POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

ROZPRAWA DOKTORSKA

mgr Dariusz Socha

Problem optymalnej wypłaty dywidendy w dyskretnym modelu nadwyżki firmy ubezpieczeniowej

Promotor

Prof. dr hab. Łukasz Stettner

Streszczenie

Praca jest zorganizowana w następujący sposób. Na początku przedstawimy problem i wykażemy, że problem poszukiwania optymalnej strategii dla rozpatrywanego zagadnienia optymalizacyjnego jest równoważny analizie równania Bellmana. Za pomocą Twierdzenia Banacha o kontrakcji wykażemy istnienie rozwiązania równania Bellmana w przestrzeni ograniczonych funkcji ciągłych oraz w przestrzeni ograniczonych funkcji mierzalnych. Korzystając z równania Bellmana podamy podstawowe własności funkcji wartości $V(x)$, będącej jego rozwiązaniem oraz strategii $u(x)$ będącej selektorem maksymalizującym prawej strony równania Bellmana. W kolejnym rozdziale przeanalizujemy problem dla strat o rozkładzie skupionym na na zbiorze liczb całkowitych postaci $\{-n, -n+1, ..., 0, 1, 2, ...\}$ dla pewnego $n > 0$. Wykażemy, że w tym szczególnym przypadku można dokładniej scharakteryzować postać optymalnych strategii niż udaje się to zrobić w przypadku ogólnym. Następnie przeanalizujemy problem dla zmiennej losowej $Y = d - \hat{Y}$, gdzie $d > 0$ jest stałą deterministyczną oznaczającą wysokość składki, a $\hat{Y}$ jest zmienną losową opisującą straty. Przy założeniu, że $\hat{Y}$ ma rozkład wykładniczy wykażemy, że w tym przypadku strategia barierowa jest optymalna. Podamy również postać optymalnych strategii dla $\hat{Y}$ o rozkładzie Erlanga. W kolejnych rozdziałach zajmiemy się analizą postaci optymalnej strategii dla rozkładów prawdopodobieństwa o logarytmicznie wypukłej funkcji gęstości i funkcji prawdopodobieństwa odpowiednio. Okazuje się, że przy niewielu dodatkowych założeniach strategie barierowe są optymalne. Jest to nowy, nieznany wcześniej rezultat. Następnie uogólnimy wyniki dla modelu Cramera-Lundberga z dywidendą wypłacaną tylko w momentach realizacji szkody. W ostatnim rozdziale wskażemy możliwości uogólnienia otrzymanych wyników dla modelu z funkcją użyteczności.

Abstract

The dissertation is organized as follows. At the beginning we present the problem and show, that the issue of optimal strategy for the optimization problem is equivalent to the analysis of some Bellman equation. Using Banach contraction mapping theorem we show existence of solution to the Bellman equation in the space of continuous and bounded functions and in the space of bounded measurable functions respectively. From the Bellman equation we derive the basic properties of the solution, namely a value function $V(x)$ and the strategy $u(x)$ which is a maximizer of the right hand side of the Bellman equation. In the next chapter we analyze the problem for a loss having distribution supported on the set $\{-n, -n+1, ..., 0, 1, 2, ...\}$ for some integer $n > 0$. We show that in this particular case we can characterize the form of the optimal strategy more precise than in general. Thereafter we investigate the problem for the random variable $Y = d - \hat{Y}$, where $d > 0$ is a deterministic constant that stands for the premium, and $\hat{Y}$ is a random variable describing the loss. Assuming that $\hat{Y}$ has an exponential distribution we prove, that a barrier strategy is optimal in this case. We also present the form of strategy which is optimal, when $\hat{Y}$ has an Erlang distribution. In the subsequent chapters we deal with the problem for logarithmically convex probability distributions. It appears that we need not many additional assumptions to state that the barrier strategies are optimal in this case. This is an original result. Then we generalize result for Cramer-Lundberg model with the dividend paid at the moment of a loss. Finally we point out how one can generalize results for the model with the utility function.