Zagadnienia na egzamin dyplomowy magisterski na specjalności ISM

Promotor pracy dyplomowej magisterskiej wskazuje dwa przedmioty z pięciu obowiązkowych bloków tematycznych, które w toku studiów zaliczył student.

Na egzaminie dyplomowym przewodniczący Komisji Egzaminacyjnej wskazuje jedno z 6 pytań związanych ze wskazanymi przez promotora przedmiotami.

BLOK ALGEBRA I MATEMATYKA DYSKRETNA

Kombinatoryka

1. Twierdzenie Dilwortha o podziale zbioru częściowo uporządkowanego na łańcuchy i szkic jego dowodu.
2. Twierdzenie Ramseya. Pojęcie liczby Ramseya i ich oszacowania górne i dolne.
3. Twierdzenie Spernera o maksymalnej liczności rodzin zbiorów parami nie zawierających się i szkic jego dowodu.

Kraty rozdzielne i dualności

4. Kraty i algebry Boole'a. Twierdzenie o reprezentacji dla skończonych algebr Boole'a.
5. Kraty rozdzielne. Twierdzenie o reprezentacji dla skończonych krat rozdzielnych.
6. Ideały i filtry pierwsze. Twierdzenie Stone'a o reprezentacji algebr Boole'a.

Wybrane struktury algebraiczne

7. Struktura pierścieni półprostych. Twierdzenie Wadderburna.
8. Związek modułów nad pierścieniem grupowym z reprezentacją grup skończonych.
9. Przykłady algebr Liego. Konstrukcja uniwersalnej algebry obwiedniej.

BLOK ANALIZA FUNKCJONALNA I ANALIZA NA PRZESTRZENIACH METRYCZNYCH

Geometria i analiza na przestrzeniach metrycznych

10. Rozszerzanie funkcji lipszycowskich.
11. Miary podwajające: przykłady i związki z przestrzeniami podwajającymi.
12. Metryka Hausdorffa: definicja i własności oraz zastosowania.

Analiza harmoniczna 1

13. Funkcja maksymalna Hardy-Littlewooda - definicje, własności, zastosowania.
14. Transformacja Fouriera - definicje, własności, zastosowania.
15. Operator singularny Calderona-Zygmunda - definicje, własności, zastosowania.

Analiza funkcjonalna 2

16. Funkcje o wartościach w przestrzeni Banacha - mierzalność, całka Bochnera, twierdzenie Aubin-Lionsa.
17. Alternatywa Fredholma w przestrzeniach Banacha - sformułowanie, przykłady.
18. Twierdzenie spektralne dla operatorów ograniczonych normalnych.

BLOK GEOMETRIA I TOPOLOGIA

Geometria form różniczkowych

19. Operator różniczki zewnętrznej. Lemat Poincarégo.
20. Całkowanie form różniczkowych. Twierdzenie Stokesa.
21. Metoda reperu ruchomego na powierzchniach. Równania strukturalne powierzchni.

Geometria rozmaitości riemannowskich

22. Rozmaitości gładkie, przestrzeń styczna, przekształcenia gładkie między rozmaitościami gładkimi.
23. Koneksja liniowa, tensor torsji i krzywizny. Przeniesienie równoległe.
24. Tensor metryczny Riemanna. Twierdzenie podstawowe geometrii riemannowskiej o koneksji Levi-Civity.

Topologia różniczkowa

25. Punkty krytyczne i regularne. Twierdzenie Sarda. Lemat Morse'a.
26. Homotopia i stabilność. Twierdzenie o stabilności.
27. Transwersalność. Twierdzenie o przeciwobrazie podrozmaitości transwersalnej do przekształcenia.

Warsztaty badawcze z geometrii i topologii

28. Nierówności typu izoperymetrycznego.
29. Potoki skurczające krzywe.
30. Wykorzystanie metod geometrii i topologii w innych dziedzinach matematyki i nauki.

BLOK RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH

Nieliniowe równania różniczkowe cząstkowe

31. Wykorzystanie rachunku wariacyjnego w analizie nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych.
32. Metoda monotoniczności w nieliniowych równaniach różniczkowych cząstkowych.
33. Twierdzenia o punktach stałych i ich wykorzystanie w analizie nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych.

Równania różniczkowe cząstkowe 2

34. Metoda Perrona istnienia rozwiązania równania Laplace'a z warunkiem brzegowym typu Dirichleta.
35. Wykorzystanie teorii potencjału w analizie szukania funkcji harmonicznych z zadanymi wartościami na brzegu obszaru ograniczonego.
36. Słabe topologie w przestrzeniach Banacha i charakteryzacja ich baz otoczeń.

Metody analizy funkcjonalnej w równaniach różniczkowych cząstkowych

37. Zasady maksimum dla równań eliptycznych i parabolicznych.
38. Metoda Galerkina dla równań Parabolicznych i hiperbolicznych.
39. Twierdzenie Hille'a-Yosidy i jego zastosowania.

BLOK UKŁADY DYNAMICZNE

Dynamika holomorficzna

40. Iteracje wielomianów, zbiór Mandelbrota i jego własności.
41. Zbiory Julii i Fatou oraz ich własności.
42. Klasyfikacja składowych okresowych zbioru Fatou dla funkcji holomorficznych na sferze Riemanna.

Gładkie układy dynamiczne

43. Twierdzenie Grobmana-Hartmana o linearyzacji.
44. Nietrywialne zbiory hiperboliczne.
45. Twierdzenie ergodyczne Birkhoffa.

Modele numeryczne i symulacje komputerowe

46. Metody numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych:
    - omówienie podstawowych własności wraz z przykładami (rząd dokładności, błąd metody, zgodność, stabilność i zbieżność),
    - szczegółowe omówienie wybranej metody.
47. Równania różniczkowo-algebraiczne:
    - indeks równania i podstawowe różnice między równaniami różniczkowo-algebraicznymi i różniczkowymi zwyczajnymi,
    - omówienie wybranej metody numerycznego rozwiązywania.
48. Metoda różnic skończonych dla równań różniczkowych cząstkowych:
    - omówienie podstawowych własności (zgodność, stabilność i zbieżność),
    - omówienie wybranego schematu różnicowego dla 1-wymiarowego równania hiperbolicznego lub parabolicznego,
    - omówienie schematu różnicowego dla 2-wymiarowego równania eliptycznego.