

prof. Zbigniew Palmowski
Katedra Matematyki Stosowanej
Politechnika Wrocławska
ul. Janiszewskiego 14a
50-372 Wrocław

RECENZJA PRACY DOKTORSKIEJ RÓŻNE ASPEKTY MARKOWSKIEJ ZGODNOŚCI

ADAMA PYTELA

Magister Adam Pytel jest absolwentem Politechniki Warszawskiej. Uzyskał tytuł magistra z wyróżnieniem na kierunku Matematyka. Jest współautorem pracy opublikowanej w solidnym czasopiśmie *Journal of Applied Probability*, które uzyskało w ocenie Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego 20 punkty. Brał udział w kilku polskich i zagranicznych konferencjach. Był też wykonawcą w granie dziekańskim, pt. 'Modelowanie stochastyczne zjawisk losowych'.

Magister Pytel zajmuje się markowską zgodnością dla dwóch klas procesów stochastycznych - łańcuchów Markowa z czasem ciągłym o przeliczalnej i nieskończonej przestrzeni stanów oraz archimedowskich procesów przeżycia. Począwszy od przełomowej pracy Sklara (1959) zaczęto modelować zależność pomiędzy współrzednymi wektora losowego poprzez pewne przekształcenia, zwane kopułami. Ich zastosowanie jest już klasyczne i bardzo szeroko stosowane w bardzo wielu dziedzinach, m.in. w finansach, ubezpieczeniach, statystyce, biologii czy w fizyce. Biorąc proces stochastyczny w czasie ciągłym o wektorowych wartościach można również modelować zależność poprzez rodzinę pewnych kopuł. Zawężając tę rodzinę procesów możemy poszukiwać odpowiednika kopuł czy też określonej zależności, który zachowywałby klasę procesów, tzn. chcemy by wielowymiarowy proces o danej 'kopule' miał współrzedne tego samego typu. Warto wspomnieć, że dla wielu takich klas procesów udało się już scharakteryzować takie obiekty, które opisują zależność procesów. Miedzy innymi udało się to zrealizować w kontekście procesów Lévyego (patrz Kallsen i Tankov (2006)), semimartyngałów (patrz Bielecki i in. (2008) i Vidozzi (2009)) i procesów punktowych (patrz Bielecki i in. (2010)). Celem tej rozprawy jest analiza powyższej własności dla procesów Markowa dla przeliczalnej przestrzeni stanów. W szczególności przedstawią rozprawa doktorska odpowiada na pytanie kiedy własność Markowa wielowymiarowego procesu Markowa przenoszona jest na jego współrzedne. Mówimy wtedy o tzw. markowskiej zgodności. Kluczowy warunek na markowską zgodność (tzw. jednostajna f -ograniczoność) jest podany w rozprawie w języku macierzy intensywności tego procesu a główna technika jest oparta o analizę kompensatorów procesu liczącego skoki tego procesu. Choć sam pomysł korzystania z teorii procesów punktowych nie wydaje się nowy, to został on wykorzystany w sposób twórczy a uzyskane rezultaty z pewnością są istotne

i interesujące. Praca doktorska jest bardzo starannie zredagowana a wyniki zostały zaprezentowane w sposób bardzo przejrzysty i uporządkowany. Udowodnione rezultaty są niebanalne a ich dowody wymagały sprawności technicznej. W szczególności rozprawa doktorska zawiera następujące rezultaty.

W drugim rozdziale, który następuje po wstępie wprowadzającym pojęcie silnej i słabej markowskiej zgodności, są podane główne wyniki rozprawy. Rozdział zaczyna się od podania podstawowych faktów dotyczące kompensatorów odpowiednich procesów liczących związanych z procesem Markowa (patrz Stwierdzenie 2.1.9 i Twierdzenie 2.3.16). W tym miejscu warto zwrócić uwagę na nieco egzotyczne rozróżnienie na 'stwierdzenia' i 'twierdzenia'. Warto również podkreślić, że niektóre fakty (jak np. przykład 2.1.6) zostały już udowodnione w teorii przeżycia, która zdaje się być całkowicie pominięta w referencjach (patrz np. Tw. 1.3.2 w wersji bez cenzury ($U = +\infty$) w T.R. Fleming, D.P. Harrington (2005) 'Counting processes and survival analysis', John Wiley and Sons, New York). Twierdzenie 2.3.1 i Stwierdzenie 2.3.5 podają postać kompensatorów pewnych procesów punktowych związanych z procesem Markowa. Jest to istotna część rozprawy doktorskiej używana w późniejszych dowodach, chociaż jądro dowodów obu twierdzeń można odnaleźć już w Last i Brandt (1995). Na podstawie tych wstępnych rezultatów magister Pytel formułuje główne twierdzenia rozdziału 2 dotyczące silnej markowskiej zgodności (patrz Twierdzenie 2.4.3) oraz słabej markowskiej zgodności (patrz Twierdzenie 2.4.4) przy założeniu 4 dotyczącym jednostajnej f -ograniczoności, które mówi, że istnieje lokalnie całkowalna funkcja f taka, że wyrazy macierzy intensywności są wspólnie ograniczone przez tą funkcję. Twierdzenia te podają warunki wystarczające i dostateczne aby zachodziła markowska zgodność. Dowód twierdzeń opiera się na klasycznej obserwacji, że informacja o procesie liczącym a zatem o procesie Markowa jest zakodowana w jego kompensatorze. Można więc stosować znane fakty z teorii martyngałów. To podejście jest dość powszechne w teorii kolejek (patrz np. Bremaud (1981)). Dowody obu twierdzeń zostały przeprowadzone starannie i nie znalazłem żadnej usterki. Należy podkreślić również, że uzyskane wyniki nie są łatwe w dowodzeniu i są niebanalne choćby ze względu na trudności związane z istnieniem rozwiązań równań Kołmogorowa i ich jednoznacznością (patrz Twierdzenia 2.2.22 i 2.2.24 przedłożonej rozprawy). Uogólniają one również rezultaty Bieleckiego, Jakubowskiego i Niewęłowskiego (2013), którzy rozważali skończone łańcuchy Markowa spełniające w sposób trywialny warunek jednostajnej f -ograniczoności. Powyższa praca została opublikowana w bardzo dobrym czasopiśmie jakim jest Electronic Journal of Probability, co pokazuje w pewnym sensie, że rzeczywiście mamy do czynienia z intrygującymi pytaniami matematycznymi.

Całość uzupełnia Twierdzenie 2.4.1, które podaje warunki wystarczające na silną markowską zgodność w języku warunkowych funkcji tworzących oraz Stwierdzenie 2.4.5 dające dostateczne i łatwe do sprawdzenia warunki (M1) i (M2) na zachodzenie słabej markowskiej zgodności. Szkoda tylko, że nie podano jakiejś interpretacji owych warunków.

Rozdział drugi kończy się przykładami dotyczącymi procesu narodzin i śmierci, procesu Consuela typu I oraz tzw. modelu depozytów opisującego liczbę depozytów/lokat w banku. Bardzo podoba mi się ten fragment rozpra-

wy doktorskiej. Pokazuje on bowiem, że magister Pytel dobrze wie do czego bądź co bądź abstrakcyjnie postawiony problem może być stosowany.

Ostatnia część rozprawy doktorskiej porusza zagadnienie markowskiej zgodności dla archimedesowych procesów przeżycia. Proces ten ma i -tą współrzedną równą $M_{(i-1)+t} - M_{i-1}$ dla losowego mostu gamma $\{M_t, t \in [0, 1]\}$ będącego iloczynem ściśle dodatniej zmiennej losowej (z tzw. rozkładem generującym) oraz mostu gamma na $[0, 1]$. W Twierdzeniu 3.2.1 rozprawy udowodniono słabą markowską zgodność dla tych procesów. Twierdzenie 3.2.4 mówi z kolei, że jeśli rozkład generujący ma nośnik dyskretny lub nie jest równy $(0, \infty)$, to proces archimedowski nie jest silnie markowsko zgodny. Dowód tego twierdzenia jest bardzo techniczny i trudny co jest konsekwencją złożonej struktury rozważanego procesu. Wynik ten jest jednak bardzo ważny bo pokazuje przykład procesów, które są słabo markowsko zgodne ale na ogół nie są silnie markowskie zgodne. Dodatkowo wagę tego procesu podkreślają liczne przykłady opisane w Rozdziale 3.3. Dotyczą one funkcji decyzyjnych oceniających zyskowność bądź ryzyko pewnych przedsięwzięć (Podrozdział 3.3.2), szacowania zysków operatorów komórkowych gdzie rozkład generujący opisuje potencjał nabywcy na pewną nową usługę (Przykład 3.3.7), teorii niezawodności (Przykład 3.3.8), produktów bankowych z otwartymi liniami kredytowymi (Przykład 3.3.9) oraz szacowania ryzyka operacyjnego w oparciu o VAR (Value-at-Risk) oraz ES (Expected Shortfall, Przykład 3.3.11). Ten ostatni przykład jest wzbogacony licznymi symulacjami. Bardzo podoba mi się wykazana erudycja aplikacyjna oraz język w jaki zostały opisane powyższe przykłady. Widać w ten sposób dlaczego został wybrany ten a nie inny proces oraz gdzie uzyskane rezultaty mogą być stosowane. Wszystko też zostało zaprezentowane z dużym profesjonalizmem numerycznym.

Rozprawa kończy się dodatkiem zawierającym podstawowe fakty użyte w rozprawie.

Praca doktorska zawiera zatem bardzo ciekawe, prawdziwe i niebanalne wyniki, które mają szerokie spektrum zastosowań również zaprezentowanych bardzo udanie w rozprawie. Prezentacja wyników nie budzi żadnych zastrzeżeń.

Biorąc pod uwagę wszystkie wcześniejsze uwagi, uważam, iż dorobek naukowy magistra Adama Pytla jak i rozprawa doktorska w pełni uzasadniają wniosek o dopuszczenie go do dalszych etapów przewodu doktorskiego.



Wrocław, dnia 02 grudzień 2017