algebras of subalgebras*, International Algebraic Conference, Ekaterinburg, Rosja, 2005.
- *Linear identities in complex algebras of subalgebras*, (wykład na zaproszenie), konferencja AAA68 Workshop on General Algebra, Drezno, Niemcy, 2004.
- *About new examples of bilattices*, konferencja AAA66 Workshop on General Algebra, Klagenfurt, Austria, 2003.
- *Identities of some complex algebras of subalgebras*, (wykład plenarny), konferencja AAA64 Workshop on General Algebra, Ołomuniec, Czechy, 2002.
- *Interval bilattices and some other simple bilattices*, konferencja AAA62 Workshop on General Algebra, Linz, Austria, 2001.
- *The lattice of varieties of some ternary mode*, konferencja AAA60 Workshop on General Algebra, Drezno, Niemcy, 2000.
- *Certain mode varieties and algebras of subalgebras*, konferencja AAA58 Workshop on General Algebra, Wiedeń, Austria, 1999.
- *Algebras of subalgebras and reductive modes*, konferencja AAA56 Workshop on General Algebra, Ołomuniec, Czechy, 1998.
- *Reductive modes*, Workshop on General Algebra and Discrete Mathematics, Poczdam, Niemcy, 1998.
- *Ternary affine spaces*, Working meeting "Modes, modals, related structures and application", Centrum Banacha, Warszawa, Polska, 1997.

- *Affine spaces and algebras of subalgebras*, konferencja AAA54 Workshop on General Algebra, Klagenfurt, Austria, 1997.
- *Enrichments of affine spaces and algebras of subalgebras*, Fifth Mathematical Conference "Workshop'97", Gronów, Polska, 1997.
- *About algebras of subalgebras*, konferencja AAA55 Workshop on General Algebra, Darmstadt, Niemcy, 1997.
- poster (prezentacja A. Zamojska-Dzienio): *Identities in varieties generated by algebras of subalgebras*, 6th European Congress of Mathematics, Kraków, Polska, 2012.

7. Referaty na seminariach w jednostkach zagranicznych

- Charles University, Praga, Czechy, *Entropy and generalized entropy in n-semigroups and in algebras with neutral element*, 2014.
- Charles University, Praga, Czechy, *Semilattice ordered algebras*, 2013.
- Istytut Matematyki Syberyjskiego Oddziału Rosyjskiej Akademii Nauk, Nowosybirsk, Rosja, *Modes and modals*, 2007.
- Technische Universität, Darmstadt, Niemcy, *Semilattice modes and modals*, 2000.
- Technische Universität, Darmstadt, Niemcy, *Ternary affine spaces*, 1998.

8. Wyjazdy w ramach współpracy naukowej

- Nazarbayev University, Astana, Kazachstan (wrzesień 2015)
- Charles University, Praga, Czechy (lipiec 2014)
- Charles University, Praga, Czechy (marzec 2014)
- Charles University, Praga, Czechy (marzec 2013)
- Yeshiva University, Nowy Jork, USA (sierpień 2011)
- Instytut Matematyki Syberyjskiego Oddziału Rosyjskiej Akademii Nauk, Nowosybirsk, Rosja (marzec 2007)
- Technische Universität, Darmstadt, Niemcy (listopad 2000)
- Technische Universität, Darmstadt, Niemcy (grudzień 1998)

9. Udział w krajowych i międzynarodowych projektach badawczych

- Polsko-Czeski Program Wykonawczy w ramach Umowy między Rządem Rzeczypospolitej Polskiej a Rządem Republiki Czeskiej o współpracy w dziedzinie nauki i techniki, program MNiSW nr 7AMB13PL013/8829/R13/R14, 2013-2014, *Algebra ogólna i zastosowania*, wykonawca.
- Międzynarodowy projekt badawczy INTAS nr 03-51-4110 koordynowany przez Unię Europejską, 2004-2007, *Universal Algebra and Lattice Theory*, wykonawca.
- Międzynarodowy projekt COST Action nr 274 TARSKI z funduszy European Science Foundation, 2002-2005, *Theory and Applications of Relational Structures as Knowledge Instruments*, wykonawca.
- 21 grantów Politechniki Warszawskiej w latach 1995-2015, wykonawca.

10. Nagrody i wyróżnienia

- Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej za osiągnięcia naukowe, 2012.
- Indywidualne, naukowe stypendium wyjazdowe dla nauczyciela akademickiego Politechniki Warszawskiej przyznane w drodze konkursu nr CAS/19/POKL, 2011.
- Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej za osiągnięcia naukowe, 2010.
- Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej za osiągnięcia naukowe, 1998.

11. Wskaźniki służące do oceny dorobku naukowego

Sumaryczny impact factor według listy Journal Citation Reports (JCR), zgodnie z rokiem opublikowania (lub wg dostępnych danych): 6,121

Liczba cytowań publikacji według bazy:

Web of Science: 20

Scopus: 40

MathSciNet: 31

Powyższe liczby nie zawierają cytowania pracy opublikowanej pod nazwiskiem A. Trakul. Wg bazy MathSciNet praca jest cytowana 6 razy (załącznik nr 10); Google Scholar - 21 razy.

Indeks Hirscha (bez pracy opublikowanej pod nazwiskiem A. Trakul) według bazy:

Web of Science: 2

Scopus: 3

References

[1] Aczél J., Maksa G., *Solution of the rectangular $m \times n$ generalized bisymmetry equation and the problem of consistent aggregation*, J. Mat. Anal. Appl. 203(1), (1996), 104–126.

[2] Adaricheva K., Pilitowska A., Stanovský D., *Complex algebras of subalgebras*, Algebra i Logika 47(6), (2008), 655–686 (Russian). English translation in Algebra and Logic 47(6) (2008), 367–383.

[3] Adaricheva K., Romanowska A., Smith J.D.H., *The algebra of mode homomorphisms*, Cent. Eur. J. Math. 12(8), (2014), 1265–1277.

[4] Almeida J., *Power pseudovarieties of semigroups I, II*, Semigroup Forum 33, (1986), 357–373, 375–390.

[5] Almeida J., *Finite Semigroups and Universal Algebra*, World Scientific, Singapore, 1995.

[6] Bašić B., *On absorption in semigroups and n-ary semigroups*, Logical Methods in Computer Science 11, (2015), 1–13.

[7] Barto L., Kozik M., *Absorbing subalgebrs, cyclic terms, and the constraint satisfaction problem*, Logical Methods in Computer Science 8, (2012), 1–26.

[8] Bargenda H.W., Brink C., Vajner V., *Categorical aspects of power algebras*, Quaestiones Mathematicae 16, (1993), 133–147.

[9] Blackburn S., *Enumerating finite racks, quandles and kei*, Electron. J. Combin. 20, no. 3, (2013), Paper 43, 9 pp.

[10] Bloom S.L., *Varieties of ordered algebras*, Journal of Computer and System Sciences 13, (1976), 200–212.

[11] Bošnjak I., Madarász R., *Power algebras and generalized quotient algebras*, Algebra Univers. 45, (2001), 179–189.

[12] Bošnjak I., Madarász R., *On power structures*, Algebra Discrete Math. 2, (2003), 14–35.

[13] Bošnjak I., Madarász R., *Some results on complex algebras of subalgebras*, Novi Sad J. Math. 37(2), (2007), 231–240.

[14] Bošnjak I., Madarász R., *Retraction closure property*, Algebra Univers. 69, (2013), 279–285.

[15] Brink C., *Power structures*, Algebra Univers. 30(2), (1993), 177–216.

[16] Couceiro M., Marichal J.-L., *Aczélian n-ary semigroups*, Semigroup Forum 85, (2012), 81-90.
[17] Crvenković S., Dolinka I., Vinčić M., *Involution semigroups are not globally determined*, Semigroup Forum 62, (2001), 477–481.
[18] Czédli G., Lenkehegyi A., *On classes of ordered algebras and quasiorder distributivity*, Acta Sci. Math. 46, (1983), 41–54.
[19] Davey B.A., Idziak P.H., Lampe W.A., McNulty G.F., *Dualizability and graph algebras*, Discrete Math. 214, (2000), 145–172.
[20] Davey B.A., *The product representation theorem for interlaced pre-bilattices: some historical remarks*, Algebra Univers. 70, (2013), 403–409.
[21] Dörnte W., *Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff*, Math. Z. 29, (1928), 1–19.
[22] Drapal A., *Globals of unary algebras*, Czech. Math. J. 35, (1985), 52–58.
[23] Ehrman G., Gurpinar A., Thibault M., Yetter D.N., *Toward a classification of finite quandles*, J. Knot Theory Ramifications 17, no. 4, (2008), 511–520.
[24] Ehsani A., *The Generalized Entropic Property for a Pair of Operations*, Izvestiya NAN Armenii. Matematika No. 1, (2011), 29–34 (Russian). English translation in Journal of Contemporary Mathematical Analysis 46 No. 1, (2011), 56-60.
[25] Ehsani A., *On a Generalized Endomorphism*, International Journal of Algebra 5 (29), (2011), 1427–1435.
[26] Etherington I. M. H., *Groupoids with additive endomorphisms*, American Math. Monthly 65, (1958), 596–601.
[27] Evans T., *Properties of algebras almost equivalent to identities*, J. London Math. Soc. 35, (1962), 53–59.
[28] Evans T., *Endomorphisms of abstract algebras*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 66, (1962), 53–64.
[29] Fuchs L., *On partially ordered algebras I*, Colloquium Mathematicum 14, (1966), 113–130.
[30] Fuchs J., *On closure operators on monoids*, Arch. Math. 4, Scripta Fac. Sci. Nat. UJEP Brunensis XII, (1976), 225–232.
[31] Galkin V.M. , *Left distributive finite order quasigroups*, Mat. Issled. No. 51, (1979), 43–54, (Russian).
[32] Gautam N.D., *The validity of equations of complex algebras*, Arch. Math. Logik Grundlag. 3 (1957), 117–124.
[33] Gerhard, J.A., Petrich, M., *Varieties of bands revisited*, Proc. Lond. Math. Soc. 58, (1989), 323-350.
[34] Ghosh S., Pastijn F., Zhao X.Z., *Varieties generated by ordered bands I*, Order 22, (2005), 109–128.
[35] Ginsberg M.L., *Multi-valued logics*, in: Proceedings of AAAI-86, Fifth National Conference on Artificial Intelligence, 243–247, Morgan Kaufmann Publishers, Los Altos, 1986.
[36] Ginsberg M.L., *Multi-alued logics: A uniform approach to inference in artificial intelligence*, Comput. Intelligence 4, (1988), 265–316.
[37] Głazek K., Gleichgewicht B., *Abelian n-groups*, in: Csákány, B., Fried, E., Schmidt, E.T. (eds.) Universal Algebra. Colloquia Mathematica Societatis Jnos Bolyai, vol. 29, 321–329, North-Holland, Amsterdam, 1982.
[38] Goldblatt R., *Varieties of complex algebras*, Annals of Pure and Applied Logic 44, (1989), 173–242.
[39] Grabisch M., Marichal J.-L., Mesiar R., Pap E., *Aggregation Functions*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications vol. 127, Cambridge University Press, Cambrige, 2009.
[40] Grätzer G., *Universal Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1979.
[41] Grätzer G., Whitney S., *Infinitary varieties of structures closed under the formation of complex structures*, Colloq. Math. 48, (1984), 485–488.
[42] Grätzer G., Lakser H., *Identities for globals (complex algebras) of algebras*, Colloq. Math. 56, (1988), 19–29.
[43] Herchl J., Jakubíková-Studenovská D., *Globals of unary algbras*, Soft Comput. 11, (2007), 1107–1112.
[44] Hodkinson I., Mikulás S., Venema Y., *Axiomatizing complex algebras by games*, Algebra Univers. 46, (2001), 455-478.
[45] Hou X., *Finite modules over* $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, J. Knot Theory Ramifications 21, (2012), no. 8, 1250079, 28 pp.
[46] Jedlička P., Pilitowska A., Stanovský D., Zamojska-Dzienio A., *The structure of medial quandles*, Journal of Algebra 443, (2015), 300–334.
[47] Ježek J., *A note on complex groupoids*, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, Universal Algebra 29, (1977), 419–420.
[48] Ježek J., Kepka T., *Medial groupoids*, Academia, Praha, 1983.

[49] Jipsen P., *A note on complex algebras of semigroups*, in Relational and Kleene-Algebraic Methods in Computer Science (ed. R. Berghammer, B. Mller, G. Struth), Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3051, Springer-Verlag (2004), 171–177.
[50] Jónsson B., Tarski A., *Boolean algebras with operators I, II*, Amer. J. Math. 73, (1951), 891–939; Amer. J. Math. 74, (1952), 127–162.
[51] Joyce D., *Classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Applied Algebra, 23, (1982), 37–65.
[52] Kearnes K., *The structure of fnite modes*, preprint, 1990's.
[53] Kearnes K., *Semilattice modes I: the associated semiring*, Algebra Universalis 34, (1995), 220–272.
[54] Kearnes K., *Idempotent simple algebras*, in Logic and Algebra, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 180, Dekker New York, 1996, 529–572.
[55] Klukovits L., *On commutative universal algebras*, Acta Sci. Math. 34, (1973), 171–174.
[56] Kobayashi Y., *Semilattices are globally determined*, Semigroup Forum 29, (1984), 217–222.
[57] Kravchenko A., *On the lattice of quasivarieties of differential groupoids*, Comment. Math. Univ. Carolin. 49, (2008), 11–17.
[58] Kravchenko A.V., Pilitowska A., Romanowska A., Stanovský D., *Differential modes.* Internat. J. Algebra Comput. 18, (2008), no. 3, 567-588.
[59] Kuřil M., Polák L., *On varieties of semilattice-ordered semigroups*, Semigroup Forum 71, (2005), 27–48.
[60] Lehtonen E., Pilitowska A., *Generalized entropy in expanded semigroups and in algebras with neutral element*, 2014, Semigroup Forum 88(3), 702–714.
[61] Lehtonen E., Pilitowska A., *Entropicity and generalized entropic property in idempotent n-semigroups*, 2015, Semigroup Forum 91(1), 260–281.
[62] McKenzie R., Romanowska A.B., *Varieties of $\cdot$ - distributive bisemilattices*, Contributions to General Algebra (Proceedings of the Klagenfurt Conference, May 25-28, 1978) 1, (1979), 213–218.
[63] Mogiljanskaja E.M., *Non-isomorphic semigroups with isomorphic semigroups of subsets*, Semigroup Forum 6, (1973), 330–333.
[64] Nelson S., Wong C.-Y., *On the orbit decomposition of finite quandles*, J. Knot Theory Ramifications 15, (2006), no. 6, 761–772.
[65] Pastijn F., *Varieties generated by ordered bands II*, Order 22, (2005), 129–143.
[66] Pastijn F., Zhao X.Z., *Varieties of idempotent semirings with commutative addition*, Algebra Univers. 54, (2005), 301–321.
[67] Petrich M., *Regular semigroups satisfying certain conditions on idempotents and ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. 170, (1972), 245–267.
[68] Pierce R.S., *Symmetric groupoids*, Osaka J. Math. 15, (1978), 51–76.
[69] Pilitowska A., *Free P-bilattices*, Demonstration Mathematica 24(1–2), (1991), no.1-2, 121-127.
[70] Pilitowska A., *Identities for classes of algebras closed under the complex structures*, Discuss. Math., Algebra and Stochastic Methods 18, (1998), 85–109.
[71] Pilitowska A., *Enrichments of affine spaces and algebras of subalgebras*, Discuss. Math., Algebra and Stochastic Methods 19, (1999), 207–225.
[72] Pilitowska A., *The lattice of subvarieties of the variety of some ternary modes*, Contributions to General Algebra (Proceedings of the Dresden Conference 2000 (AAA60) and the Summer School 1999) 13, (2001), 265–274.
[73] Pilitowska A., *Interval bilattices and some other simple bilattices*, Relational Methods in Computer Science (H.C.M. de Swart, ed.), Lecture Notes in Computer Science 2561, (2002), 190-196.
[74] Pilitowska A., *Linear identities in graph algebras*, Comment. Math. Univ. Carolin. 50(1), (2009), 11-24.
[75] Pilitowska A., Romanowska A., *Reductive modes.* Period. Math. Hungar. 36(1), (1998), no. 1, 67-78.
[76] Pilitowska A., Romanowska A., *Embedding modes into semimodules, Part I*, Demonstratio Mathematica 44(3), (2011), 523–534.
[77] Pilitowska A., Romanowska A., *Embedding modes into semimodules, Part II*, Demonstratio Mathematica 44(4), (2011), 781–790.
[78] Pilitowska A., Romanowska A., *Embedding modes into semimodules, Part III*, Demonstratio Mathematica 44(4), (2011), 791–800.
[79] Pilitowska A., Romanowska A., Roszkowska-Lech B., *Products of mode varieties and algebras of subalgebras*, Math. Slovaca 46(5), (1996), 497–514.

[80] Pilitowska A., Romanowska A., Smith J.D.H., *Affine spaces and algebras of subalgebras*, Algebra Universalis 34, (1995), 527–540.

[81] Pilitowska A., Romanowska A., Stanovský D., *Varieties of differential modes embeddable into semimodules*, International Journal of Algebra and Computation 19, No. 5, (2009), 669–680.

[82] Pilitowska A., Zamojska-Dzienio A., *Representation of modals*, Demonstr. Mathematica 44(3), (2011), 535–556.

[83] Pilitowska A., Zamojska-Dzienio A., *On some congruences of power algebras*, Cent. Eur. J. Math. 10(3), (2012), 987–1003.

[84] Pilitowska A., Zamojska-Dzienio A., *Varieties generated by modes of submodes*, Algebra Universalis 68, (2012), 221–236.

[85] Pilitowska A., Zamojska-Dzienio A., *The lattice of subvarieties of semilattice ordered algebras*, Order 31(2), (2014), 217–238.

[86] Pilitowska A., Zamojska-Dzienio A., *Closure operators on algebras*, International Journal of Algebra and Computation 25, No. 6, (2015), 1055–1074.

[87] Pinus A.G., Vazhenin Yu.M., *Elementary classification and decidability of theories of derived structures*, Russian Math. Surveys 60(3), (2005), 395-432.

[88] Płonka J., *On algebras with n distinct essentially n-ary operations.* Algebra Universalis 1, (1971), 73–79.

[89] Płonka J., *On k-cyclic groupoids.* Math. Japon. 30, (1985), no. 3, 371-382.

[90] Romanowska A.B., *Semi-affine modes and modals*, Scientiae Mathematicae Japonicae 61, (2005), 159–194.

[91] Romanowska A., Roszkowska B., *On some groupoid modes*, Demonstr. Math. 20, (1987), 277–290.

[92] Romanowska A., Roszkowska B., *Representations of n-cyclic groupoids*, Algebra Universalis 26, (1989), 7-15.

[93] Romanowska A.B., Smith J.D.H., *Bisemilattices of subsemilattices*, J. Algebra 70, (1981), 78–88.

[94] Romanowska A.B., Smith J.D.H., *Modal Theory*, Heldermann Verlag, Berlin, 1985.

[95] Romanowska A.B., Smith J.D.H., *From affine to projective geometry via convexity*, Springer Lecture Notes in Mathematics 1149, (1985), 255–270.

[96] Romanowska A.B., Smith J.D.H., *Subalgebra systems of idempotent entropic algebras*, J. Algebra 120, (1989), 247–262.

[97] Romanowska A.B., Smith J.D.H., *On the structure of the subalgebra systems of idempotent entropic algebras*, J. Algebra 120, (1989), 263–283.

[98] A. Romanowska, J.D.H. Smith, *Differential groupoids.* Contributions to general algebra, 7 (1990), 283-290, Hölder-Pichler-Tempsky, Vienna, 1991.

[99] Romanowska A.B., Smith J.D.H., *Modes,* World Scientific, Singapore, 2002.

[100] Romanowska A., Trakul A., *On the structure of some bilattices*, Universal and Applied Algebra (K. Hałkowska, B. Stawski, eds.), World Scientific 1989, 235-253.

[101] Roszkowska-Lech B., *A representation of symmetric idempotent and entropic groupoids*, Demonstratio Mathematica 32(2), (1999), 247–262.

[102] Shafaat A., *On varieties closed under the construction of power algebras*, Bull. Austral. Math. Soc. 11, (1974), 213–218.

[103] Shallon C.R., *Nonfinitely based binary algebras derived from lattices*, Ph.D. Thesis, University of California at Los Angeles, 1979.

[104] Shemetkov L. A., Skiba A., *Formations of Algebraic Systems*, Nauka, Moscow, 1989 (Russian).

[105] Smith J.D.H., *Modal theory, partial orders and digital geometry*, Springer Lecture Notes in Computer Science 239, (1986), 308–323.

[106] Smith J.D.H., *Modes and modals*, Discuss. Math., Algebra and Stochastic Methods 19, (1999), 9–40.

[107] Stanovský D., *Idempotent subreducts of semimodules over commutative semirings*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 121, (2009), 33–43.

[108] Stronkowski M.M., *On free modes,* Comment. Math. Univ. Carolin. 47, (2006), 561–568.

[109] Stronkowski M.M., *On Embeddings of Entropic Algebras,* Ph. D. Thesis, Warsaw University of Technology, Warsaw, Poland, 2006.

[110] Szendrei A., *The operation ISKP on classes of algebras*, Algebra Universalis 6, (1976), 349–353.

[111] Tamura T., Shafer J., *Power semigroups*, Math. Japon. 12, (1967), 25–32.

[112] Trnková V., *On a representation of commutative semigroups*, Semigroup Forum 10, (1975), 203–214.

[113] Vendramin L., *On the classification of quandles of low order*, J. Knot Theory Ramifications, 21, (2012), no.9, 1250088, 10pp.

[114] Zhao X.Z., *Idempotent semirings with a commutative additive reducts*, Semigroup Forum 64, (2002), 289–296.

Agata Pilitowska